

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Сибирское отделение  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ  
им. С. А. Христиановича

В.И. Яковлев

# Классическая электродинамика

Часть 2

Электромагнитные волны

Учебное пособие

Новосибирск

2009

ББК В 313 я 73-1  
УДК 537, 538  
Я 261

Яковлев В. И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие / Новосибир. ун-т. Новосибирск, 2009. 302 с.  
ISBN 973-5-94356-761-2

Учебное пособие содержит изложение второй части годового курса электродинамики, который читается студентам физического факультета Новосибирского государственного университета. Касается вопросов возникновения и распространения электромагнитных волн как в свободном пространстве, так и при наличии ограничивающих поверхностей.

Рецензент

проф. Б. А. Луговцов

Печатается по решению методической комиссии физического факультета и решению ученого совета ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН.

- © Новосибирский государственный университет, 2009
- © Институт теоретической и прикладной механики, 2009

ISBN 973-5-94356-761-2 © В. И. Яковлев, 2009

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ</b>	
7.1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение . . . . .	8
7.2. Плоские волны. Основные соотношения . . . . .	10
7.3. Пример плоской волны . . . . .	13
7.4. Уравнения Максвелла для монохроматических процессов	17
7.5. Монохроматическая плоская волна: поля, волновой вектор, фазовая скорость . . . . .	20
7.6. Монохроматическая плоская волна: поляризация . . . . .	22
7.7. Отражение и преломление электромагнитной волны на границе раздела двух сред . . . . .	27
7.8. Формулы Френеля . . . . .	31
7.9. Характерные особенности процесса отражения-преломления . . . . .	34
7.10. Просветление оптики. О диэлектрических зеркалах . . . . .	39
7.11. Предварительно о монохроматической сферической волне	45
<b>Глава 8. ФУРЬЕ-РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ</b>	
8.1. Формулы преобразования Фурье . . . . .	49
8.2. Некоторые характерные случаи фурье-преобразования . . . . .	54
8.3. Соотношение неопределенности . . . . .	58
8.4. О физическом содержании соотношения неопределенности	66
8.5. Спектр случайного процесса . . . . .	69

8.6.	Преобразования Фурье для функций четырех переменных. Уравнения Максвелла в фурье-представлении . . .	73
<b>Глава 9. ДИСПЕРСИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b>		
9.1.	Краткий обзор электромагнитных свойств различных сред и их механизмов дисперсии . . . . .	82
9.2.	Классическая электронная теория дисперсии . . . . .	84
9.3.	Дисперсия и волновой пакет . . . . .	89
9.4.	Метод стационарной фазы . . . . .	97
9.5.	О затухании и усилении электромагнитной волны в среде	101
<b>Глава 10. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. РЕЗОНАТОРЫ. ВОЛНОВОДЫ</b>		
10.1.	Стоячие волны . . . . .	107
10.2.	Стоячие волны при отражении от стенки конечной проводимости . . . . .	109
10.3.	Два примера электромагнитных волн в ограниченных областях . . . . .	113
10.4.	Резонаторы . . . . .	115
10.5.	Вынужденные колебания полей в щелевом резонаторе с потерями . . . . .	120
10.6.	Волноводы . . . . .	125
10.7.	Волновод с прямоугольным поперечным сечением . . . .	130
10.8.	ТЕМ-волны . . . . .	135
<b>Глава 11. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b>		
11.1.	О природе интерференции . . . . .	139
11.2.	Интерференция монохроматического света . . . . .	140
11.3.	Первый шаг в сторону от монохроматической идеализации	148
11.4.	Квазимонохроматичность и когерентность . . . . .	150
11.5.	Опыт Юнга. Качественное рассмотрение . . . . .	154
11.6.	Опыт Юнга. Количественный анализ . . . . .	157
11.7.	Влияние размеров источника на интерференционные явления . . . . .	160



11.8.	Корреляционная функция стационарного случайного волнового поля и ее роль в явлении интерференции . . . . .	166
11.9.	Апертура интерференции и условие применимости протяженного источника . . . . .	174
11.10.	Интерференция на тонкой пленке. Локализация интерференционных полос . . . . .	176
<b>Глава 12. ДИФРАКЦИЯ</b>		
12.1.	Введение . . . . .	187
12.2.	Математическая постановка задачи дифракции и приближенные граничные условия Кирхгофа . . . . .	189
12.3.	Решение задачи дифракции методом разложения на плоские волны . . . . .	192
12.4.	Принцип Гюйгенса-Френеля. Интеграл Кирхгофа . . . . .	195
12.5.	Зоны Френеля. Зонная пластинка . . . . .	201
12.6.	Вывод интеграла Кирхгофа . . . . .	206
12.7.	Интеграл Кирхгофа для цилиндрических волн . . . . .	213
12.8.	Приближения Френеля и Фраунгофера . . . . .	214
12.9.	Примеры дифракционных картин Фраунгофера . . . . .	219
12.10.	Пример дифракционной картины Френеля . . . . .	223
12.11.	Дифракционные решетки . . . . .	231
12.12.	Дифракционная решетка как спектральный прибор . . . . .	239
12.13.	Интерферометр Фабри-Перо . . . . .	241
<b>Глава 13. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b>		
13.1.	Волновое уравнение для скалярного и векторного потенциалов . . . . .	249
13.2.	Запаздывающие потенциалы . . . . .	250
13.3.	Мультипольное разложение для запаздывающих потенциалов . . . . .	253
13.4.	Примеры электромагнитных полей от гармонических источников . . . . .	258
13.5.	Дипольное излучение . . . . .	261
13.6.	Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения . . . . .	267

13.7.	Излучение антенны . . . . .	271
13.8.	Интерференционный способ управления диаграммой направленности антенн . . . . .	276
<b>Глава 14. СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ</b>		
14.1.	Введение . . . . .	285
14.2.	Электромагнитные мультипольные поля (осесимметричный случай) . . . . .	286
14.3.	Сферическая стоячая волна. Сферический резонатор . . . . .	291
14.4.	Замкнутая задача излучения антенны . . . . .	293
	Библиографический список . . . . .	301

## Предисловие

Книга является продолжением учебного пособия по классической электродинамике и посвящена рассмотрению волновых процессов, включая элементы волновой оптики. Как видно из оглавления, за исключением последней главы, книга касается тех вопросов, которые традиционно изучаются на втором курсе физического факультета НГУ. (Остающиеся вне книги геометрическую оптику и связанные с ней вопросы дифракции, а также четырехмерную электродинамику с сопутствующими вопросами излучения релятивистских частиц и рассеяния автор предполагает изложить в дополнительном издании.)

Последняя глава, выходящая за пределы обязательной программы курса, возникла из желания привычные решения уравнений Максвелла в виде монохроматических плоских волн дополнить осесимметричными электромагнитными векторными мультиполями, задаваемыми в сферических координатах. Тем самым класс решаемых волновых задач расширяется за счет включения областей со сферическими границами. Это позволило продемонстрировать формулировку замкнутой задачи излучения для простейшей сферической антенны и тем облегчить изложение вопроса об излучении антенны, подчеркнув приближенность обычно применяемого подхода.

Книга написана как пособие для первоначального изучения основ теории волновых процессов в электродинамике. Считаю, что понимание теории полезно и для экспериментальной работы, автор стремился сделать изложение по возможности доступным, следя за последовательностью и отсутствием логических пробелов в цепочках рассуждений. Этой же цели служит использование специальных необщепринятых обозначений типа  $f$ ,  $\hat{E}$  (со «шляпками») для выделения комплексных амплитуд соответствующих физических величин.

Разумеется, данное краткое введение в предмет (к тому же чисто теоретическое) не может служить заменой существующих замечательных «толстых» учебников, примеры которых приведены в библиографическом списке. Особенно хочется обратить внимание читателя на великолепные учебники по волновой оптике Ахманова-Никитина и Бутикова.

В заключение выражаю искреннюю благодарность директору ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН академику В. М. Фомину и зав. кафедрой общей физики НГУ проф. А. М. Оришичу за безграничное терпение, позволившее автору написать эту книгу. Благодарю студента физического факультета Р. Галева за помощь в создании иллюстраций.

## Глава 7

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

До сих пор (в ч. 1 учебного пособия) мы ограничивались рассмотрением электрического и магнитного полей либо стационарных, либо квазистационарных, удовлетворяющих уравнениям Максвелла без токов смещения. Такие поля всегда связаны с создающими их источниками в виде зарядов и токов и в отсутствие источника не существуют. Теперь мы переходим к изучению полей, для которых токи смещения приобретают определяющее значение. В частности, при наличии токов смещения поля могут существовать и в отсутствие токов и зарядов. Это — электромагнитные волны. В данной главе мы рассмотрим так называемые плоские волны и те физические вопросы, которые разрешаются с использованием этой идеализированной модели.

### 7.1. Свободное электромагнитное поле. Волновое уравнение

Еще Максвелл обратил внимание, что полученная им система уравнений допускает существование свободного электромагнитного поля, не связанного ни с какими токами или зарядами. Токи и заряды могут порождать электромагнитное поле, которое сколь угодно далеко может оторваться от породивших это поле источников и существовать в виде

## 7.1. Свободное электромагнитное поле

9

электромагнитной волны. Эти поля описываются однородными уравнениями Максвелла (без зарядов и токов), которые для вакуума имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (1), \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2), \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (3), \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad (4). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Эта замкнутая система получена из уравнений (6.16) исключением  $\rho, \mathbf{j}$ , заменой  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  на  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , что для вакуума справедливо из-за  $\epsilon = 1, \mu = 1$ .

Так как в последующем нам придется рассматривать электромагнитные волны и в материальных средах (непроводящих), начнем с уравнений, справедливых в общем случае

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Но эти уравнения незамкнуты. В случае статических полей они замыкались материальными уравнениями  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Хотя в произвольно меняющихся со временем и в пространстве полях эти соотношения несправедливы, для вопросов, обсуждающихся в книге, ими можно свободно пользоваться, внося непринципиальные уточнения, учитывающие так называемую частотную дисперсию.

Таким образом, однородную систему уравнений Максвелла для общего случая непроводящей среды, характеризующейся проницаемостями  $\epsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$ , мы представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad (1), \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (2), \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (3), \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad (4). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Начнем с того, что, исключив из этой системы одну из переменных ( $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ ), для второй получим уравнение, которое называется волновым уравнением. Например, подействуем оператором  $\operatorname{rot}$  на первое из уравнений (7.3) и в правую часть получившегося равенства подставим уравнение (3):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2};$$

воспользовавшись теперь инвариантным определением лапласиана векторного поля  $\Delta \mathbf{E} = \text{grad div} \mathbf{E} - \text{rot rot} \mathbf{E}$  и условием  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ , получим

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (7.4)$$

Это и есть волновое уравнение для поля  $\mathbf{E}$ . Здесь необходимо обратить внимание на следующее: хотя при выводе волнового уравнения использовалось условие  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ , отсюда вовсе не следует, что любое решение уравнения (7.4) удовлетворяет этому дополнительному требованию. Поэтому векторное волновое уравнение мы везде будем сопровождать необходимым условием и записывать в виде пары

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \text{div} \mathbf{E} = 0. \quad (7.5)$$

Аналогичные действия можно повторить и получить точно такие же уравнения для поля  $\mathbf{H}$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0; \quad (7.6)$$

следует только при этом помнить, что если одно из полей получается с использованием волнового уравнения, то другое должно определяться из соответствующего уравнения первого порядка Максвелла. Иными словами, произвольные независимые решения систем уравнений (7.5), (7.6) не удовлетворяют первоначальным уравнениям (7.1), (7.3).

## 7.2. Плоские волны. Основные соотношения

Рассмотрим простейший частный случай электромагнитных волн (так называемые плоские волны), в котором поля зависят лишь от одной пространственной координаты (например,  $z$ ) и времени:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t). \quad (7.7)$$

1. Покажем, что в волне (7.7) электрическое и магнитное поля не имеют  $z$ -компонент и, кроме того, направление распространения волны связано с осью  $z$ . Эти два утверждения составляют одно из основных свойств рассматриваемой волны — *поперечность плоской электромагнитной волны*.

Первое утверждение докажем на примере поля  $\mathbf{E}$ , заметив, что  $z$ -компонента уравнения (3) и скалярное уравнение (4) системы (7.3)

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

в случае (7.7) сводятся к соотношениям  $\partial E_z / \partial t = 0$ ,  $\partial E_z / \partial z = 0$ , т. е. к условию  $E_z = E_0 = \text{Const}$ . Но такое неизменное во времени однородное поле отношения к волне не имеет. Следовательно, в волне можно положить  $E_z = 0$ . Аналогичный результат для поля  $\mathbf{H}$  получается из рассмотрения уравнений (1), (2) системы (7.3). Таким образом, в рассматриваемой плоской волне (7.7) электрическое и магнитное поля имеют только перпендикулярные к выделенному направлению  $z$  компоненты, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp(z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp(z, t), \quad E_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (7.8)$$

Для доказательства второго утверждения заметим, что каждая из ненулевых компонент полей (7.8), как следует из уравнений (7.5), (7.6), удовлетворяет одномерному скалярному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (7.9)$$

Общее решение (7.9), как легко убедиться, складывается из двух независимых произвольных распределений, перемещающихся вдоль и против оси  $z$  без изменения формы со скоростью

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (7.10)$$

То есть общее решение уравнения (7.9) представляется суммой

$$f = f_1(z - ut) + f_2(z + ut), \quad (7.11)$$

где  $f_1(\xi_1)$ ,  $f_2(\xi_2)$  — произвольные функции от своих аргументов  $\xi_1 = z - ut$ ,  $\xi_2 = z + ut$ . В этом убеждают значения соответствующих вторых производных

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} = \frac{d^2 f_i}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = (\pm u)^2 \frac{d^2 f_i}{d\xi^2} \quad (i = 1, 2)$$

для каждого из слагаемых решения (7.11). Отсюда понятно, что выделенная в (7.7) координата  $z$  действительно связана с направлениями распространения рассматриваемых волн. Следовательно, соотношения (7.8) означают, что электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в плоской

волне перпендикулярны к направлению ее распространения, т. е. плоская волна является *поперечной*.

**2. Связь между полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в волне.** Рассмотрим одну из этих волн, например, бегущую в положительном направлении оси  $z$ . В такой волне все величины являются функциями только от  $\xi = z - ut$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\xi) \quad (7.12)$$

(индексы  $\perp$ , отмечающие перпендикулярность, здесь опускаем, чтобы не загромождать последующие формулы необязательными деталями). Если  $\mathbf{E}(\xi)$ , к примеру, произвольная функция, то  $\mathbf{H}(\xi)$  уже не может являться произвольной; она определяется из первого уравнения системы (7.3). Подставив сюда значения

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}(\xi) &= [\operatorname{grad}\xi \times \frac{d\mathbf{E}}{d\xi}] = [\mathbf{e}_z \times \frac{d\mathbf{E}}{d\xi}] = \frac{d}{d\xi}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\xi)], \\ \frac{\partial\mathbf{H}(\xi)}{\partial t} &= \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial\xi}{\partial t} = -u \frac{d\mathbf{H}}{d\xi}, \end{aligned}$$

следующие из выражений (7.12), получим

$$\frac{d}{d\xi}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}] = \frac{\mu}{c} u \frac{d\mathbf{H}}{d\xi}.$$

Отсюда после интегрирования, подстановки значения  $u$  из определения (7.10) и замены  $\mathbf{e}_z$  на единичный вектор  $\mathbf{n}$  по направлению распространения волны приходим к искомому результату

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (7.13)$$

Видно, что по величине векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в каждой точке пространства и в каждый момент времени связаны соотношением

$$\epsilon E^2 = \mu H^2, \quad (7.14)$$

согласно которому плотности энергии электрического и магнитного полей между собой равны, так что суммарная плотность энергии электромагнитного поля в волне

$$w = \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 = \frac{1}{4\pi} \mu H^2. \quad (7.15)$$



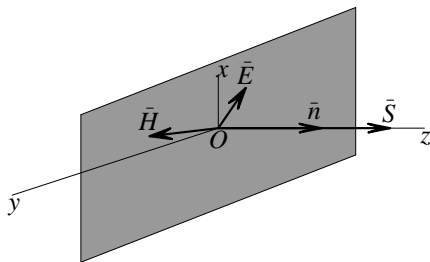


Рис. 7.1

Из соотношения (7.13) видно, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоской волне не только перпендикулярны к направлению распространения, но они еще перпендикулярны друг к другу (рис. 7.1). Причем в каждой точке пространства они расположены так, что *направление вектора Пойнтинга*

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H^2 \mathbf{n} \quad (7.16)$$

*совпадает с направлением распространения волны.* С использованием соотношения (7.15) для плотности энергии предыдущее выражение можно представить в виде

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} w \mathbf{n}, \quad (7.17)$$

т. е. энергия переносится со скоростью (7.10) распространения волны, которая в случае вакуума равна  $c$ . В этой связи здесь уместно напомнить, что константа  $c$ , входящая в уравнения Максвелла, до сих пор рассматривалась как *электродинамическая постоянная*. Теперь мы убеждаемся, что эта константа на самом деле представляет собой фундаментальную физическую величину — скорость распространения электромагнитных волн (скорость света) в пустоте.

### 7.3. Пример плоской волны

Продemonстрируем порождение плоской электромагнитной волны простейшей структуры источником в виде *стороннего* поверхностного тока, действующего в течение конечного промежутка времени.

Пусть заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma = \text{const}$  непроводящая пленка, расположенная в плоскости  $z = 0$ , в течение промежутка времени  $0 \leq t \leq t_0$  совершает движение в своей плоскости с постоянной скоростью  $v \ll c$  по направлению оси  $y$ . Это движение пленки создает поверхностный ток в плоскости  $z = 0$

$$\mathbf{i}(t) = i(t)\mathbf{e}_y, \quad i(t) = \begin{cases} i_0 = \sigma v & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases} \quad (1)$$

рассматриваемый в качестве источника исследуемой волны. Для наглядности система координат и поверхностный ток (в виде кончиков стрел) изображены на рис. 7.2.

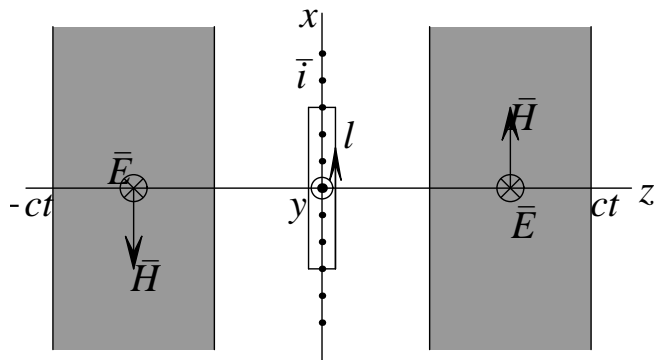


Рис. 7.2

Там же нанесен замкнутый контур  $\ell$  с указанием положительного направления обхода, соответствующего току  $\mathbf{i}$ , подсказывающий граничные значения поля  $\mathbf{H}$  при  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} H_x|_{z=+0} &= \frac{2\pi}{c}i(t), \\ H_x|_{z=-0} &= -\frac{2\pi}{c}i(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Импульсный ток (1) порождает волны, уходящие от плоскости  $z = 0$  вправо и влево, причем отличные от нуля компоненты полей в них связаны соотношениями симметрии

$$E_y(-z, t) = E_y(z, t), \quad H_x(-z, t) = -H_x(z, t). \quad (2')$$

Поэтому можно ограничиться рассмотрением волны в правом полупространстве, бегущей по направлению оси  $z$ . В этой волне поля  $E_y, H_x$  на основании свойства (7.13) связаны соотношением

$$E_y(z, t) = -H_x(z, t), \quad (3)$$

а функция  $f(\xi)$  из решения вида (7.12)

$$H_x(z, t) = f(z - ct) \quad (3')$$

определяется граничным условием (2) и начальным условием в момент  $t = 0$

$$H_x(z, 0) = 0 \quad (z > 0). \quad (4)$$

Из последнего условия следует, что

$$f(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi > 0,$$

а условие (2) определяет значения  $f(\xi)$  для отрицательной полуоси:

$$f(-ct) = (2\pi/c)i(t).$$

Таким образом,  $f(\xi)$  представляет собой ступенчатую функцию, только на интервале  $[-ct_0, 0]$  принимающую ненулевое постоянное значение  $2\pi i_0/c$ .

Полученное решение удобно прокомментировать графически. Для этого прямые  $z = ct$  и  $z = c(t - t_0)$ , определяющие положения переднего и заднего фронтов волны в правом полупространстве для произвольного момента времени  $t > 0$ , изображены в плоскости  $(z, t)$  (рис. 7.3).

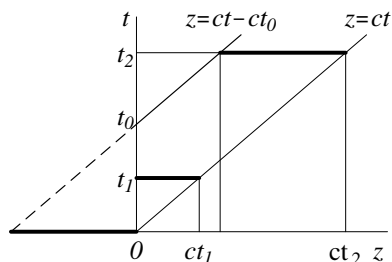


Рис. 7.3

Здесь на оси  $z$  жирной линией выделен отрезок, где функция  $f(z - ct)$

при  $t = 0$  отлична от нуля, а для двух значений времени  $t_1, t_2$  отмечены положения, которые волна занимает. Видно, что при  $0 < t_1 < t_0$  волна заполняет слой  $0 \leq z \leq ct_1$ , прилегающий к плоскости симметрии с током  $i(t)$ , а при  $t > t_0$  — слой толщины  $ct_0$ , уже оторвавшийся от этой плоскости. Два плоских слоя (правый и левый), соответствующие моменту  $t_2$ , в виде затемненных полос показаны также на рис. 7.2, где схематически указаны направления заполняющих эти слои однородных электрического и магнитного полей.

Таким образом, при  $t > t_0$  от источника отходят две волны в виде изолированных друг от друга плоских слоев толщины  $ct_0$ , перемещающихся вправо и влево со скоростью  $c$ , содержащих отличные от нуля поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . Вне этих слоев пространство свободно от полей. (Электростатическое поле в пространстве  $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \text{Sign}(z)\mathbf{e}_z$  к полю в волне отношения не имеет.) Упомянем здесь, что каждый из этих слоев представляет собой простейший пример структуры, которую впоследствии будем называть *волновым пакетом*. В данном случае это *нерасплывающийся* волновой пакет, бегущий без изменения формы.

Суммарная энергия электромагнитного поля в волне  $W$ , приходящаяся на единицу площади источника, заключена в объеме двух прямых цилиндров, каждый с высотой  $ct_0$  и с единичной площадью поперечного сечения, т. е.  $W = 2ct_0w$ , где  $w$  определяется соотношением (7.15) при  $\mu = 1$ . Следовательно,

$$W = 2ct_0 \cdot \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{c} i_0 \right)^2 = ct_0 2\pi \left( \frac{i_0}{c} \right)^2. \quad (5)$$

Для выяснения происхождения этой энергии обратим внимание на электрическое поле в плоскости источника, которое в соответствии с результатами (2), (2'), (3) равно

$$E_y|_{z=0} = \begin{cases} -(2\pi/c)i_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Важно заметить, что ток  $\mathbf{i}$  и поле  $\mathbf{E}$  здесь направлены друг против друга, т. е. ток в источнике является «сторонним», вызванным сторонними силами (в рассматриваемом случае это механические силы), как уже было подчеркнуто в постановке задачи. Внешние силы, приходящиеся на единицу площади заряженной пленки, совершают работу по перемещению заряда  $\sigma$  против электрического поля на расстояние  $vt_0$ , т. е.

$$A = \sigma \frac{2\pi i_0}{c} vt_0 = ct_0 2\pi \left( \frac{i_0}{c} \right)^2.$$

Естественно, эта работа равна энергии поля (5) в электромагнитной волне. Таким образом, механическая работа, совершенная в плоскости  $z = 0$  за конечное время  $t_0$ , превращается в энергию электромагнитного поля и переносится волной на сколь угодно большие расстояния, существуя сколь угодно долго после окончания работы внешнего источника.

## 7.4. Уравнения Максвелла для монохроматических процессов

1. В последующем мы убедимся, что фундаментальное значение имеет изучение волновых процессов, в которых изменение полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  по времени в любой точке пространства происходит по синусоидальному закону с определенной круговой частотой  $\omega$ . Это так называемые монохроматические процессы (монохроматические волны).

Как уже говорилось при изучении явления скин-эффекта в § 6.9, характерной особенностью описания монохроматических процессов является использование *комплексного представления физических величин*. Напомним, что любую физическую величину (вещественную)

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \alpha(\mathbf{r})),$$

со временем меняющуюся по гармоническому закону, амплитуда колебаний которой  $f_0(\mathbf{r})$  и начальная фаза  $\alpha(\mathbf{r})$  зависят от координат, удобно представлять в виде реальной части комплексного выражения

$$f(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\hat{f}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}].$$

Функция  $\hat{f}(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r})e^{i\alpha(\mathbf{r})}$  называется комплексной амплитудой физической величины  $f$ . Она объединяет в своем составе как амплитуду колебаний, так и начальную фазу. (Временной множитель в комплексном выражении здесь взят в виде экспоненты со знаком «минус», что при описании волновых процессов предпочтительно.) Заметим, что обозначение со «шляпкой», использованное здесь для выделения комплексной амплитуды, не является общепринятым. Но оно удобно, освобождает формулы от двусмысленностей и поэтому применяется во всей книге.

Векторные поля при изучении монохроматических процессов задаются комплексными выражениями типа

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (7.18)$$

в которых комплексная амплитуда является векторной величиной

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{E}_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + \hat{E}_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + \hat{E}_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z,$$

смысл которой очевиден из этой развернутой записи. Напомним, что, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, знак взятия вещественной части можно опускать (как в равенстве (7.18)) и оперировать с самими комплексными выражениями. Конечно, при этом не забываем, что физический смысл имеет лишь вещественная часть используемого комплексного выражения, к которой мы переходим на завершающем этапе процесса решения.

Если нас интересует произведение двух физических величин, например  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , то перед умножением, естественно, надо переходить к их вещественным частям. Но если, как чаще всего бывает, нам достаточно знать лишь среднее по времени значение этого произведения, то для него справедливо равенство

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = (1/2) \text{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{r})]. \quad (7.19)$$

Действительно,

$$[\text{Re}\mathbf{E} \times \text{Re}\mathbf{B}] = (1/4) \left[ (\hat{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \hat{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}) \times (\hat{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \hat{B}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}) \right];$$

при усреднении члены, содержащие  $e^{\pm 2i\omega t}$  обращаются в нуль, так что

$$\begin{aligned} [\text{Re}\mathbf{E} \times \text{Re}\mathbf{B}] &= (1/4) \left( [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{r})] + [\hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})] \right) = \\ &= (1/2) \text{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{r})] = (1/2) \text{Re}[\hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})], \end{aligned}$$

что требовалось показать.

Для скалярного произведения векторов и для произведения скалярных величин, естественно, справедливы соотношения типа

$$\langle f_1 f_2 \rangle = (1/2) \text{Re}(\hat{f}_1 \hat{f}_2^*), \quad \langle f^2 \rangle = (1/2) |\hat{f}|^2. \quad (7.20)$$

*Пример 7.1.* Построить комплексную амплитуду радиуса-вектора частицы, совершающей периодическое движение, складывающееся из вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по орбите радиуса  $a$  с центром в начале координат:  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = a \sin \omega t$ , и колебательного движения вдоль оси  $z$ :  $z = h \sin \omega t$ .

По условию имеем

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y) + h \sin \omega t \mathbf{e}_z.$$

## 7.4. Уравнения Максвелла для монохроматических процессов 19

Так как  $\cos \omega t = \operatorname{Re}(e^{-i\omega t})$ ,  $\sin \omega t = \operatorname{Re}(ie^{-i\omega t})$ , то  $\mathbf{r}(t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{Re} \{ [a(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) + i h \mathbf{e}_z] e^{-i\omega t} \}.$$

Следовательно, искомая комплексная амплитуда

$$\hat{\mathbf{r}} = a(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) + i h \mathbf{e}_z.$$

2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд полей, получающиеся после подстановки в систему (7.2) комплексных представлений всех функций типа (7.18) и сокращения временных множителей, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), & \operatorname{div} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= -\frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), & \operatorname{div} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Следует обратить внимание, что оба «дивергентных» уравнения этой системы являются следствиями «роторных» уравнений и могут быть отброшены. Следовательно, для гармонических процессов независимыми являются остающиеся два векторных уравнения. Так как они в случае материальной среды содержат четыре неизвестных векторных поля, то система (7.21) незамкнута, как и первоначальная система (7.2). Но, в отличие от последней, входящие в (7.21) комплексные амплитуды практически для всех изотропных сред связаны соотношениями<sup>1</sup>

$$\hat{\mathbf{B}} = \mu(\omega) \hat{\mathbf{H}}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \epsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}},$$

где диэлектрическая и магнитная проницаемости в общем случае являются комплексными и зависят от частоты  $\omega$  (частотная дисперсия; об этом более подробно будет сказано в главе 9). Поэтому рассматриваемая система уравнений приобретает вид

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \mu \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad (7.22)$$

и становится замкнутой системой. В случае неоднородной среды  $\epsilon$  и  $\mu$ , кроме  $\omega$ , зависят также от координат, но в этой книге решения уравнений Максвелла для неоднородных сред не затронуты. Поэтому мы будем считать, что в каждой из областей определения искомых полей

<sup>1</sup>Существуют редкие исключения, требующие учета так называемой пространственной дисперсии. Эти вопросы в данном курсе не рассматриваются.

характеристики среды  $\epsilon, \mu$  являются константами, к тому же вещественными. При этом уравнения (7.22) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon\mu \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad (\text{для однородных сред}), \quad (7.23)$$

содержащем только основные поля  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  и  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ .

(Заметим, что случаи комплексных  $\epsilon, \mu$ , соответствующие распространению волны с затуханием, в книге каждый раз будут специально оговариваться.)

## 7.5. Монохроматическая плоская волна: поля, волновой вектор, фазовая скорость

При использовании комплексного представления (7.18) волновое уравнение (7.4) приводится к уравнению

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.24)$$

для комплексной амплитуды поля  $\hat{\mathbf{E}}$ . Входящий сюда лапласиан векторного поля в декартовой системе координат

$$\Delta \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \Delta \hat{E}_x \mathbf{e}_x + \Delta \hat{E}_y \mathbf{e}_y + \Delta \hat{E}_z \mathbf{e}_z,$$

поэтому векторное уравнение (7.24) эквивалентно трем скалярным уравнениям вида

$$\Delta \hat{f} + \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \hat{f} = 0 \quad (7.25)$$

соответственно для  $\hat{E}_x, \hat{E}_y, \hat{E}_z$ .

Математики уравнение (7.25) называют уравнением Гельмгольца. Для нас (7.24), (7.25) — новые уравнения, поэтому, как и везде в этой книге, для них построим частные решения, которые в последующем будут иметь фундаментальное значение. Начнем со скалярного уравнения.

*Упражнение.* Используя метод разделения переменных, убедитесь, что уравнение (7.25) допускает решения в виде мультипликативных функций

$$e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z} = e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)},$$



где набор констант  $\alpha, \beta, \gamma$  в совокупности удовлетворяет условию

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Заметим, что это решение обычно представляют в виде  $\hat{f} = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}$ ,

где  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$  — постоянный вектор определенной длины  $|\mathbf{k}| = \sqrt{\epsilon\mu} \omega/c$ , задающий определенное направление в пространстве. Для векторного уравнения (7.24) аналогичное решение имеет вид

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = (\hat{E}_{0x} \mathbf{e}_x + \hat{E}_{0y} \mathbf{e}_y + \hat{E}_{0z} \mathbf{e}_z) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (7.26)$$

где  $\hat{E}_{0x}, \hat{E}_{0y}, \hat{E}_{0z}$  — произвольные комплексные постоянные. Вектор  $\mathbf{k}$  называется *волновым вектором*, его длина определяется соотношением

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} \omega/c, \quad (7.27)$$

связывающим  $k$  с частотой  $\omega$ .

*Уточняющее замечание.* Сумма более общего вида

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{E}_{0x} e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r})} \mathbf{e}_x + \hat{E}_{0y} e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r})} \mathbf{e}_y + \hat{E}_{0z} e^{i(\mathbf{k}_3\mathbf{r})} \mathbf{e}_z,$$

$$(|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}_3| = \sqrt{\epsilon\mu} \omega/c)$$

также составляет решение векторного уравнения (7.24), но она не описывает плоскую волну, в которой, по определению, все компоненты полей зависят лишь от одной пространственной координаты. Только при  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$  последнее условие выполняется и рассматриваемая сумма превращается в решение (7.26), отвечающее плоской монохроматической волне, распространяющейся вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Решение (7.26), взятое вместе с временным множителем,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (7.28)$$

представляет фундаментальное решение волнового уравнения (7.4), описывающее электрическое поле в плоской монохроматической волне, которое при выполнении условия

$$(\hat{\mathbf{E}}_0 \cdot \mathbf{k}) = 0 \quad (7.29)$$

удовлетворяет также и второму уравнению системы (7.5). Соотношение (7.29) означает, что вектор  $\hat{\mathbf{E}}_0$  не имеет компоненты вдоль выделенного направления  $\mathbf{k}$ , т. е. рассматриваемая волна является поперечной (см. также § 7.2).

Аргумент комплексного выражения (7.28) определяет фазу волны. Следовательно, поверхность постоянной фазы (или *волновая поверхность*) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = Const$$

и представляет собой плоскость, перпендикулярную волновому вектору. Эта плоскость перемещается в пространстве по направлению вектора  $\mathbf{k}$  со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k}, \quad (7.30)$$

называемой *фазовой скоростью*. Во всех точках перемещающейся волновой поверхности поле  $\mathbf{E}$  одинаково и не меняется со временем.

По известному полю  $\mathbf{E}$  (7.28) магнитное поле в волне определяется из первого уравнения системы (7.22), в рассматриваемом случае эквивалентного соотношению  $[\mathbf{i}\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = i(\omega/c)\mu\mathbf{H}$ . Отсюда при учете равенства (7.27) ответ можно записать в двух разных видах

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon\mu} \left[ \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (7.31)$$

Первый из них, совпадающий с полученным раньше (7.13), легче запоминается, так как визуально согласуется с энергетическим соотношением в волне (7.14).

Заметим в заключение, что здесь, при получении формул (7.29), (7.31), а также в дальнейшем предполагается, что результат применения операторов *div* и *rot* к векторному полю типа  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}$  читателю очевиден, поэтому формулы

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}) = (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}), \quad \operatorname{rot}(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}) = [i\mathbf{k} \times \mathbf{E}] \quad (7.32)$$

используются без комментариев.

## 7.6. Монохроматическая плоская волна: поляризация

Позже мы многократно убедимся, что монохроматические плоские волны составной частью входят в решения многих задач распространения волн. Поэтому более подробное исследование свойств этих волн

здесь будет уместно. С этой целью обратимся еще раз к решению (7.28), направив волновой вектор, для определенности, по оси  $z$ . При этом поле  $\mathbf{E}$ , учитывающее свойство (7.29), будет иметь компоненты только по  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ \hat{\mathbf{E}}_0 &= \hat{E}_{0x} \mathbf{e}_x + \hat{E}_{0y} \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Фактически мы имеем две волны с одинаковыми частотами, бегущие в одном направлении. Электрические и магнитные поля в них соответственно равны

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(z, t) &= \hat{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x, & \mathbf{E}_2(z, t) &= \hat{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{H}_1(z, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{H}_2(z, t) &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x\end{aligned}\quad (7.34)$$

(последние формулы получены из первого равенства (7.31)). В каждой из этих волн поля по величине связаны соотношением (7.14), а направлены так, чтобы их векторные произведения  $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  совпали с направлением  $\mathbf{k}$  (в данном случае с осью  $z$ ).

Обратим внимание на то, что здесь поле  $\mathbf{E}_1(z_p, t)$  в любой точке  $P$  меняется со временем, оставаясь параллельным или антипараллельным оси  $x$ . В таком случае говорят, что волна имеет *линейную* или *плоскую поляризацию*. А плоскость, образованную вектором  $\mathbf{E}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , называют *плоскостью поляризации*. Заметим, что аналогичный характер поляризации имеет вторая из волн (7.34), только плоскости поляризации у этих двух волн взаимно перпендикулярны. Таким образом, плоскую монохроматическую волну в самом общем случае можно рассматривать как результат суперпозиции двух линейно поляризованных волн.

Чтобы «увидеть» пространственное распределение полей, одну из этих составляющих волн, например, первую, представим в вещественном виде, используя показательную форму записи для комплексного числа  $\hat{E}_{0x}$  в виде  $|\hat{E}_{0x}| e^{i\delta_x}$ . Получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(z, t) &= |\hat{E}_{0x}| \cos(kz - \omega t + \delta_x) \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{H}_1(z, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\hat{E}_{0x}| \cos(kz - \omega t + \delta_x) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (7.35)$$

Здесь важно обратить внимание, что фазы полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  совпадают. Это означает, что если в некоторой плоскости поле  $E_x$ , например, равно нулю, то в этой плоскости и  $H_y = 0$ . Из соотношений (7.35) видно, что для фиксированного момента времени поля  $E_x, H_y$ , зависящие только от координаты  $z$  вдоль распространения волны, меняются по синусоидальному закону, что схематически изображено на рис. 7.4 для  $E_x$ .

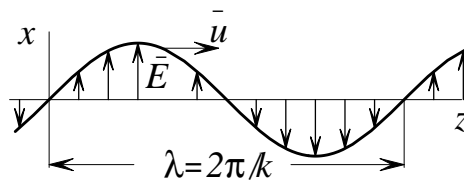


Рис. 7.4

Пространственный период синусоиды, являющийся длиной волны  $\lambda$ , связан с модулем волнового вектора  $\mathbf{k}$  соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{или} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7.36)$$

По этой причине  $k$  называют *волновым числом*. Это есть число волн, укладывающихся на отрезке длины  $2\pi$  см, взятом вдоль направления распространения волны.

Чтобы представить себе изменение электрического и магнитного полей с течением времени, можно считать, что система векторов  $\mathbf{E}$  (рис. 7.4) и аналогичная система  $\mathbf{H}$  движутся как целое вдоль оси  $z$  с фазовой скоростью (7.30). При учете соотношения (7.27), связывающего волновое число с частотой, фазовая скорость распространения монохроматической волны в свободном пространстве принимает значение

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

а длина волны (7.26) определяется как произведение

$$\lambda = u(2\pi/\omega)$$

фазовой скорости на период волны.

Теперь обратимся к монохроматической плоской волне общего вида, являющейся суперпозицией двух линейно поляризованных волн, чтобы

исследовать характер поляризации суммарной волны. Электрическое поле в этой волне (7.33) характеризуется двумя декартовыми компонентами

$$E_x(z, t) = |\hat{E}_{0x}| \cos(kz - \omega t + \delta_x), \quad E_y(z, t) = |\hat{E}_{0y}| \cos(kz - \omega t + \delta_y), \quad (7.37)$$

меняющимися со временем по гармоническому закону с произвольными амплитудами  $|\hat{E}_{0x}|$ ,  $|\hat{E}_{0y}|$  и начальными фазами  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ . Проследим за изменением напряженности электрического поля в фиксированной точке пространства  $P$ , представив себе, что вектор  $\mathbf{E}(z_p, t)$  для каждого момента времени мы откладываем от одной и той же точки. Понятно, что при этом конец вектора  $\mathbf{E}$  из-за его периодичности по времени описывает замкнутую кривую, лежащую в плоскости  $z = z_p$ . Вид этой кривой и определяет характер поляризации рассматриваемой волны.

Искомая кривая в параметрическом виде задана соотношениями (7.37), в которых координата  $z = z_p$  фиксированна, а  $t$  является параметром. Исключив параметр, отсюда получим явную формулу для искомой кривой. Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть фазы колебаний  $E_x(z_p, t)$ ,  $E_y(z_p, t)$  совпадают, т. е.  $\delta_x = \delta_y = \delta$ , а комплексный вектор  $\hat{\mathbf{E}}_0 = (|\hat{E}_{0x}| \mathbf{e}_x + |\hat{E}_{0y}| \mathbf{e}_y) e^{i\delta}$ . Тогда для исключения параметра достаточно одно соотношение (7.37) разделить на другое и получить

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{|\hat{E}_{0y}|}{|\hat{E}_{0x}|} = \text{Const.}$$

Отсюда видно, что искомая кривая представляет отрезок прямой в плоскости  $(x, y)$ , электрическое поле остается с течением времени в одной плоскости, проходящей через ось  $z$  (рис. 7.5), т. е. и суммарная волна является линейно поляризованной. Плоскость поляризации составляет угол  $\alpha$  с плоскостью  $(x, z)$ , причем

$$\text{tg } \alpha = |\hat{E}_{0y}| / |\hat{E}_{0x}|.$$

2. Пусть фазы колебаний отличаются на  $\pi$ , т. е.  $\delta_y = \delta_x \pm \pi$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_0 = (|\hat{E}_{0x}| \mathbf{e}_x - |\hat{E}_{0y}| \mathbf{e}_y) e^{i\delta_x}$ . Тогда аналогично получаем линейно поляризованную волну, показанную на рис. 7.6.

3. Пусть  $\hat{\mathbf{E}}_0 = (|\hat{E}_{0x}| \mathbf{e}_x \pm i |\hat{E}_{0y}| \mathbf{e}_y) e^{i\delta_x}$ , т. е. фазы колебаний  $E_x$  и  $E_y$  отличаются на  $\pi/2$ :  $\delta_y = \delta_x \pm (\pi/2)$ . При этом

$$E_x = |\hat{E}_{0x}| \cos(kz_p - \omega t + \delta_x), \quad E_y = \mp |\hat{E}_{0y}| \sin(kz_p - \omega t + \delta_x)$$

и исключение параметра приводит к уравнению эллипса

$$\frac{E_x^2}{(|\hat{E}_{0x}|)^2} + \frac{E_y^2}{(|\hat{E}_{0y}|)^2} = 1$$

с главными осями, совпадающими с осями координат.

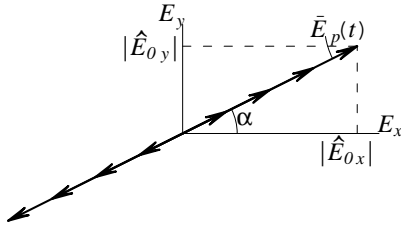


Рис. 7.5

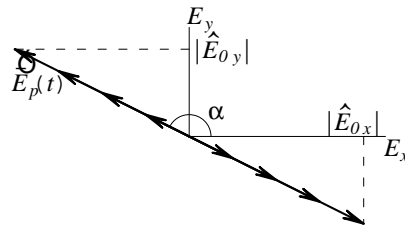


Рис. 7.6

Таким образом, конец вектора  $\mathbf{E}$  в рассматриваемом случае описывает эллипс, волна называется *эллиптически поляризованной*. В зависимости от знака перед  $i$  в выражении  $\hat{\mathbf{E}}_0$  вектор  $\mathbf{E}$  вращается либо против (при  $+i$ ), либо по часовой стрелке (при  $-i$ ), если на картину смотреть с конца вектора  $\mathbf{k}$  (на рис. 7.7 направление стрелки соответствует  $+i$ ).

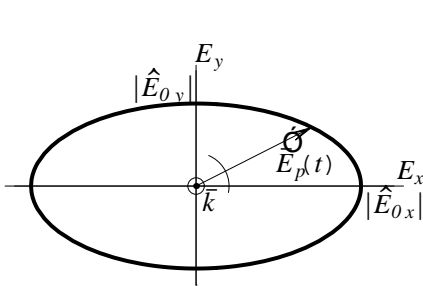


Рис. 7.7

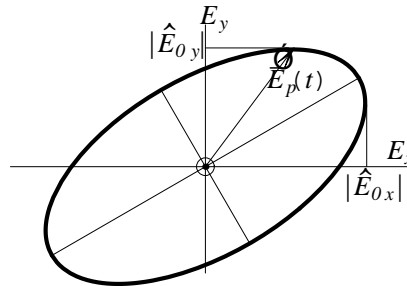


Рис. 7.8

Из рассмотренных частных случаев видно, что информация о характере поляризации волны (7.33) содержится в комплексном векторе  $\hat{\mathbf{E}}_0$ . В завершение отметим без вычислений, что при произвольной разности

фаз  $\delta_y - \delta_x$  получается эллипс, главные оси которого не совпадают с осями координат, как изображено на рис. 7.8.

Подводя итог, можно сказать, что в результате суперпозиции двух линейно поляризованных в перпендикулярных направлениях волн в общем случае получается эллиптически поляризованная волна. При одинаковых полуосях эллипс переходит в окружность, и тогда поляризация называется круговой. В случаях, соответствующих рис. 7.5 и 7.6, эллипс вырождается в отрезок прямой, и результирующая волна становится линейно поляризованной.

Обратимся к усредненному потоку энергии в монохроматической плоской волне. Как видно из соотношения (7.16), мгновенное значение вектора Пойнтинга можно выразить через квадрат напряженности электрического поля в данной точке:

$$S = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2.$$

Для общего случая эллиптически поляризованной волны (7.33)  $E^2 = E_x^2 + E_y^2$ , поэтому усредненный поток энергии в ней определяется выражением

$$\langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle),$$

что с использованием правила (7.20) можно выразить через комплексную амплитуду электрического поля в рассматриваемой волне

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (|\hat{E}_{0x}|^2 + |\hat{E}_{0y}|^2) = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\hat{\mathbf{E}}|^2. \quad (7.38)$$

Подчеркнем здесь, что поток энергии в эллиптически поляризованной волне складывается из потоков энергии двух составляющих линейно поляризованных волн.

## 7.7. Отражение и преломление электромагнитной волны на границе раздела двух сред

Из опыта известно, что, когда свет достигает границы раздела двух сред с разными оптическими свойствами (или границы среды с вакуумом), он частично проходит во вторую среду, изменяя направление в

случае наклонного падения, и частично возвращается в первую среду. Направления отраженного и преломленного света описываются известными законами геометрической оптики, экспериментально установленными задолго до выявления электромагнитной природы света. Однако эти законы ничего не говорят о характере поляризации и об интенсивностях отраженного и преломленного света. Ответ на эти вопросы мы получим, рассмотрев поведение электромагнитных волн на границе раздела двух сред. При этом попутно воспроизведем также законы отражения-преломления геометрической оптики.

Рассмотрим идеализированный случай бесконечной плоской границы раздела двух однородных изотропных сред, каждая из которых занимает целое полупространство и характеризуется вещественными проницаемостями  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$ . Пусть в первой среде задана приходящая из бесконечности плоская монохроматическая волна с полями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)}, \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \left[ \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \times \hat{\mathbf{E}}_0 \right] e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

где  $k_0, \omega_0$  удовлетворяют соотношению  $k_0 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (\omega_0 / c)$ . Плоскость, образованную нормалью к границе раздела и волновым вектором падающей волны  $\mathbf{k}_0$ , называют *плоскостью падения*. Пусть это будет плоскость  $(x, z)$ , как показано на рис. 7.9.

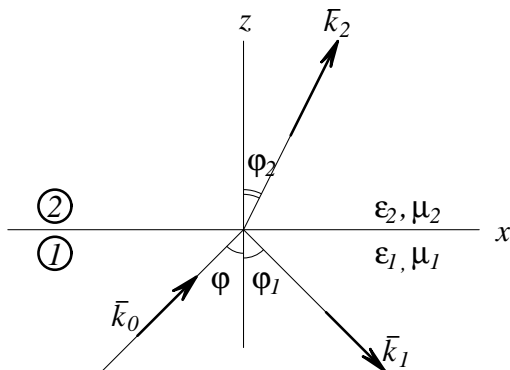


Рис. 7.9

Постановку задачи можно сформулировать просто: найти электро-



магнитные поля в областях 1, 2, обусловленные падающей волной (7.39).

При этом искомые поля должны удовлетворять

- 1) уравнениям Максвелла,
- 2) граничным условиям непрерывности тангенциальных компонент  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на границе раздела

$$\mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}|_{z=0}, \quad \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{2\tau}|_{z=0} \quad (7.40)$$

(дополнительные условия непрерывности  $B_n$  и  $D_n$  при этом выполняются автоматически, как показано в конце параграфа),

3) так называемому условию излучения, которое уточняется ниже. Нетрудно догадаться, что искомые поля состоят из полей одних лишь плоских монохроматических волн, распространяющихся в соответствующих средах

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t)}, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t)},$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \left[ \frac{\mathbf{k}_1}{k_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right] e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t)}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \left[ \frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right] e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t)},$$

где  $\mathbf{k}_1, \omega_1$  — волновой вектор и частота отраженной волны, распространяющейся в первой среде,  $\mathbf{k}_2, \omega_2$  — параметры так называемой преломленной волны, распространяющейся во второй среде, подчиняющиеся соответствующим соотношениям. Необходимо отметить, что в первой среде имеются две волны — падающая и отраженная, а во второй среде мы предположили присутствие лишь одной, уходящей от границы раздела, волны. Таким образом мы удовлетворили названному выше условию излучения, которое требует, чтобы, в соответствии с принципом причинности, волны, обусловленные границей раздела, были только уходящими.

Пока у нас нет возможности задаваться вопросом об источниках, порождающих отраженную волну и изменение направления проходящей волны. Ответ на подобные вопросы будет получен при изучении излучения электромагнитных волн. Поэтому рассматриваемую здесь постановку задачи при первом чтении можно рассматривать как формально математическую. По этой причине мы пока не делаем никаких предположений о частотах  $\omega_1, \omega_2$  отраженной и преломленной волн при фиксированной частоте  $\omega_0$  падающей волны.

Понятно, что выписанные выше поля  $\mathbf{E}_{1,2}, \mathbf{H}_{1,2}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла, поэтому эти уравнения здесь даже не представлены.

Нам остается удовлетворить граничным условиям. Одно из них выпишем:

$$\hat{\mathbf{E}}_{0\tau} e^{i(k_{0x}x - \omega_0 t)} + \hat{\mathbf{E}}_{1\tau} e^{i(k_{1x}x + k_{1y}y - \omega_1 t)} = \hat{\mathbf{E}}_{2\tau} e^{i(k_{2x}x + k_{2y}y - \omega_2 t)}, \quad (7.41)$$

заметив, что вектор  $\mathbf{k}_0$  лежит в плоскости  $(x, z)$ . Второе условие имеет точно такую же структуру.

Эти соотношения, связывающие параметры волн, соприкасающихся на границе раздела, должны выполняться во всех точках границы и в любой момент времени. Предположим, что мы следим за фиксированной точкой границы. При этом условие (7.41) приобретает структуру

$$Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_1 t} = Ce^{-i\omega_2 t}$$

с коэффициентами  $A, B, C$ , не зависящими от  $t$ . Это равенство может выполняться для произвольного  $t$  только при равенстве частот всех трех волн

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0. \quad (7.42)$$

Аналогично, чтобы соотношения типа (7.41) при фиксированном  $t$  выполнялись во всех точках плоскости раздела, необходимо, чтобы коэффициенты при  $x, y$  во всех трех экспонентах были соответственно равны, т. е.

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \quad (7.43)$$

и  $k_{1y} = k_{2y} = 0$ . Отсюда следует, во-первых, что волновые вектора всех трех волн  $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  лежат в одной плоскости, проходящей через нормаль к плоскости раздела, т. е. в плоскости падения. Следовательно, их направления определяются углами  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ , показанными на рис. 7.9. Во-вторых, из условия (7.43) равенства проекций волновых векторов на плоскость раздела

$$k_1 \sin \varphi_1 = k_0 \sin \varphi, \quad k_2 \sin \varphi_2 = k_0 \sin \varphi$$

при учете соответствующих соотношений между  $k$  и  $\omega$

$$k_1 = k_0 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (\omega_0 / c), \quad k_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (\omega_0 / c)$$

получаются соотношения для углов падения, отражения и преломления

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \varphi_2 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \varphi,$$

первое из которых есть закон отражения, а второе — закон преломления Снелиуса. С введением показателя преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (7.44)$$

закон преломления записывают в виде

$$n_2 \sin \varphi_2 = n_1 \sin \varphi. \quad (7.45)$$

Таким образом, из единственного условия, что на границе раздела должно выполняться соотношение типа (7.41) с произвольными  $\hat{\mathbf{E}}_{0\tau}$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_{1\tau}$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_{2\tau}$ , следуют геометрические законы отражения и преломления электромагнитных волн, а также условие (7.42) равенства частот отраженной и преломленной волн частоте падающей волны.

Завершим параграф доказательством высказанного в связи с граничными условиями (7.40) утверждения о непрерывности  $B_n, D_n$ . В силу полученного равенства (7.42) поля по обе стороны границы монохроматичны и подчиняются уравнениям (7.22). Следовательно, для  $B_n = B_z$  имеем

$$B_z = -\frac{i}{\omega/c} \operatorname{rot}_z \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega/c} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Так как  $E_y$  и  $E_x$  непрерывны при переходе границы, отсюда следует непрерывность  $B_z$ . Аналогично с помощью второго уравнения (7.22) доказываем непрерывность  $D_z$ .

## 7.8. Формулы Френеля

Теперь обратимся к граничным условиям (7.40) для определения амплитуд отраженной и преломленной волн.

Представим падающую волну, в общем случае эллиптически поляризованную, в виде суперпозиции двух волн. В одной из них поле  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения, а поля  $\mathbf{V}, \mathbf{H}$  перпендикулярны к ней. Таковую волну обычно называют *ТМ-волной* или *поперечно-магнитной*. В другой, наоборот, поле  $\mathbf{E}$  перпендикулярно к плоскости падения; тогда  $\mathbf{H}, \mathbf{V}$  лежат в плоскости падения. Это *ТЕ-волна*. Понятно, что отраженная и преломленная волны имеют тот же характер поляризации, что и падающая. Это станет очевидно в ходе реализации граничных условий. Схемы полей соответствующих волн изображены на рис. 7.10,

7.11 (для ТМ и ТЕ-волн соответственно). Для всех трех ТМ-волн для положительного направления амплитуд поля  $\mathbf{H}$  принято направление оси  $y$ , а положительные направления поля  $\mathbf{E}$  указаны стрелками. Они таковы, что вектор Пойнтинга для каждой из волн направлен вдоль соответствующего волнового вектора. Аналогично выбраны направления полей для ТЕ-волн на рис. 7.11.

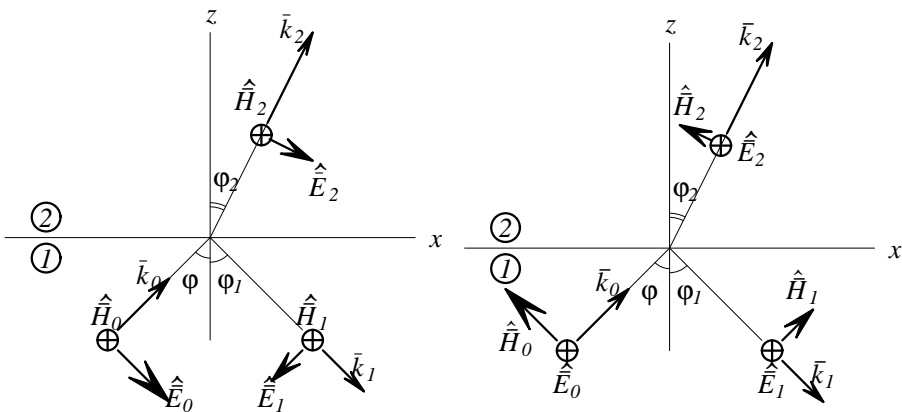


Рис. 7.10

Рис. 7.11

Граничные условия (7.40) в случае ТМ-волн приводятся к следующим соотношениям для постоянных амплитуд полей (рис.7.10):

$$\hat{E}_0 \cos \varphi - \hat{E}_1 \cos \varphi = \hat{E}_2 \cos \varphi_2,$$

$$\hat{H}_0 + \hat{H}_1 = \hat{H}_2,$$

так как в силу условий (7.42), (7.43) экспоненты для всех трех волн в плоскости  $z = 0$  равны и они сокращаются. Учитывая связь  $H = \sqrt{\epsilon/\mu}E$  между полями в плоской монохроматической волне, последнее соотношение перепишем:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (\hat{E}_0 + \hat{E}_1) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \hat{E}_2.$$

Решение полученной системы относительно  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$  приводит к искомому результату для амплитуд отраженной и преломленной волн

$$\hat{E}_1 = E_0 \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_2}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_2} \Rightarrow E_0 \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi_2}, \quad E_0 \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_2)},$$

(7.46)

$$\hat{E}_2 = E_0 \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi_2} \Rightarrow E_0 \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \varphi_2},$$

где последняя строка дополняется формулой

$$E_0 \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_2}{\sin(\varphi + \varphi_2) \cos(\varphi - \varphi_2)}.$$

Для другого типа волн (ТЕ-волны) граничные условия записываются в виде

$$\hat{E}_0 + \hat{E}_1 = \hat{E}_2,$$

$$\hat{H}_1 \cos \varphi - \hat{H}_0 \cos \varphi = -\hat{H}_2 \cos \varphi_2.$$

Они также легко разрешаются и приводят к следующим формулам:

$$\hat{E}_1 = E_0 \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_2}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_2} \Rightarrow E_0 \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi_2}, \quad -E_0 \frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)},$$

(7.47)

$$\hat{E}_2 = E_0 \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \varphi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \varphi_2} \Rightarrow E_0 \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \varphi_2}, \quad E_0 \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi_2}{\sin(\varphi + \varphi_2)}$$

(для ТЕ-волн).

Заметим, что в соотношениях (7.46), (7.47) для каждой из неизвестных ответ приведен в виде трех различных выражений, составляющих

три столбца формул. Первый столбец относится к случаю произвольных электромагнитных волн с учетом как диэлектрической, так и магнитной проницаемостей сред. Если же учесть, что в области оптического диапазона для всех сред имеем  $\mu = 1$ , то формулы несколько упрощаются; они составляют второй столбец. В качестве последнего шага полученные формулы преобразованы исключением из них отношения  $n_1/n_2$  с помощью закона преломления. (Для ТМ-волн при названном преобразовании необходимы тригонометрические тождества  $\sin \varphi \cos \varphi \pm \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \sin(\varphi \pm \varphi_2) \cos(\varphi \mp \varphi_2)$ .)

Обсуждению полученных результатов посвятим следующий параграф.

## 7.9. Характерные особенности процесса отражения-преломления

1. Предварительно определим коэффициенты отражения и прохождения волны. Для этого рассмотрим потоки энергии, определяемые вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  соответственно для падающей, отраженной и преломленной волн. Эти потоки удовлетворяют закону сохранения энергии, согласно которому энергия, переносимая к единице поверхности раздела падающей волной, должна равняться энергии, уносимой от этой поверхности отраженной и преломленной волнами, т. е., как видно из (рис. 7.12),

$$\langle S_0 \rangle \cos \varphi = \langle S_1 \rangle \cos \varphi + \langle S_2 \rangle \cos \varphi_2.$$

Отношение энергии  $\langle S_1 \rangle \cos \varphi$ , уносимой отраженной волной, к энергии  $\langle S_0 \rangle \cos \varphi$ , переносимой к границе раздела падающей волной, называется коэффициентом отражения

$$R = \frac{\langle S_1 \rangle \cos \varphi}{\langle S_0 \rangle \cos \varphi} = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle}.$$

Аналогично коэффициент прохождения есть

$$T = \frac{\langle S_2 \rangle \cos \varphi_2}{\langle S_0 \rangle \cos \varphi}.$$

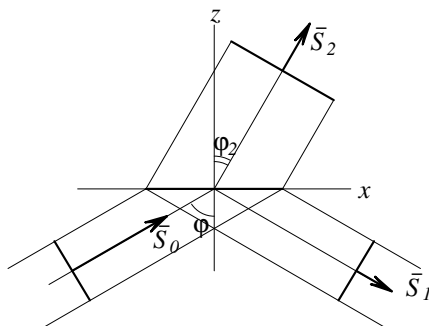


Рис. 7.12

Между собой они связаны соотношением

$$R + T = 1. \quad (7.48)$$

Как следует из соотношения (7.38),

$$\langle S_0 \rangle \sim \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} |\hat{\mathbf{E}}_0|^2, \quad \langle S_1 \rangle \sim \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} |\hat{\mathbf{E}}_1|^2, \quad \langle S_2 \rangle \sim \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} |\hat{\mathbf{E}}_2|^2$$

и, следовательно,

$$R = \frac{|\hat{\mathbf{E}}_1|^2}{|\hat{\mathbf{E}}_0|^2}, \quad T = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \frac{|\hat{\mathbf{E}}_2|^2 \cos \varphi_2}{|\hat{\mathbf{E}}_1|^2 \cos \varphi}. \quad (7.49)$$

Отсюда видно, что коэффициент отражения вычисляется просто как отношение квадратов модулей амплитуд поля  $\mathbf{E}$  в отраженной и падающей волнах. Для коэффициента прохождения такого простого выражения нет, поэтому его лучше всего определять из баланса энергии (7.48).

**2. Полное внутреннее отражение** имеет место при  $n_1 > n_2$ , т. е. при переходе из оптически более плотной среды в менее плотную. В этом случае, как видно из закона преломления (7.45), существует такой предельный угол падения  $\varphi_*$ , определяемый условием

$$n_1 \sin \varphi_* = n_2,$$

при котором угол преломления достигает значения  $\pi/2$  и преломленная волна идет параллельно границе раздела. Возникает естественный вопрос о характере этой волны при углах падения  $\varphi > \varphi_*$ . Формальный

ответ гласит, что при этом

$$\sin \varphi_2 = (n_1/n_2) \sin \varphi > 1$$

и угол преломления становится комплексным. Физически содержательный ответ получается из рассмотрения структуры одного из полей, например, электрического поля в преломленной волне

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_0 t)}$$

для рассматриваемого случая. Здесь  $x$ -компонента вектора  $\mathbf{k}_2$ , определяемая равенством (7.6), принимает значение  $k_{2x} = n_1(\omega_0/c) \sin \varphi$ , большее модуля  $|\mathbf{k}_2| = n_2(\omega/c)$ . Так как по соотношению (7.27) с учетом определения (7.44)  $k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = n_2^2(\omega_0/c)^2$ , то

$$k_{2z} = \pm i \frac{\omega_0}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}$$

становится чисто мнимой. При выборе знака «плюс» в последнем выражении имеем

$$\mathbf{E}_2(x, z, t) = \hat{\mathbf{E}}_2 e^{-|k_{2z}|z} e^{i(k_{2x}x - \omega_0 t)},$$

т. е. волну, бегущую вдоль оси  $x$ , с амплитудой, экспоненциально затухающей в перпендикулярном направлении по мере удаления от границы раздела.

Заметим, что названное «затухание» волны не обусловлено поглощением ( $\epsilon, \mu$  — вещественны). Просто в рассматриваемой ситуации во второй среде вдоль границы раздела распространяется так называемая *неоднородная плоская волна* с амплитудой, спадающей с увеличением координаты  $z$ . Почти очевидно, что усредненный поток энергии в направлении от границы раздела, обусловленный этой волной, равен нулю ( $T = 0$ ).<sup>2</sup> Это утверждение согласно балансу энергии (7.48) эквивалентно равенству  $R = 1$  для углов падения  $\varphi \geq \varphi_*$ , доказать которое предлагается читателю.

*Упражнение.* Воспользовавшись формулами для амплитуд  $\hat{E}_1$  из последних столбцов соотношений (7.46), (7.47) и тем условием, что при  $\varphi \geq \varphi_*$  имеем  $\sin \varphi_2 \geq 1$  — вещественный, а  $\cos \varphi_2$  — чисто мнимый (т. е.  $\cos^* \varphi_2 = -\cos \varphi_2$ ), показать, что  $|\hat{E}_1|^2 = |\hat{E}_0|^2$  (как для ТМ-, так и для ТЕ-волн).

<sup>2</sup>Для формального доказательства необходимо вычислить  $\langle S_{2z} \rangle$ , дополнительно выписав поле  $\mathbf{H}_2(x, z, t)$ . Последнее определяется из соотношения (7.27) с учетом комплексного  $\mathbf{k}_2 = k_{2x} \mathbf{e}_x + i|k_{2z}| \mathbf{e}_z$ .



Отсюда из соотношения (7.49) следует искомое равенство.

**3.** В противовес полному внутреннему отражению существует явление полного прохождения волны через границу раздела, имеющее место для ТМ-волны. Действительно, как видно из формулы Френеля для амплитуды отраженной волны (см. третий столбец соотношений (7.46)), при некотором угле падения, отвечающем условию

$$\varphi + \varphi_2 = \pi/2, \quad (*)$$

имеем  $\hat{E}_1 = 0$ .

Угол падения, при котором отраженная ТМ-волна не возникает, называется *углом Брюстера*. Его величина определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.50)$$

получающимся из закона преломления (7.45) при использовании равенства  $\sin \varphi_2 = \cos \varphi$ , следующего из условия (\*).

Таким образом, если эллиптически поляризованная волна падает на границу раздела под углом Брюстера, отраженная волна будет линейно поляризованной ТЕ-волной.

**4.** Отметим следующий характерный момент, связанный с так называемой потерей полуволны при отражении от оптически более плотной среды (т. е.  $n_2 > n_1$ ). При этом, как видно из третьего столбца соотношений (7.47), амплитуды отраженной  $\hat{E}_1$  и падающей  $\hat{E}_0$  ТЕ-волн отличаются знаками, причем независимо от угла падения. А так как принятые положительные направления для амплитуд поля  $\mathbf{E}$  в этих волнах совпадают (рис. 7.11), то отсюда следует, что в любой точке границы поля  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$  совершают колебания в противофазе. Именно это обстоятельство имеют в виду, когда говорят о потере полуволны при отражении.

Для ТМ-волны подобный вопрос впрямую не возникает, т. к. вектора  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$  в точках границы в этом случае не лежат на одной прямой<sup>3</sup>. В случае нормального падения, когда  $\varphi = 0$ , и, следовательно,  $\varphi_2 = 0$ , понятие «плоскость падения» теряет смысл, поэтому не имеет смысла деление на ТЕ- и ТМ-волны. При этом для амплитуд отраженной и преломленной волн справедливы *векторные соотношения*

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \hat{\mathbf{E}}_0, \quad \hat{\mathbf{E}}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \hat{\mathbf{E}}_0, \quad (7.51)$$

<sup>3</sup>Явление проявляет себя при сравнении волн, отраженных от двух поверхностей плоской пластины, см. § 11.10.

первое из которых еще раз демонстрирует потерю полуволны, о которой говорится в этом пункте.

**5. О величине коэффициента отражения.**

При нормальном падении коэффициент отражения не зависит от характера поляризации и, как следует из соотношений (7.49), (7.51),

$$R_{\perp} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

(причем не имеет значения, по которой из двух сред распространяется падающая волна). Например, при отражении от границы стекло ( $n = 1.5$ ) — воздух ( $n = 1$ ) имеем  $R_{\perp} = 0,04$ , а от границы вода ( $n = 1,33$ ) — воздух отражается всего 2% интенсивности падающей волны.

При наклонном падении коэффициенты отражения для ТЕ- и ТМ-волн различны и согласно формулам (7.46), (7.47)

$$R_{TM} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \varphi_2)}, \quad R_{TE} = \frac{\sin^2(\varphi - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi + \varphi_2)}.$$

Для случая падения из воздуха на стекло зависимости  $R_{TM}(\varphi)$ ,  $R_{TE}(\varphi)$  представлены на рис. 7.13. Видно, что при малых углах падения ( $\varphi \leq 10^\circ$ ) оба коэффициента практически равны  $R_{\perp}$ . При увеличении угла падения кривые расходятся. Коэффициент  $R_{TM}$  сначала спадает и достигает нулевого значения при угле Брюстера, а затем монотонно растет, стремясь к значению 1 при угле  $\pi/2$  (скользящее падение). Поведение  $R_{TE}$  монотонно.

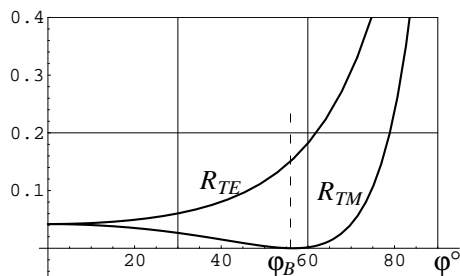


Рис. 7.13

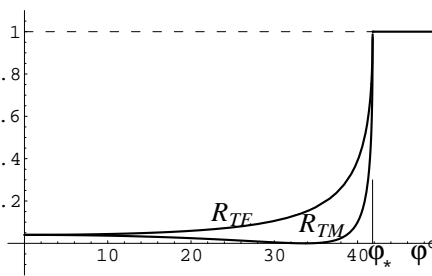


Рис. 7.14

Для случая прохождения света из стекла в воздух (из оптически более плотной среды в менее плотную) рассматриваемые зависимости

изображены на рис. 7.14. Видно, что переход от малых значений  $R$  к единице при приближении угла  $\varphi$  к предельному углу происходит весьма резко.

## 7.10. Просветление оптики. О диэлектрических зеркалах

1. Хотя коэффициент отражения от стекла, как мы видели, невелик, во многих сложных оптических системах с большим числом преломляющих поверхностей даже при малом  $R$  в итоге накапливаются значительные потери света. В этой связи возникает задача снижения интенсивности отраженной волны или, как часто говорят, «просветления оптики».

Конструктивно эта цель достигается с помощью тонкого диэлектрического слоя, наносимого на поверхность отражающей среды. Схематически (рис. 7.15) ситуацию изобразим в виде плоского слоя с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ , примыкающего к отражающему полупространству с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_3$ . Полупространству  $z < 0$ , откуда падает волна, для общности также припишем диэлектрические свойства  $\epsilon_1$ , хотя в конкретной задаче часто  $\epsilon_1 = 1$ . Пусть слева на эту систему падает плоская монохроматическая волна, для простоты, по нормали. Требуется найти амплитуду отраженной волны и выяснить условия, при которых интенсивность этой волны минимальна.

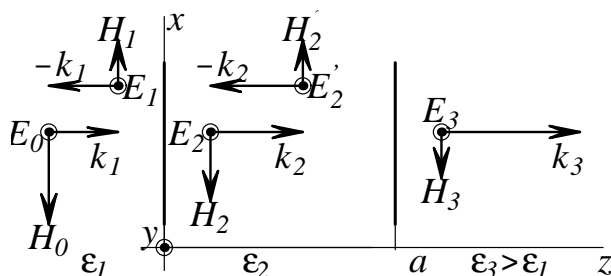


Рис. 7.15

Для решения задачи нам придется рассмотреть всю систему волн, возникающих в этом процессе: кроме интересующей нас отраженной

волны, это две волны в слое с толщиной  $a$  и уходящая волна в среде 3. Изобразим их на рис. 7.15 вместе с принятыми за положительные направлениями амплитуд их полей. Рисунок подразумевает, что электрическое поле в соответствующих волнах задается следующими выражениями:

$$\begin{array}{l} E_0 e^{i(k_1 z - \omega t)} \mathbf{e}_y, \\ \hat{E}_1 e^{i(-k_1 z - \omega t)} \mathbf{e}_y \\ \text{(в области } z < 0) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \hat{E}_2 e^{i(k_2 z - \omega t)} \mathbf{e}_y, \\ \hat{E}'_2 e^{i(-k_2 z - \omega t)} \mathbf{e}_y \\ \text{(в слое } 0 < z < a) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \hat{E}_3 e^{i(k_3 z - \omega t)} \mathbf{e}_y \\ \\ \text{(в области } z > a. \end{array} \right.$$

(Выбором начала отсчета времени амплитуду одной из волн всегда можно сделать вещественной. Здесь таковой принята амплитуда падающей волны, и она обозначена в виде  $E_0$  без «шляпки».) Магнитное поле в каждой из этих волн характеризуется комплексной амплитудой  $\hat{H} = \sqrt{\epsilon} \hat{E}$ , связанной с амплитудой поля  $\mathbf{E}$ .

Для определения неизвестных амплитуд имеем граничные условия непрерывности тангенциальных компонент полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . На границе  $z = 0$  это:

$$\begin{array}{l} 1) E_0 + \hat{E}_1 = \hat{E}_2 + \hat{E}'_2, \\ 2) \sqrt{\epsilon_1}(\hat{E}_1 - E_0) = \sqrt{\epsilon_2}(\hat{E}'_2 - \hat{E}_2). \end{array}$$

На границе  $z = a$ :

$$\begin{array}{l} 3) \hat{E}_2 e^{ik_2 a} + \hat{E}'_2 e^{-ik_2 a} = \hat{E}_3 e^{ik_3 a}, \\ 4) \sqrt{\epsilon_2}(-\hat{E}_2 e^{ik_2 a} + \hat{E}'_2 e^{-ik_2 a}) = -\sqrt{\epsilon_3} \hat{E}_3 e^{ik_3 a}. \end{array}$$

Обращаем внимание: хотя первые два условия, относящиеся к границе  $z = 0$ , похожи на условия, использовавшиеся при выводе формул Френеля, их невозможно разрешить, т. к. здесь присутствует «лишняя» неизвестная  $\hat{E}'_2$ . Только учет граничных условий 3), 4) позволяет замкнуть задачу.

На этом *физическая постановка задачи и ее математическая формулировка* завершены. Если разрешить эти четыре уравнения (что достаточно громоздко), то ответ для отраженной волны можно привести к такому виду:

$$\hat{E}_1 = E_0 \frac{\rho_{12} + \rho_{23} e^{2ik_2 a}}{1 + \rho_{12} \rho_{23} e^{2ik_2 a}}. \quad (7.52)$$

Здесь  $\rho_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ ,  $\rho_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$  — амплитудные коэффициенты

*отражения*, получаемые из формул Френеля для границы раздела двух полупространств:  $\rho_{12}$  — для перехода из  $n_1$  в  $n_2$  (см. первую формулу (7.51)) и  $\rho_{23}$  — для перехода из  $n_2$  в  $n_3$ . (Заметим, что введенный в предыдущем параграфе коэффициент  $R$  можно было бы назвать энергетическим коэффициентом отражения. Между собой они связаны соотношением  $R = \rho^2$ .)

2. Выписанную систему уравнений решать мы не будем. Вместо этого формулу (7.52) получим с использованием другого подхода, основанного на рассмотрении многократных отражений-преломлений на границах раздела, т. к. этот подход физичен и поэтому полезен.

Для наглядности проиллюстрируем этот подход для угла падения, отличного от нуля (рис. 7.16).

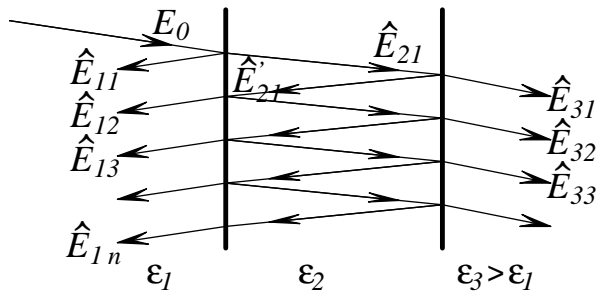


Рис. 7.16

Здесь волна с амплитудой  $E_0$  достигает границы, частично отражается и уходит в виде монохроматической волны с амплитудой

$$\hat{E}_{11} = E_0 \rho_{12},$$

а частично проходит в среду 2 в виде волны с амплитудой  $\hat{E}_{21} = E_0 \tau_{12}$ . Эта последняя волна доходит до границы 2–3, частично отражаясь порождает волну, на рисунке отмеченную как  $E'_{21}$  (ее амплитуда без учета набега фазы равна  $E_{21} \rho_{23}$ ), и дальше частично выходит в среду 1 в виде отраженной волны  $E_{12}$ , амплитуда которой равна

$$\hat{E}_{12} = E_0 \tau_{12} \rho_{23} \tau_{21} e^{2ik_2 a}.$$

Здесь фазовый множитель  $\exp(2ik_2 a)$  обусловлен суммарным набегом фазы при прохождении волны по слою толщины  $a$  вперед и назад, а

$$\tau_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad \tau_{21} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

— амплитудные коэффициенты прохождения границы 1—2 слева направо (вторая формула (7.51)) и справа налево (по аналогии).

Нетрудно заметить, что амплитуды последующих отраженных волн  $E_{13}, E_{14}, \dots$  определяются регулярным образом:

$$\hat{E}_{13} = \hat{E}_{12}q, \quad \hat{E}_{14} = \hat{E}_{13}q \dots, \quad \text{где } q = \rho_{21}\rho_{23}e^{2ik_2a}.$$

Таким образом, единая отраженная волна, выше записывавшаяся как  $\hat{E}_1 \exp(i(-kz - \omega t))$ , может быть представлена в виде суммы бесконечного набора волн с одинаковыми  $\mathbf{k}, \omega$  и с амплитудами  $\hat{E}_{1n}$ , так что

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_{11} + \hat{E}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \hat{E}_{11} + \hat{E}_{12} \frac{1}{1-q}.$$

Отсюда после подстановки значения  $q$  и подчеркнутых выражений для  $\hat{E}_{11}, \hat{E}_{12}$  получаем

$$\hat{E}_1 = E_0\rho_{12} + E_0\tau_{12}\tau_{21}\rho_{23} \frac{e^{2ik_2a}}{1 - \rho_{21}\rho_{23}e^{2ik_2a}}.$$

Дальше остается заметить, что  $\rho_{21} = -\rho_{12}$ , а произведение

$$\tau_{12}\tau_{21} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

заменить на  $(1 - \rho_{12}^2)$ , и тогда предыдущее выражение приводится к нужному виду (7.52).

**3.** Выясним условия, при которых отраженная волна отсутствует, т. е.  $\hat{E}_1 = 0$ . Так как для прозрачных диэлектриков коэффициенты отражения  $\rho_{12}, \rho_{23}$  — вещественны, числитель дроби (7.52) может быть обращен в нуль только при условии, что фазовый множитель  $\exp(2ik_2a)$ , зависящий от толщины пленки  $a$ , является вещественным. Следовательно, существуют два варианта значений  $a$ , при которых амплитуда отраженной волны равняется нулю. Если  $\exp(2ik_2a) = 1$ , что имеет место при

$$a_m = m \frac{\lambda_2}{2},$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots, \lambda_2$  — длина волны в материале пленки, искомая амплитуда сводится к выражению

$$\hat{E}_1 = E_0 \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3},$$

не содержащему  $n_2$ . Отсюда видно, что, если  $n_1 = n_3$ , т. е. если диэлектрическая пленка с произвольным показателем преломления и с толщиной, кратной половине длины волны  $\lambda_2$ , находится в однородной среде, падающая волна проходит через пленку без отражения. Но этот случай к вопросу о просветленной оптике не относится.

Второй вариант, когда  $\exp(2ik_2a) = -1$  и

$$a_m = \frac{\lambda_2}{4}(1 + 2m), \quad (7.53)$$

имеет непосредственное отношение к рассматриваемому вопросу. При этом требование  $\hat{E}_1 = 0$  сводится к условию  $\rho_{12} = \rho_{23}$ , эквивалентному

$$n_2^2 = n_1 n_3, \quad \text{т. е. } \epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}. \quad (7.54)$$

Таким образом, если толщина пленки диэлектрика равна четверти длины волны (длины волны в диэлектрике, а не в окружающей среде), а диэлектрическая проницаемость определяется приведенной формулой, то такая пленка обеспечивает полное прохождение волны без отражения. (Здесь мы говорим о четвертьволновой пленке, имея в виду минимальную толщину.)

Обычно прозрачный диэлектрик с точно нужным значением показателя преломления не существует; например, для стекла с  $n_3 = 1,52$  необходимое  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3} = 1,23$ , а в качестве покрытия используют криолин ( $n_2 = 1,35$ ) или фтористый магний ( $n_2 = 1,38$ ) и добиваются значительного ослабления отражения.

#### 4. Дополнительные замечания

а. Если учесть, что  $\rho_{12}, \rho_{23} \ll 1$ , фактически нет необходимости принимать во внимание весь бесконечный набор отраженных, преломленных волн. Вполне достаточно ограничиться двумя волнами  $E_{11}, E_{12}$ , отраженными соответственно от передней и задней границ слоя. Это дает практически точный результат. Действительно,

$$\hat{E}_{11} + \hat{E}_{12} = E_0(\rho_{12} + \tau_{12}\tau_{21}\rho_{23}e^{2ik_2a})$$

с учетом

$$\tau_{12}\tau_{21} = 1 - \rho_{12}^2$$

при малости коэффициентов отражения совпадает с выражением (7.52). Процедуру суммирования с учетом бесконечного числа волн мы проделали, имея в виду последующие приложения.

б. Отсюда понятно, почему четвертьволновый слой из материала, показатель преломления которого больше  $n_1$ , но меньше показателя преломления отражающей среды  $n_3$ , обеспечивает ослабление отражения. Это происходит из-за того, что отраженные волны  $E_{11}$  и  $E_{12}$  находятся в противофазе: отражения от передней и задней границ хотя и происходят «одинаково» (с потерей полуволны), но вторая из волн за счет «лишнего» пути, равного  $\lambda_2/2$ , проходимого в слое, отстает от первой по фазе на  $\pi$ .

в. Не лишне обратить внимание еще на одно обстоятельство: на рис. 7.16 стрелками изображены не «лучи», как иногда пишут, а направления волновых векторов соответствующих волн. Все волны, рассматриваемые здесь, — это монохроматические плоские волны, в поперечном направлении не «тонкие», а наоборот, безграничные.

### 5. Об идее диэлектрических зеркал

Если на поверхность стекла с показателем преломления  $n_0$  нанести слой прозрачного диэлектрика толщины  $\lambda_2/4$  с показателем преломления  $n > n_0$ , то отражательная способность поверхности возрастает, т. к. в этом случае, как понятно из предыдущего анализа, волны  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  синфазны и усиливают друг друга. Так, покрывая стекло слоем  $\lambda/4$  из сернистого цинка ( $n = 2,3$ ), обеспечивают  $R \simeq 0,3$ . Более высокие коэффициенты отражения достигаются за счет многослойных покрытий. Например, семь слоев из сернистого цинка и криолита ( $n = 1,35$ ) приводят к  $R \simeq 0,9$ . Для получения  $R \simeq 0,99$  (такие зеркала нужны для лазерных резонаторов) надо нанести 11 — 13 слоев.

*Упражнение.* Как результат суммирования волн  $E_{31}, E_{32}, \dots$  получить выражение

$$\hat{E}_3 = E_0 \frac{e^{ik_2 a} \tau_{12} \tau_{23}}{1 - \rho_{21} \rho_{23} e^{2ik_2 a}}$$

для комплексной амплитуды прошедшей волны. Убедиться, что при выполнении условий (7.53), (7.54) усредненные потоки энергии прошедшей и падающей волн  $\langle S_3 \rangle$ ,  $\langle S_0 \rangle$  равны между собой. Это будет другим доказательством отсутствия отраженной волны при выполнении названных условий.



## 7.11. Предварительно о монохроматической сферической волне

В последующих главах при обсуждении интерференции и дифракции света нам потребуются элементарные представления о названных волнах. Данный параграф предназначен для решения этой узкой задачи. Начнем его с рассмотрения волнового уравнения (7.25)

$$\Delta \hat{f} + k^2 \hat{f} = 0$$

для некоторой скалярной физической величины и построения для нее одномерного решения в виде функции  $\hat{f}(r)$ , зависящей только от одной сферической координаты  $r$ . Оператор Лапласа в сферических координатах для функции от одной переменной

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\hat{f}}{dr} \right)$$

можно выразить через вторую производную от произведения  $r\hat{f}$

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\hat{f}).$$

Тогда уравнение (7.25) приобретает вид уравнения колебаний

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\hat{f}) + k^2 (r\hat{f}) = 0,$$

одно из двух решений которого  $e^{\pm ikr}$  отвечает сферической волне, расходящейся от источника, расположенного в начале координат:

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{r} e^{ikr}, \quad f(r, t) = \hat{f}(r) e^{-i\omega t} = \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad (7.55)$$

Подобное решение физически содержательно в акустике, так как звуковые волны — продольные, характеризуются скалярным параметром (либо давлением, либо плотностью среды) и допускают существование сферически симметричных волн с амплитудой, спадающей как  $1/r$  по мере удаления от источника. Для электромагнитных волн (поперечных)

сферически симметричное решение нереализуемо, хотя «точечные» источники существуют. В качестве такого источника можно рассматривать, например, переменный электрический диполь  $\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}$ . Его излучение в сферической системе координат (рис. 7.17) с центром в точке расположения диполя, как будет показано в § 13.4, характеризуется полями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, t) &= E_* \frac{a}{r} e^{i(kr - \omega t)} \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{B}(r, \theta, t) &= E_* \frac{a}{r} e^{i(kr - \omega t)} \sin \theta \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \quad (7.56)$$

где  $a$  — некоторый характерный размер,  $E_*$  — масштаб поля, которые будут уточнены там же. Отсюда видно, что как и в сферически симметричном решении (7.55), зависимость полей (7.56) от координаты  $r$  задается множителем  $(1/r) \exp(ikr)$ . Отличие заключается в наличии угловой зависимости, выражаемой множителем  $\sin \theta$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый от направления дипольного момента излучателя. В каждой точке пространства поля  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  по величине равны и по направлениям согласованы с вектором  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$  точно так, как в плоской монохроматической волне.

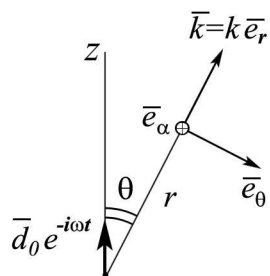


Рис. 7.17

Только при этом следует заметить, что, хотя экспоненты с показателями  $i(kr - \omega t)$  и  $i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , входящие в определения полей соответственно в сферической и плоской монохроматических волнах, по форме схожи, но по содержанию они весьма различны. В первой из них  $kr$  есть произведение волнового числа на расстояние от фиксированного источника до точки наблюдения. Второе содержит скалярное произведение постоянного, неизменного в пространстве волнового вектора  $\mathbf{k}$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  точки наблюдения, отсчитываемого от произвольного начала координат.

## 7.11. Предварительно о монохроматической сферической волне 47

Дополнительное замечание. Для небольшой области наблюдения с характерным размером, намного меньшим расстояния до точечного источника, множитель  $\sin \theta \mathbf{e}_\theta$ , входящий в выражения (7.56), можно рассматривать приближенно постоянным. Тогда электрическое поле сферической монохроматической волны для такой малой области можно представить равенством

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0 \frac{a}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (7.57)$$

где  $\mathbf{E}_0 = E_* \sin \theta \mathbf{e}_\theta$ .

## Глава 8

# ФУРЬЕ-РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предыдущей главе, открывающей изучение волновых процессов в этой книге, основное внимание было сосредоточено на рассмотрении плоских монохроматических волн. Как мы убедимся ниже, исследования произвольных электромагнитных процессов с полями  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  в решающей степени опираются на представление процесса в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, или, говоря другими словами, на *фурье-представления (спектральные представления) электромагнитного поля*. Необходимость перехода к подобному представлению становится очевидной, если учесть, что электромагнитные процессы развиваются, как обычно, в присутствии материальных сред, реакция которых на электромагнитные поля однозначно определяется только применительно к отдельным фурье-компонентам. Заметим, что спектральные представления лежат в основе не только теоретических, но и экспериментальных методов исследования волновых процессов.

Теория преобразования Фурье изучается в математических курсах. Здесь мы ограничимся обсуждением лишь некоторых основных моментов названной теории, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемому в данном курсе кругу вопросов.

## 8.1. Формулы преобразования Фурье

Под фурье-разложением понимают разложение исследуемой функции на гармонические составляющие. Например, периодическую функцию с периодом  $T$  можно представить в виде ряда Фурье, т. е. в виде бесконечной суммы гармоник с частотами, отстоящими друг от друга на фиксированную величину  $\omega_0$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T}), \quad \text{причем } f_n = \int_0^T \frac{f(t)}{\sqrt{T}} e^{in\omega_0 t} dt.$$

(Здесь использована симметричная форма записи рассматриваемого ряда.)

*Непериодическая функция* также может быть представлена в виде набора гармоник, но при этом частоты не дискретны, а заполняют некоторый участок числовой оси, и функция представляется интегралом Фурье. Формулы преобразования читателю известны. В симметричном виде они имеют вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.1)$$

Здесь  $f(t)$  изображает зависимость некоторой физической величины от времени, а  $f(\omega)$  — фурье-образ этой функции. Для обозначения соответствия (8.1) между функциями  $f(t)$  и  $f(\omega)$  удобно использовать символическую запись  $f(t) \doteq f(\omega)$ , означающую: «функции  $f(t)$  соответствует фурье-образ  $f(\omega)$ ». Фурье-образ  $f(\omega)$  часто называют *спектральной плотностью* физической величины  $f(t)$ .

Отметим, что если функция  $f(t)$  представима в виде ряда Фурье, то говорят, что  $f(t)$  обладает *дискретным спектром*, а в случае интеграла Фурье — *сплошным спектром*. Хотя не следует упускать из виду, что ряд формально также может быть изображен в виде интеграла Фурье; только при этом спектральная плотность

$$f(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{T}} \delta(\omega - n\omega_0)$$

будет состоять из бесконечного набора дельта-функций.

До сих пор мы говорили только о функциях времени и их разложении на временные гармоники. Аналогично и пространственные функции

можно разложить на соответствующие гармоники. Возьмем для начала функцию  $f(x)$  от одной пространственной координаты  $x$ . Для нее формулы преобразования Фурье представим в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (8.2)$$

Обращаем внимание, что знаки в показателях экспонент в этих формулах противоположны соответствующим знакам при разложении (8.1) функции времени. Удобство такого соглашения станет понятным чуть позже при разложении функций от координат и времени на монохроматические плоские волны.

Строгий вывод формул (8.1) дается в математических курсах. А мы здесь проделаем свой «вывод», преследуя при этом цель напомнить некоторые факты, относящиеся к дельта-функции. И в качестве первого шага получим фурье-представление этой функции. Для этого обратимся к величине, определяемой интегралом с бесконечными пределами

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega,$$

понимаемым в смысле главного значения, т. е.

$$I(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} I(\Omega, t),$$

$$\text{где } I(\Omega, t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{it} = 2\Omega \left( \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} \right).$$

Процесс вычисления предела функции  $I(\Omega, t)$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  приводит нас к дельта-функции  $\delta(t)$  как пределу некоторой колоколообразной функции. В данном случае мы имеем функцию

$$y = \text{sinc}(t) = \sin t/t$$

(для отношения синуса к его аргументу часто используется специальное обозначение *sinc*), над которой предусматриваются преобразования сжатия (по оси абсцисс) и растяжения (по оси ординат) в определенное число раз  $\Omega$ :

$$I(\Omega, t) = 2\Omega \text{sinc}(\Omega t).$$

(На рис. 8.1 функция  $y(t)$  нанесена вместе с  $y(\Omega t)$  для значения  $\Omega = 4$ .) При этом площадь под кривой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega \text{sinc}(\Omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

остаётся неизменной, так что в пределе  $\Omega \rightarrow \infty$  функция  $I(\Omega, t)$  переходит в  $2\pi\delta(t)$ .

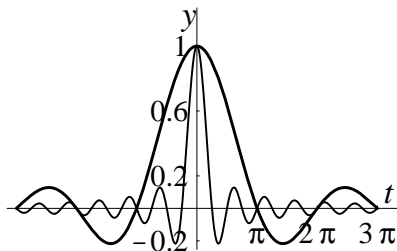


Рис. 8.1

Таким образом, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t).$$

Эту формулу можно обобщить и в качестве важного побочного результата зафиксировать в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} dt &= 2\pi\delta(\omega - \omega'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega &= 2\pi\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Последнюю формулу представим в форме фурье-разложения дельта-функции

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega\tau} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (8.4)$$

откуда следует, что  $\delta(t - \tau) \doteq (1/\sqrt{2\pi})e^{i\omega\tau}$ .

Для завершения «вывода» рассматриваемых формул (8.1) вспомним, что любую функцию можно представить в виде суммы дельтообразных функций

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Отсюда с использованием равенства (8.4) получаем соотношение

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega\tau} e^{-i\omega t} d\omega d\tau =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau e^{-i\omega t} d\omega,$$

содержащее, по сути, обе формулы фурье-преобразования.

Параграф завершим напоминанием, что операция фурье-разложения допускает геометрическую аналогию с разложением вектора по ортогональным координатам. Только в данном случае вместо  $n$ -мерного евклидова пространства имеем бесконечномерное пространство функций, интегрируемых с квадратом на действительной прямой (гильбертово пространство), со скалярным произведением  $(f, q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot q^*(t) dt$ . Эту аналогию здесь приведем в виде таблицы из монографии Мешкова-Чирикова с небольшими комментариями:

	Векторное пространство	Гильбертово пространство
Вектор	$\mathbf{r}$	$f(t)$
Базис	$\mathbf{e}_n$	$(1/\sqrt{2\pi})e^{-i\omega t}$
Ортонормированность базиса	$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{nk}$	$(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} dt =$ $= \delta(\omega - \omega')$
Разложение по базису	$\mathbf{r} = \sum x_n \mathbf{e}_n$	$f(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$
Компоненты вектора	$x_n = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n)$	$f(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$
Скалярное произведение векторов	$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 =$ $= \sum x_{1n} x_{2n}$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2^*(\omega) d\omega$

Все входящие сюда формулы, кроме последней, содержатся в соотношениях (8.1), (8.3), а равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2^*(\omega) d\omega \quad (8.5)$$

из последней строки таблицы получается, если в интеграле его левой



части функцию  $f_2^*(t)$  заменить фурье-представлением, а затем в двумерном интеграле поменять порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(\omega)e^{i\omega t} d\omega dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{i\omega t} dt \cdot f_2^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega)f_2^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Из равенства (8.5) следует утверждение, в математике называемое *теоремой Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega \quad (8.6)$$

о равенстве квадрата длины вектора сумме квадратов его ортогональных компонент.

Соотношение (8.6) имеет простой физический смысл. Если, к примеру, под функцией  $f(t)$  понимать напряженность электрического поля в фиксированной точке пространства от проходящей через эту точку импульсной электромагнитной волны, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt$$

оказывается пропорционален суммарной энергии электромагнитной волны, прошедшей через единичную площадку в окрестности данной точки. С другой стороны, согласно равенству (8.6), та же самая величина (энергия) равна интегралу по всем частотам от функции  $|E(\omega)|^2$ . Это означает, что  $|E(\omega)|^2$  описывает распределение энергии рассматриваемого процесса по частотам. Поэтому квадрат модуля спектральной плотности часто называют *спектральной плотностью энергии*.

Имея в виду, что для вещественной функции модуль спектральной плотности является четной функцией частоты  $\omega$  (см. свойство (8.9)), энергетическое соотношение (8.6) целесообразно представить в виде равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega, \quad (8.7)$$

содержащего распределение энергии только по положительным частотам.

## 8.2. Некоторые характерные случаи фурье-преобразования

**1. Спектр вещественной функции.** Из формул (8.1) видно, что функция, описывающая некоторый физический процесс, в своем составе имеет гармоники, соответствующие и отрицательным частотам. Это кажется странным, если иметь в виду, что спектральный состав физической величины есть не только результат математического преобразования, а он определяется физическими методами с помощью различных фурье-анализаторов. При этом, естественно, ни о каких отрицательных частотах речь идти не может. Это кажущееся противоречие снимается, если заметить, что, хотя в соответствующей формуле (8.1) интеграл распространяется и на область отрицательных частот, фактически спектральная плотность  $f(-\omega)$  на частоте  $-\omega$  однозначно определяется значением  $f(\omega)$ . Справедливо следующее утверждение: если

$$f(t) = f^*(t) \quad (8.8)$$

(т. е.  $f(t)$  — вещественная функция), то

$$f(-\omega) = f^*(\omega) \quad (8.9)$$

и, следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [f(\omega)e^{-i\omega t} + f^*(\omega)e^{i\omega t}]d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\text{Re} \int_0^\infty f(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

Для доказательства равенства (8.9) достаточно в условии (8.8) перейти к фурье-представлениям функций  $f(t)$ ,  $f^*(t)$ , а затем осуществить замену переменной интегрирования и прийти к равенствам

$$\int_{-\infty}^\infty f(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^\infty f^*(\omega')e^{i\omega' t} d\omega' = \int_{-\infty}^\infty f^*(-\omega)e^{-i\omega t} d\omega,$$

подтверждающим рассматриваемый результат.

Таким образом, фурье-образ вещественной функции в общем случае представляет комплексную функцию, удовлетворяющую ограничению (8.9). А вот спектры четных и нечетных вещественных функций обладают более определенными свойствами, которые сформулируем в качестве самостоятельного задания.

*Упражнение.* Показать, что

$$\text{если } f(-t) = f(t) = f^*(t), \text{ то } f(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt -$$

четная вещественная функция;

(8.10)

$$\text{если } f(-t) = -f(t) = -f^*(t), \text{ то } f(\omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt -$$

чисто мнимая нечетная функция.

**2. Спектр сдвинутого сигнала.** Пусть некоторый процесс, описываемый функцией  $f(t)$ , характеризуется фурье-образом  $f(\omega)$ . Как изменится спектр, если *тот же процесс* повторить с некоторым сдвигом по времени, как показано на рис. 8.2? Иными словами, если  $f(t) \doteq f(\omega)$ , то чему равен  $F(\omega) \doteq F(t) = f(t - T)$ ?

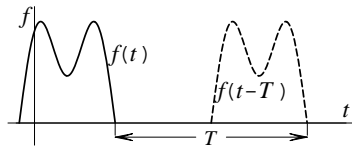


Рис. 8.2

О модуле  $|F(\omega)|$  ответ можно «нащупать» без вычислений из следующих соображений. Очевидно, что распределение энергии процесса по частотам, определяемое согласно теореме Парсеваля (8.6) модулем спектральной плотности, не должно зависеть от выбора начала отсчета времени. Отсюда следует ожидать, что для модулей спектральной плотности справедливо соотношение  $|F(\omega)| = |f(\omega)|$ .

Проведем вычисление:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - T) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega(T+t')} dt' = e^{i\omega T} f(\omega).$$

Полученный результат

$$f(t - T) \doteq e^{i\omega T} f(\omega), \quad (8.11)$$

подтверждающий равенство  $|F(\omega)| = |f(\omega)|$ , прокомментируем, используя для обозначения процесса и описывающей этот процесс функции  $f(t)$  краткий термин «сигнал»: *сдвинутому на отрезок  $T$  сигналу*

соответствует фурье-образ первоначального сигнала, умноженный на фазовый множитель  $e^{i\omega T}$ .

Заметим, что в случае фурье-преобразования (8.2) по пространственной координате аналогичный результат для сдвинутого сигнала имеет вид

$$f(x - a) \doteq e^{-ika} f(k).$$

**3. Спектр модулированного сигнала.** Так как формулы преобразования (8.1) составляют симметричную пару, очевидно, что любая теорема теории спектров имеет парную (обратную) теорему, получаемую из данной простой формальной заменой переменной  $t$  на переменную  $\omega$  и функции времени — на соответствующую спектральную плотность. Рассматриваемое в данном пункте утверждение

$$f(\omega - \omega_0) \doteq e^{-i\omega_0 t} f(t) \quad (8.12)$$

является обратным по отношению к результату (8.11) и констатирует, что *модулированному сигналу*  $F(t) = f(t)e^{-i\omega_0 t}$  *соответствует спектр огибающей, смещенный на несущую частоту*  $\omega_0$ .

**4. Спектр сигнала,  $N$  раз повторенного с определенным периодом.** Здесь речь идет о спектре функции

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t - nT),$$

представляющей собой результат наложения отдельных импульсов, «выпадающих» через определенный период, как схематически показано на рис. 8.3 для конкретного значения  $N = 4$ , причем выбран тот случай, когда период повторения  $T$  больше продолжительности отдельного сигнала и рассматриваемый процесс имеет вид периодической последовательности отдельных импульсов.

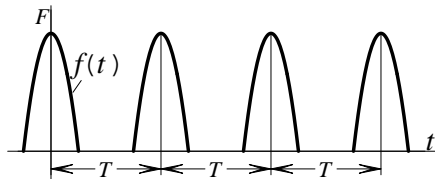


Рис. 8.3

В силу линейности фурье-преобразований (спектр суммы равен сумме

спектров) и свойства (8.11) для спектра сдвинутого сигнала искомый результат

$$F(\omega) = f(\omega) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\omega T} = f(\omega) \frac{e^{i\omega NT} - 1}{e^{i\omega T} - 1}$$

принимает вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(t - nT) \doteq e^{i\omega(N-1)T/2} f(\omega) \left( \frac{\sin N\omega T/2}{\sin \omega T/2} \right). \quad (8.13)$$

Фазовый множитель полученного выражения выбором начала отсчета времени всегда может быть обращен в единицу и поэтому не является существенным. Последний множитель, называемый *интерференционным*, определяет характерную форму суммарного спектра, которая ниже продемонстрирована на примерах. А пока в виде графиков представим функцию

$$Y_N(x) = \left| \frac{\sin Nx}{\sin x} \right|,$$

соответствующую интерференционному множителю. Эта функция определена на всей числовой оси и характеризуется главными максимумами в точках  $x_m = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), равными  $N$ , и побочными максимумами (в количестве  $N - 2$  между двумя главными максимумами). График на рис. 8.4 соответствует  $N = 4$ , а, чтобы увидеть характер изменения функции при увеличении  $N$ , на рис. 8.5 дано изображение для  $N = 10$ . Заметим, что в последующем (при изучении интерференции и дифракции) интерес будет представлять случай  $N \gg 1$  (порядка  $10^4 - 10^5$ ).

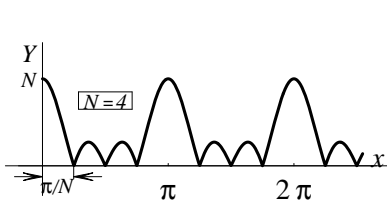


Рис. 8.4

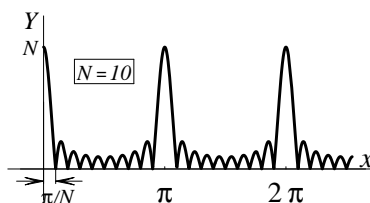


Рис. 8.5

### 5. Спектр свертки. Для получения спектра функции

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) E(t - \tau) d\tau$$

один из сомножителей под интегралом, например,  $E(t - \tau)$ , заменим фурье-представлением, а затем, поменяв порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} e^{-i\omega t} d\omega d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) E(t - \tau) d\tau \doteq \sqrt{2\pi} f(\omega) E(\omega). \quad (8.14)$$

### 8.3. Соотношение неопределенности

Известно, что между длительностью сигнала и шириной его спектра существует определенная зависимость, справедливая при любой форме сигнала. Именно эту зависимость обозначают термином «соотношение неопределенности». Сначала мы к нему придем из исследования примеров, а затем покажем физический смысл получаемого соотношения. Отметим сразу, что наиболее корректно принцип неопределенности и соотношения неопределенностей вводятся в квантовой механике. В нашем курсе мы ограничиваемся рассмотрением названных соотношений на языке фурье-преобразований.

**Пример 1. Спектр прямоугольного импульса поля.** Пусть поле в некоторой точке пространства описывается ступенчатой функцией

$$E_1(t) = \begin{cases} E_0 = \text{Const} & \text{при } |t| < \tau/2, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Фурье-образ этой функции

$$E_1(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}}{i\omega}$$

является вещественной и, в соответствии со свойством (8.10), четной функцией частоты  $\omega$

$$E_1(\omega) = \frac{E_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega\tau/2).$$

Для значений  $\omega \geq 0$ , где она имеет смысл, представлена графически на рис. 8.6.

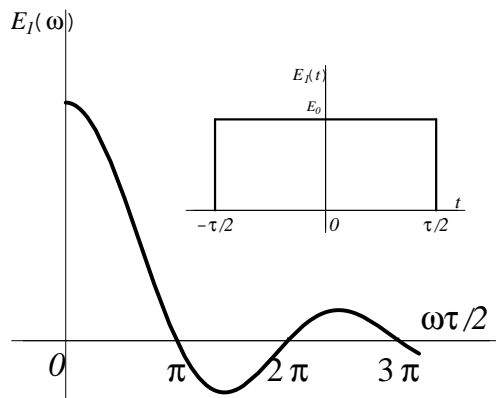


Рис. 8.6

В этом примере продолжительность импульса вполне определена. Ширина спектра не совсем однозначна, но допустимо в качестве  $\Delta\omega$  принять полосу от  $\omega = 0$ , где  $E_1(\omega)$  максимальна, до первого нуля функции  $E_1(\omega)$ , т. е.  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ , т. к. данный участок представляет главную энергонесущую часть спектра. Отсюда видно, что чем продолжительнее импульс, тем уже спектр: между собой они связаны соотношением  $\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$ . В частности, при  $\tau \rightarrow \infty$  имеем  $\Delta\omega \rightarrow 0$  и, как следует из сказанного в § 8.1. о дельта-функции как пределе дельтаобразной,  $E_1(\omega) \rightarrow \sqrt{2\pi} E_0 \delta(\omega)$ .

**Пример 2. Спектр немонохроматической волны в виде отрезка синусоиды.** Пусть в фиксированной точке пространства электрическое поле этой волны меняется как

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \sin \omega_0 t & \text{при } |t| \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (8.15)$$

Пусть  $\tau = N(2\pi/\omega_0)$ , т. е. отрезок содержит  $N$  периодов синусоиды. Пространственная картина волны, соответствующая полю (8.15) представляет собой *цуг синусоидальных волн* длины  $\lambda = c(2\pi/\omega_0)$ , имеющий конечную протяженность  $l = c\tau$ . Это поле можно рассматривать как пример модулированного сигнала с несущей частотой  $\omega_0$ , огибающей

которого является рассмотренный выше прямоугольный импульс  $E_1(t)$ , т. е.

$$E(t) = E_1(t) \sin \omega_0 t = (1/2i)(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})E_1(t).$$

Следовательно, как следствие утверждения (8.12), спектральная плотность

$$E(\omega) = (1/2i)[E_1(\omega + \omega_0) - E_1(\omega - \omega_0)] = (i/2)[E_1(\omega - \omega_0) - E_1(\omega + \omega_0)]$$

представляет собой результат переноса функции  $E_1(\omega)$  вправо и влево на несущую частоту  $\omega_0$  с умножением на  $i/2$  и  $-i/2$ . Таким образом, данной вещественной функции  $E(t)$  соответствует чисто мнимый фурье-образ, удовлетворяющий условию (8.10),

$$E(\omega) = \frac{i}{2} \frac{E_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} [\text{sinc}((\omega - \omega_0)\tau/2) - \text{sinc}((\omega + \omega_0)\tau/2)],$$

который с учетом  $\tau = N 2\pi/\omega_0$  можно представить в виде

$$E(\omega) = i\sqrt{2\pi}E_0 \frac{N}{2\omega_0} \left\{ \text{sinc}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)N\pi\right] - \text{sinc}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} + 1\right)N\pi\right] \right\}. \quad (8.16)$$

Графики этой функции приведены на рис. 8.7 для двух небольших значений  $N = 10$  и  $N = 20$ , чтобы наглядно продемонстрировать изменение характерной ширины спектра

$$\Delta\omega = 2\omega_0/N = 4\pi/\tau$$

с увеличением числа периодов, т. е. продолжительности сигнала.



Рис. 8.7

(Пусть читателя не смущает одинаковость на графиках максимальных



значений  $E(\omega)|_{max}$  при  $N = 10$  и  $N = 20$ ; просто для удобства размещения приведенные графики построены с разными масштабами по оси ординат.)

Для характеристики спектрального распределения энергии, как это следует из соотношения (8.7), служит функция  $|E(\omega)|^2$  для положительных частот  $\omega > 0$ . Если рассматриваемый цуг содержит много периодов, т. е.  $N \gg 1$ , то расстояние  $\omega_0$  от начала координат до главных максимумов функции  $E(\omega)$  велико по сравнению с шириной этих максимумов  $4\pi/\tau$ . Поэтому в области положительных частот функция  $E(\omega)$  (8.16) практически определяется своим первым слагаемым. Таким образом, длинный цуг синусоидальных волн характеризуется распределением энергии по спектру

$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2 \tau^2}{8\pi} \text{sinc}^2[(\omega - \omega_0)\tau/2]. \quad (8.17)$$

График этой функции вместе с видом соответствующего синусоидального цуга приведены на рис. 8.8. График дает представление о *контуре спектральной линии* рассматриваемого излучения. Максимум спектральной плотности соответствует значению  $\omega = \omega_0$ . Большая часть энергии цуга приходится на монохроматические составляющие, лежащие в пределах этого главного максимума, т. е. между частотами, отстоящими от  $\omega_0$  на  $2\pi/\tau$ .

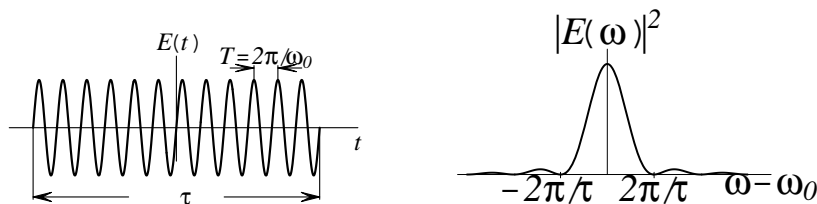


Рис. 8.8

Когда ширина спектра  $\Delta\omega$  мала по сравнению с частотой  $\omega_0$ , излучение называют *квазимонохроматическим*. Таким образом, длинный цуг синусоидальных волн является квазимонохроматической волной и только при  $N \rightarrow \infty$  (т. е.  $\tau \rightarrow \infty$ ) превращается в монохроматическую волну; при этом сплошной спектр переходит в линейчатый

$$E(\omega) \rightarrow (i/2)\sqrt{2\pi}E_0[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)],$$

соответствующий функции  $E_0 \sin \omega_0 t$ .

**Пример 3. Спектр поля радиационно затухающего осциллятора.** Классическое описание излучения возбужденного атома, основанное на модели затухающего осциллятора, приводит (см. § 13.5.) к полю излучения

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где параметр затухания определяется выражением  $\gamma = e^2 \omega_0^2 / (3mc^3)$ , причем, как показано ниже,  $\gamma \ll \omega_0$ . Спектральная плотность

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\gamma - i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\gamma - i(\omega + \omega_0)} \right] \end{aligned}$$

представляет собой сумму двух слагаемых типа  $f(\omega - \omega_0) + f(\omega + \omega_0)$ , модули которых сосредоточены соответственно вблизи значений  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = -\omega_0$ . Энергетический спектр  $|E(\omega)|^2$ , имеющий смысл на положительной оси  $\omega$ , при  $\gamma \ll \omega_0$  определяется практически первым слагаемым и имеет вид

$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{8\pi} \frac{1}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{E_0^2 \tau^2}{8\pi} \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}. \quad (8.18)$$

(Здесь  $\tau = 1/\gamma$  определяет время жизни возбужденного состояния атома.) Описываемая этим выражением форма спектральной линии излучения называется *лоренцевским контуром* и схематически приведена на рис. 8.9(b) рядом с изображением соответствующей функции  $E(t)$  (рис. 8.9(a)). Линия излучения имеет резкий максимум при  $\omega = \omega_0$ , т. е. на частоте собственных колебаний в отсутствие затухания. Уширение спектра излучаемых частот обусловлено радиационным затуханием свободных колебаний осциллятора. Интенсивность излучения, как видно из выражения (8.18), уменьшается вдвое для частот, отличающихся от  $\omega_0$  на  $\gamma = 1/\tau$ . Отсюда для ширины линии на половине высоты (так называемая *полуширина линии*) получается значение

$$\Delta\omega = 2\gamma = 2/\tau,$$

подтверждающее обратную зависимость между продолжительностью колебаний и шириной спектра излучаемых частот<sup>1</sup>.

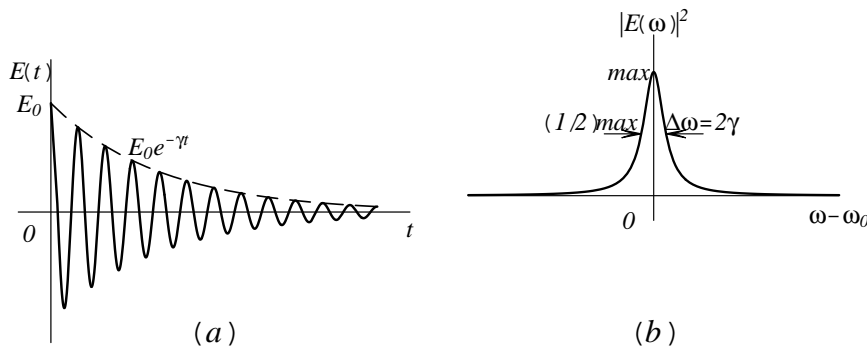


Рис. 8.9

Рассматриваемый пример позволяет оценить обусловленную радиационным затуханием *естественную ширину* спектральной линии излучения свободных атомов. Для оптического электрона на частоте  $\omega_0 = 4 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ , соответствующей длине волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ , имеем  $\tau = 3mc^3/(e^2\omega_0^2) \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$  (см. результат (13.34)). Следовательно, естественная ширина линии  $\Delta\omega$  имеет приблизительное значение  $10^8 \text{ c}^{-1}$ , а отношение  $\Delta\omega/\omega_0$  характеризуется порядком величины  $10^{-7}$ .

Так как  $\Delta\omega = 2\gamma \ll \omega_0$ , рассматриваемое излучение возбужденного атома также является квазимонохроматическим, представляющим собой пучок синусоидальных волн с медленно спадающей амплитудой. Отметим для последующего, что хаотическая последовательность подобных пучков волн представляет собой модель квазимонохроматического излучения, пригодную для объяснения характерных особенностей явления интерференции света. Что при этом важно, оказывается, для хаотической последовательности пучков волн, существующей сколь угодно длительное время, ширина спектра совпадает с шириной спектра отдельного пучка. Этот вопрос обсуждается в конце § 11.4.

**Пример 4. Спектр поля гауссовой конфигурации**  $E(x) = E_0 e^{-\alpha x^2}$

Фурье-образ данной функции, как функции от пространственной пе-

<sup>1</sup>При сравнении этой формулы с соответствующим результатом для синусоидального пучка волн следует не забывать, что для последнего в качестве  $\Delta\omega$  вместо полуширины фигурировала ширина главного максимума энергетического спектра.

ременной  $x$ , определяется интегралом

$$E(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ikx} dx,$$

следующим из формул преобразования (8.2). Для его вычисления показатель экспоненты с выделением полного квадрата представим в виде

$$-(\alpha x^2 + ikx) = -\alpha(x + ik/2\alpha)^2 - k^2/4\alpha$$

и рассматриваемый интеграл выразим через интеграл

$$\int_C e^{-\alpha z^2} dz$$

в комплексной плоскости  $z$  по контуру  $C$ , показанному на рис. 8.10, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha x^2 + ikx)} dx = e^{-k^2/4\alpha} \int_C e^{-\alpha z^2} dz.$$

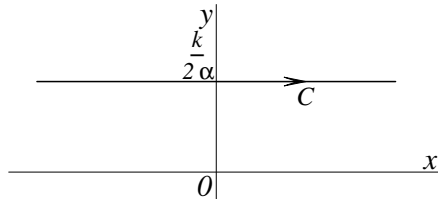


Рис. 8.10

Функция  $e^{-\alpha z^2}$ , аналитическая в комплексной плоскости  $z$ , в пределах полосы  $0 \leq y \leq k/2\alpha$  экспоненциально спадает при  $|x| \rightarrow \infty$ , и поэтому на основе теоремы Коши интеграл по контуру  $C$  равен интегралу по вещественной оси (интеграл Пуассона), равному  $\sqrt{\pi/\alpha}$ . Следовательно,

$$E(k) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}.$$

Отсюда видно, что для гауссовой кривой  $E(x)$  спектральная плотность  $E(k)$  имеет тот же характер (рис. 8.11). Причем, если пространственная протяженность сигнала характеризуется размером  $\Delta x = 1/\sqrt{\alpha}$ , то

ширина спектра  $\Delta k = \sqrt{4\alpha} = 2/\Delta x$ . То есть

$$\text{если } E(x) = E_0 e^{-\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2}, \text{ то } E(k) = \frac{E_0 \Delta x}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{k \Delta x}{2}\right)^2}.$$

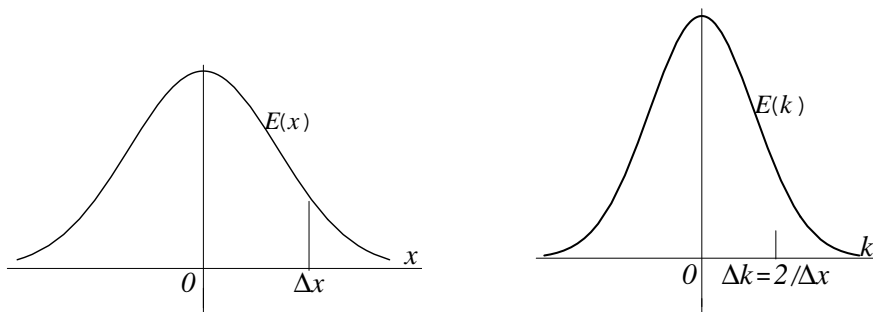


Рис. 8.11

Видим, что протяженность сигнала и ширина спектра в этом случае связаны соотношением

$$\Delta x \Delta k = 2.$$

Опять-таки, чем больше протяженность сигнала, тем уже его спектр, и наоборот.

Рассмотренные примеры показывают, что произведение длительности сигнала  $\Delta t$  на ширину спектра  $\Delta \omega$  (или протяженности сигнала  $\Delta x$  на ширину спектра пространственных частот  $\Delta k$ ) в каждом конкретном случае есть константа порядка  $\pi$ , точное значение которой зависит от формы сигнала и способа определения величин  $\Delta t$  и  $\Delta \omega$ . Эти соотношения

$$\Delta \omega \Delta t \sim \pi, \quad \Delta k \Delta x \sim \pi \quad (8.19)$$

и называются соотношениями неопределенностей. Фактически первое из этих соотношений было использовано выше для определения естественной ширины спектральной линии излучения свободных атомов.

## 8.4. О физическом содержании соотношения неопределенности

1. До сих пор о преобразовании Фурье мы говорили как о чисто математическом преобразовании. Соотношение, связывающее ширину спектра и продолжительность процесса, мы качественно установили из рассмотрения результатов математических опытов. Но нам важно физически понять естественность и неизбежность существования подобной зависимости между  $\Delta t$  и  $\Delta\omega$ . Для этого вспомним о существовании физических методов Фурье-анализа и обратимся к простейшему осциллятору без затухания с уравнением движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} f(t)$$

как к прибору, способному определить значение спектральной плотности функции  $f(t)$  (силы, действующей на осциллятор) на частоте, равной собственной частоте осциллятора. В последнем пункте данного параграфа мы специально остановимся на исследовании колебаний этого осциллятора и увидим, что если до начала действия импульсной силы осциллятор находится в состоянии покоя, то после завершения процесса взаимодействия энергия, приобретенная осциллятором, пропорциональна квадрату модуля спектральной плотности функции  $f(t)$  на частоте  $\omega$ , т. е.  $|f(\omega)|^2$ . Следовательно, понять сущность первого из соотношений неопределенности (8.19) означает ответить на вопрос: осцилляторы с какими собственными частотами результативно взаимодействуют с данной импульсной силой  $f(t)$  продолжительности  $\Delta t$ , а для каких пробных осцилляторов это взаимодействие не приводит к возбуждению заметных колебаний. Для ответа на этот вопрос импульсную силу возьмем в виде модулированного колебания

$$f(t) = F(t) \cos \omega_0 t \quad (8.20)$$

с несущей частотой  $\omega_0$  и с амплитудой  $F(t)$ , медленно (по сравнению с периодом  $2\pi/\omega_0$ ) меняющейся со временем, как схематически показано на рис. 8.12. Для наглядности рассуждений примем, что  $F(t)$  отлична от нуля только на интервале  $0 < t < \Delta t$ . Результатом действия данной импульсной силы на пробный осциллятор с собственной частотой

$\omega$  является (см. п.2) гармоническое колебание

$$x(t) = \hat{x}_0 e^{-i\omega t}, \quad \hat{x}_0 \sim \int_0^{\Delta t} F(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (8.21)$$

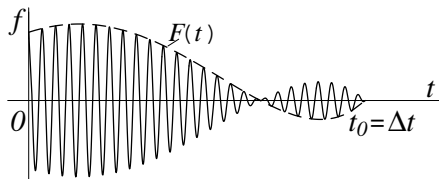


Рис. 8.12

Понятно, что для осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ <sup>2</sup> взаимодействие носит резонансный характер и амплитуда колебаний максимальна, т. е. при  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0$   $\hat{x}_0 \sim \int_0^{\Delta t} F(t) dt$ . Теперь рассмотрим осциллятор с собственной частотой, слабо отличающейся от  $\omega_0$  в том смысле, что *суммарный* набег фазы экспоненциального множителя под интегралом (8.21), равный  $|\omega - \omega_0| \Delta t$ , мало отличается от нуля, т. е.  $|\Delta\omega| \Delta t \ll 1$ . При этом влияние экспоненты  $\exp[i(\omega - \omega_0)t]$  на интеграл (8.21) еще незначительно. Следовательно, этот осциллятор примерно так же реагирует на рассматриваемую силу, как и резонансный. Ясно, что только тогда, когда расстройка частоты для резонатора достигает величины  $|\Delta\omega| = 2\pi/\Delta t$ , экспоненциальный множитель, совершив за время интегрирования полный оборот в комплексной плоскости, существенно ослабит величину интеграла, а при  $\Delta\omega \Delta t \gg \pi$  вовсе сведет его к нулю.

Таким образом, ответ на поставленный вопрос можно сформулировать так: осцилляторы, собственные частоты которых находятся в пределах

$$|\omega - \omega_0| \leq \pi/\Delta t, \quad (8.22)$$

реагируют на импульсную силу (8.20) продолжительности  $\Delta t$ , а при частотах, выходящих за эти пределы, результатом взаимодействия можно

<sup>2</sup>Заметим, что здесь сознательно допускается неточность, игнорируя, что резонансной является не частота  $\omega_0$ , а  $\omega_0 + \delta\omega$ , где  $\delta\omega$  — частота, при которой  $|F(\omega = \delta\omega)|$  — максимальна. Эта неточность не сказывается на результате оценки величины  $\Delta\omega = |\omega - \omega_*|$ .

пренебречь. Иными словами, импульсная сила (8.20) в своем составе содержит частоты, находящиеся в пределах (8.22), т. е. для ширины спектра и продолжительности процесса справедливо соотношение неопределенности (8.19).

В заключение заметим, что выбор импульсной силы в виде (8.20) с несущей частотой  $\omega_0$  необязателен. При  $\omega_0 = 0$ , т. е. когда импульсная сила представляется в виде функции  $f = F(t)$  (рис. 8.12), все рассуждения для  $\Delta\omega$  практически остаются в силе, имея в виду, что теперь  $\Delta\omega = \omega$ .

**2.** Рассмотрим колебания осциллятора, возбуждаемые силой, действующей в течение конечного промежутка времени  $0 < t < t_0$ . Примем, что до начала действия силы осциллятор находится в состоянии покоя. При этом колебания без учета сил трения определяются уравнением движения и начальными условиями

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad (8.23)$$

где  $\omega$  — собственная частота осциллятора.

Представив силу в виде  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$ , решение задачи (8.23) выразим через функцию Грина в виде

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(t, \tau)d\tau,$$

причем, как легко убедиться,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ (1/2\omega)[ie^{-i\omega(t-\tau)} - ie^{i\omega(t-\tau)}] & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Действительно, при  $t > \tau$  эта функция описывает гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , начавшееся в момент  $t = \tau$ , имея скорость, равную единице, приобретенную под действием силы в виде «толчка»  $\delta(t - \tau)$ .

Следовательно, решение задачи (8.23) имеет вид

$$x(t) = \frac{i}{2m\omega} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t f(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau - e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right\},$$

который для моментов времени после окончания действия силы заменой верхних пределов в интегралах на  $\infty$  можно выразить через фурье-образ импульсной силы  $f(t)$ :

$$x(t > t_0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2m\omega} \{ ie^{-i\omega t} f(\omega) - ie^{i\omega t} f(-\omega) \}.$$



Так как для вещественной функции  $f(t)$  справедливо свойство (8.8), скобка в последнем выражении равна удвоенной реальной части первого слагаемого и искомое решение можно представить в виде

$$x(t > t_0) = i \frac{\sqrt{2\pi}}{m\omega} f(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Таким образом, после взаимодействия с импульсной силой пробный осциллятор приходит в состояние гармонических колебаний с собственной частотой, причем комплексная амплитуда колебаний пропорциональна значению спектральной плотности силы на собственной частоте осциллятора. При этом приобретенная осциллятором энергия

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{m} |f(\omega)|^2$$

определяется квадратом модуля этой спектральной плотности. Таким образом, набор осцилляторов с разными собственными частотами можно рассматривать как фурье-анализатор для процесса, описываемого функцией  $f(t)$ .

## 8.5. Спектр случайного процесса

1. Перейдем к обсуждению нетривиального вопроса — как ввести понятие спектра для случайного процесса  $x(t)$ . Ограничимся рассмотрением стационарных случайных процессов. С самого начала примем, что если процесс характеризуется ненулевым средним значением  $\bar{x} \neq 0$ , то в качестве случайной функции будем рассматривать ее пульсационную составляющую

$$\xi(t) = x(t) - \bar{x}, \text{ для которой } \bar{\xi} = 0,$$

причем функцию  $\xi(t)$  будем считать вещественной.

Очевидно, что если вычислить спектральную плотность случайного процесса  $\xi(t)$  по обычной формуле

$$\xi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{i\omega t} dt,$$

то полученная функция  $\xi(\omega)$ , как фурье-образ одной из возможных реализаций случайного процесса, будет случайной функцией частоты  $\omega$  и

искомым спектром послужить не сможет. В условиях действительного наблюдения за случайным процессом  $\xi(t)$  мы в качестве некоего приближения к  $\xi(\omega)$  можем получить лишь текущий спектр данной реализации за время  $-T/2 < t < T/2$ , т. е. спектр *отрезка реализации*

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{при } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{при } |t| > T/2. \end{cases}$$

Понятно, что функция  $\xi_T(\omega) \doteq \xi_T(t)$ , равная

$$\xi_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_T(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_T(t) e^{i\omega t} dt,$$

тоже есть случайная функция от  $\omega$ .

**2.** А теперь покажем, что с ее помощью можно придти к некоторой неслучайной функции частоты, которая и будет характеризовать спектральный состав рассматриваемого случайного процесса. Для этого обратимся к теореме Парсеваля для отрезка реализации случайного процесса  $\xi_T(t)$ :

$$\int_{-T/2}^{T/2} |\xi_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.24)$$

Вспомним, что для стационарного случайного процесса среднее статистическое (в данном параграфе обозначается чертой над символом) равно результату временного усреднения одной реализации; в частности, для усредненной величины квадрата модуля

$$\bar{I} = \overline{|\xi(t)|^2}, \quad (8.25)$$

не зависящей от  $t$ , справедливо представление

$$\bar{I} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\xi(t)|^2 dt. \quad (8.26)$$

Сделаем небольшую «терминологическую остановку». Заметим, что для величины  $\overline{|\xi(t)|^2}$  в литературе употребляется много различных названий, например, *усредненная мощность процесса*  $\xi(t)$ . Все они так или

иначе привязаны к физической величине, описываемой символической случайной функцией  $\xi(t)$ . В данном параграфе под скалярной случайной функцией  $\xi(t)$  мы будем подразумевать определенную компоненту электрического поля в фиксированной точке пространства в его «естественном» вещественном представлении. Тогда рассматриваемую величину можно назвать усредненной плотностью энергии случайного поля. Но мы назовем ее короче усредненной интенсивностью, имея в виду, что при изучении интерференции электромагнитных волн среднее значение квадрата напряженности электрического поля принято обозначать таким термином.

Пойдем дальше. Разделив равенство (8.24) на  $T$  и перейдя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\xi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim \frac{1}{T} |\xi_T(\omega)|^2 d\omega,$$

а объединив данный результат с представлением (8.26), фактически придем к спектру интенсивности случайного поля  $\xi(t)$ :

$$\bar{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim \frac{1}{T} |\xi_T(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega. \quad (8.27)$$

Следовательно, спектральная плотность интенсивности  $I(\omega)$  связана со спектральной плотностью  $\xi_T(\omega)$  отрезка реализации случайного поля соотношением

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim \frac{1}{T} |\xi_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.28)$$

Итак,  $\xi_T(\omega)$  — случайная функция  $\omega$ , а  $I(\omega)$ , определяемая соотношением (8.28) и имеющая определенный физический смысл, уже является однозначной функцией  $\omega$ . Именно она характеризует собой спектральный состав данного случайного процесса  $\xi(t)$ .

Так как  $\xi(t)$  — вещественная функция по условию, то из свойства (8.9) и определения (8.28) следует, что  $I(\omega)$  — четная вещественная функция. Тогда равенство (8.27) для усредненной интенсивности преобразуется в интеграл от спектральной плотности по положительным частотам

$$\bar{I} = 2 \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega. \quad (8.29)$$

3. Напрямую по формуле (8.28) функцию  $I(\omega)$  удастся определить только в редких случаях<sup>3</sup>. Поэтому для нее необходимо получить независимый способ вычисления. С этой целью обратимся к так называемой *функции корреляции*  $\Gamma(\tau)$ , которая для стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  (вещественного) определяется как

$$\Gamma(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\xi(t+\tau)dt$$

и представляет собой вещественную функцию своего аргумента, удовлетворяющую условиям

$$\Gamma(-\tau) = \Gamma(\tau) = \Gamma^*(\tau), \quad \Gamma(\infty) = 0. \quad (8.30)$$

Видно, что интересующая нас средняя интенсивность  $\bar{I}$  (8.25) представляет собой частное значение функции корреляции

$$\bar{I} = \Gamma(0).$$

Исходя из фурье-представления функции  $\Gamma(\tau)$  отсюда получаем

$$\bar{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega)d\omega,$$

что с учетом свойств функции  $\Gamma(\omega)$ :

$$\Gamma(-\omega) = \Gamma(\omega) = \Gamma^*(\omega)$$

можно представить в виде

$$\bar{I} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Gamma(\omega)d\omega.$$

Из сравнения последнего выражения с равенством (8.29), справедливых для любой вещественной случайной функции  $\xi(t)$ , приходим к заключению, что

фурье-образ  $\Gamma(\omega)$  функции корреляции (часто называемый *статистическим спектром случайного процесса*) и спектральная плот-

<sup>3</sup>См., например, вычисления в конце § 11.4.

ность интенсивности  $I(\omega)$  отличаются друг от друга только постоянным множителем:

$$\Gamma(\omega) = \sqrt{2\pi}I(\omega). \quad (8.31)$$

Полученное равенство составляет содержание *теоремы Винера-Хинчина* — основной теоремы теории случайных процессов. Учитывая соотношение (8.28), последнее равенство можно дополнить и представить в виде цепочки

$$\Gamma(\omega) = \sqrt{2\pi}I(\omega) = \sqrt{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\xi_T(\omega)|^2, \quad (8.32)$$

чтобы подчеркнуть: статистический спектр  $\Gamma(\omega)$  определяет как спектральную плотность интенсивности, так и предельную характеристику спектра отрезка реализации рассматриваемого случайного процесса  $\xi_T(\omega)$ .

Таким образом, на вопрос, сформулированный в начале параграфа, ответ получен: статистическим спектром стационарного случайного процесса является функция  $\Gamma(\omega)$  — спектральная плотность функции корреляции  $\Gamma(t)$  случайной функции  $\xi(t)$ . В качестве иллюстрации к сказанному можно рассматривать пример из § 11.8.

## 8.6. Преобразования Фурье для функций четырех переменных. Уравнения Максвелла в фурье-представлении

1. До сих пор, говоря о фурье-преобразовании, мы подразумевали либо функции времени, либо функции от одной пространственной координаты  $x$ . А электромагнитные поля, к которым мы хотим целенаправленно применить эти преобразования, в общем случае зависят от трех координат и времени.

Не составляет труда осуществить фурье-преобразование по всем переменным и представить функцию  $f(\mathbf{r}, t)$  в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Говорят при этом, что функции  $f(\mathbf{r}, t)$  соответствует фурье-образ, задаваемый в пространстве  $\mathbf{k}, \omega$ :

$$f(\mathbf{r}, t) \doteq f(\mathbf{k}, \omega), \quad \text{либо} \quad f(\mathbf{r}, t) \doteq f_{\mathbf{k}, \omega}.$$

2. Вначале, для наглядности, рассмотрим функцию только двух переменных —  $z$  и  $t$ . Осуществив последовательно преобразования по одной и другой переменной, легко в этом случае придти к следующим формулам:

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, \omega) e^{i(kz - \omega t)} dk d\omega, \quad (8.33)$$

$$f(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) e^{-i(kz - \omega t)} dz dt. \quad (8.34)$$

Отсюда видно, что процесс, описываемый функцией  $f(z, t)$ , может быть представлен в виде суперпозиции бесконечного числа плоских монохроматических волн, бегущих вдоль направления  $z$ . Каждая из этих волн характеризуется частотой  $\omega$ , волновым числом  $k$ , распространяется с фазовой скоростью  $v_\phi = \omega/k$  и имеет амплитуду  $f(k, \omega)$ , определяемую соотношением (8.34), отличную от нуля в некоторой области плоскости  $k, \omega$ . Так как в интеграле (8.33)  $\omega$  и  $k$  — независимые переменные, каждая из которых меняется в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , понятно, что среди волн, составляющих функцию  $f(z, t)$ , фазовые скорости в общем случае также могут меняться от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Если рассматривать не умозрительно выписанные функции  $f(z, t)$ , а функции, описывающие какой-либо физический процесс распространения волн, возникают определенные ограничения на возможные значения  $k, \omega$  и, следовательно, на фазовые скорости составляющих волн  $f(k, \omega) \exp[i(kz - \omega t)]$ . Возьмем, к примеру, функцию

$$f(z, t) = f(\xi), \quad \xi = z - ut, \quad (8.35)$$

рассматривавшуюся в § 7.2. как решение волнового уравнения (7.9) и описывающую волну, бегущую без изменения профиля с постоянной скоростью  $u$ . Фурье-образ этой функции

$$f(k, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi e^{-ikut} e^{i\omega t} dt.$$

Внутренний интеграл здесь представляет собой  $f(k) \doteq f(\xi)$ , а повторное интегрирование при учете соотношений (8.3) приводит к результату

$$f(k, \omega) = \sqrt{2\pi} f(k) \delta(\omega - ku), \quad (8.36)$$

откуда видно, что функция  $f(k, \omega)$  в рассматриваемом случае (8.35) отлична от нуля не в двумерной области плоскости  $k, \omega$ , а только на линии

$$\omega = ku, \quad u = \text{const.} \quad (8.37)$$

При этом, как следует из соотношений (8.33), (8.36),

$$f(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - ku) e^{-i\omega t} d\omega dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ik(z-ut)} dk.$$

Таким образом, функцию  $f(z, t)$ , заданную формулой (8.35), мы представили в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Заметьте при этом, что составляющие данный *нерасплывающийся волновой пакет* волны подчиняются частному виду (8.37) линейной зависимости  $\omega(k)$ , и все они имеют одну и ту же фазовую скорость  $u$ .

**3.** Теперь вернемся к общему случаю функции четырех переменных. Соответствующие формулы прямого и обратного фурье-преобразований, получаемые в результате последовательности преобразований по парам переменных  $(t, \omega), (x, k_x), \dots$  имеют вид

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \quad (8.38)$$

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{r} dt.$$

Здесь  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z, \omega$  — независимые переменные; интегрирование по всем четырем переменным предусматривается в пределах  $(-\infty, \infty)$ . Следовательно, сказанное выше о возможных пределах изменения величины фазовой скорости составляющих волн остается и здесь справедливым.

**4.** Математическая целесообразность перехода в пространство  $(\mathbf{k}, \omega)$  в задачах электродинамики обусловлена двумя причинами. Во-первых, при наличии материальных сред это единственная возможность получить замкнутую систему уравнений Максвелла, поскольку так называемые материальные уравнения, т. е. локальные связи между полями  $\mathbf{V}(\mathbf{H}), \mathbf{D}(\mathbf{E})$ , существуют только для фурье-компонент соответствующих полей. Во-вторых, переход к фурье-представлению полей упрощает уравнения, так как дифференциальные операторы, действующие

на искомые функции, при этом переходе заменяются на алгебраические множители и задача становится алгебраической.

Для доказательства последнего утверждения возьмем фурье-представление некоторой, пусть, для общности, векторной функции  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (8.39)$$

и покажем, что результат действия любого дифференциального оператора на функцию  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  после перехода в пространство  $\mathbf{k}, \omega$  сводится к умножению  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$  на некоторый параметр. Имеем:

$$(\partial \mathbf{E} / \partial t)_{\mathbf{k}, \omega} = -i\omega \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega},$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \omega} = (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}),$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \omega} = [i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}].$$

Добавим сюда результаты, относящиеся к скалярной функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ :

$$(\operatorname{grad} \varphi)_{\mathbf{k}, \omega} = i\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}, \omega},$$

$$(\Delta \varphi)_{\mathbf{k}, \omega} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}, \omega}.$$

Докажем одно из этих соотношений, например, для  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , подействовав оператором  $\operatorname{rot}$  на равенство (8.39):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iiint \operatorname{rot}[\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}] d\mathbf{k} d\omega = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \iiint [i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \end{aligned}$$

Видно, что квадратная скобка при экспоненте в последнем интеграле занимает место, полагающееся для  $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \omega}$ . Следовательно, искомое соотношение получено. Остальные доказываются аналогично.

**5.** Фактически первым из этих соотношений мы уже пользовались при исследовании плоских монохроматических волн, когда уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t$  записывали в виде  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = (i\omega/c) \mathbf{B}$ . Теперь можем всю систему уравнений Максвелла переписать в виде алгебраических соотношений для фурье-компонент полей, вспомнив, что если функции



равны, то равны и их фурье-компоненты. Для наглядности новые уравнения приведем рядом с первоначальными:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad [i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad [i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}_{\mathbf{k},\omega}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \rightarrow \quad (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{k},\omega}) = 4\pi\rho_{\mathbf{k},\omega}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = B(\mathbf{H}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega} = \mu(\omega) \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = D(\mathbf{E}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_{\mathbf{k},\omega} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}. \quad (6)$$

(8.40)

О последних, материальных уравнениях, т. е. о связи  $B(\mathbf{H})$ ,  $D(\mathbf{E})$  здесь следует сказать дополнительно. Напомним, что для стационарных полей мы принимали линейную связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , а также  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  (последнюю не всегда; для ферромагнетиков линейная связь справедлива только в слабых полях). В случае быстропеременных полей дело обстоит сложнее. Оказывается (в плазме, например), что на вектор поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  в данной точке пространства-времени влияние оказывает поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \xi, t - \tau)$  всего ближайшего окружения точки  $\mathbf{r}$  во все предыдущие моменты времени. В других средах или в других условиях влиянием окружения точки наблюдения можно пренебречь и учитывать только предысторию поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau)$  в данной точке пространства. В последнем случае говорят, что *пространственной дисперсией* можно пренебречь и учитывать только частотную дисперсию. Такое предположение принимается в данной книге. Таким образом, здесь принимается, что поле  $\mathbf{D}(t)$  определяется полем  $\mathbf{E}(t - \tau)$  в той же точке во все предыдущие моменты времени. При этом линейную связь подобного рода в общем случае можно записать в виде интегрального соотношения

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau,$$

где функция  $f(\tau)$ , заданная при  $\tau \geq 0$ , определяет степень влияния удаленных моментов времени; очевидно при этом, что  $f(\infty) = 0$ . Если теперь доопределить  $f(t)$  для отрицательных  $\tau$ , приняв  $f(\tau) = 0$  при

$\tau < 0$ , то последний интеграл можно распространить на бесконечный интервал  $(-\infty, \infty)$  и получить свертку двух функций, качественное поведение одной из которых представлено на рис. 8.13.

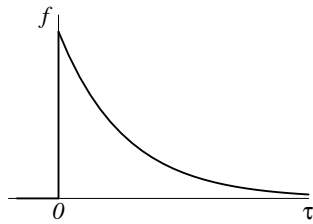


Рис. 8.13

Воспользовавшись теоремой о спектре свертки, из последнего соотношения получаем связь между фурье-компонентами в виде простой пропорциональности между  $\mathbf{D}_\omega$  и  $\mathbf{E}_\omega$

$$\mathbf{D}_\omega = [1 + \sqrt{2\pi}f(\omega)]\mathbf{E}_\omega, \text{ т. е. } \mathbf{D}_\omega = \epsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega,$$

причем коэффициент пропорциональности  $\epsilon(\omega)$  зависит от частоты. При разложении на плоские монохроматические волны эту зависимость мы представили в виде уравнения (6) системы (8.40). Из аналогичных соображений выписана предпоследняя строка системы (8.40).

Итак, при переходе в пространство  $\mathbf{k}, \omega$  полная система уравнений Максвелла заменяется алгебраической системой линейных уравнений (8.40) для фурье-компонент. (Заметим, что одно из этих уравнений (2), фиксирующее ортогональность векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{V}$ , не является независимым; это — следствие уравнения (1).)

**6.** Воспользуемся полученными уравнениями для области, занятой однородной средой без токов и зарядов (т. е.  $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$  не зависят от координат,  $\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega} = 0, \rho_{\mathbf{k},\omega} = 0$ ). (Здесь уже и уравнение (4) не самостоятельно.) Теперь система уравнений, после исключения вспомогательных полей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ , приобретает вид

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{V}_{\mathbf{k},\omega}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{V}_{\mathbf{k},\omega}] = -\epsilon\mu \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}. \quad (8.41)$$

Припишем к ним следствия из этих векторных соотношений

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}) = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{k},\omega}) = 0 \quad (8.42)$$

и заметим, что система (8.41) легко расщепляется на два независимых уравнения

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} \cdot (k^2 - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}) = 0, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{k},\omega} \cdot (k^2 - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}) = 0.$$

Отсюда следует, что произвольное (нетривиальное) решение уравнений Максвелла в однородной области без токов и зарядов представляет собой не просто суперпозицию плоских монохроматических волн (ведь любая функция  $f(\mathbf{r}, t)$  представляется разложением (8.38)), а суперпозицию волн, у которых волновые вектора и частоты подчиняются определенному соотношению

$$k = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}\omega/c.$$

Раньше (в § 7.5) мы уже видели, что плоская монохроматическая волна подчиняется данному соотношению. А здесь мы показали несколько иное: любое решение в рассматриваемой области может быть разложено на плоские монохроматические волны, у которых волновой вектор и частота удовлетворяют соотношению (7.27).

До сих пор мы везде принимали, что электродинамические характеристики среды  $\epsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$  являются вещественными, и вводили вещественный показатель преломления  $n = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$ , определяющий фазовую скорость и распространение волны без затухания. Теперь заметим, что в общем случае  $\epsilon(\omega)$  является комплексной функцией и наличие в ней мнимой составляющей отвечает за затухание волны по мере распространения, имеющее место, в принципе, в любой материальной среде, кроме пустоты. (О магнитной проницаемости говорить не будем, имея в виду, что в оптике для всех сред справедливо приближение  $\mu = 1$ .) Не задаваясь вопросом о физических механизмах затухания, здесь, в качестве введения к новой главе, отметим лишь формальную сторону этого процесса.

При комплексной  $\epsilon(\omega)$  показатель преломления  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$  также является комплексным, и его принято изображать в виде

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} = n(\omega) + i\kappa(\omega),$$

сохранив символ  $n$  и название «показатель преломления» для обозначения вещественной части. При этом мнимая часть  $\kappa$  называется *показателем затухания*. Смысл этих названий становится понятным из рассмотрения структуры волны, где волновой вектор имеет значение

$$k = \sqrt{\epsilon(\omega)} \omega/c = (n + i\kappa)\omega/c,$$

а выражение для поля

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-\kappa(\omega/c)z} e^{in(\omega/c)(z - (c/n)t)}$$

демонстрирует затухание волны в направлении распространения, задаваемое параметром  $\kappa$ , и фазовую скорость волны  $u = c/n(\omega)$ , определяемую показателем преломления.

## Глава 9

# ДИСПЕРСИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Термином дисперсия обозначают зависимость фазовой скорости (или показателя преломления) от частоты. Именно наличие дисперсии позволяет в эксперименте «рассортировать» монохроматические компоненты сложной волны, т. к. при наклонном падении на границу вещества эти компоненты в преломленном излучении распространяются в различных направлениях. По этому принципу работают призмные спектрографы и монохроматоры. Дисперсия проявляется не только в эффекте преломления на границе вещества. Она сильно влияет и на прямолинейное распространение немонахроматического излучения в объеме вещества, определяя динамическое поведение волнового пакета. Зависимостью  $\epsilon(\omega)$  определяются граничные значения частот, разделяющие волны на проходящие через среду и отражающиеся от нее.

Данная глава посвящена краткому знакомству с главными механизмами дисперсии и более подробному рассмотрению электронного механизма на основе классической модели строения вещества. Здесь исследуется влияние закона дисперсии среды на распространение волнового пакета в ней; содержится краткое описание механизмов затухания и усиления волны при прохождении через вещество.

## 9.1. Краткий обзор электромагнитных свойств различных сред и их механизмов дисперсии

Наиболее простыми свойствами обладает пустота, для которой  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . Пустота является единственной средой, в которой нет дисперсии и потерь.

Если взять диэлектрики, имеющие в постоянных полях и при низких частотах пренебрежимо малую проводимость, магнитную проницаемость  $\mu = 1$  и некоторую вещественную диэлектрическую постоянную  $\epsilon_0$ , то для них  $u = c/n$ ,  $n = \sqrt{\epsilon_0}$ . Последнее соотношение применимо лишь для таких частот, при которых диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  практически совпадает со статической диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$ .

Все диэлектрики в той или иной степени имеют дисперсию, и при достаточно высоких частотах  $\epsilon \neq \epsilon_0$ . Наиболее ярким проявлением неприменимости статического значения  $\epsilon$  к электромагнитным волнам высокой частоты обладает вода, имеющая при низких частотах  $\epsilon_0 = 81$  и значение  $n = \sqrt{\epsilon} = 1,32$  для инфракрасных волн ( $\lambda \sim 1$  мкм).

Вода является примером полярного диэлектрика. Поляризация таких диэлектриков происходит в результате поворота молекул, обладающих большим моментом инерции, поэтому дисперсия диэлектрической проницаемости (так называемая *ориентационная дисперсия*) проявляется для них в радиодиапазоне. Для воды дисперсия начинается при частотах  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$ , что соответствует длине волны  $\lambda \sim 3$  см. Водяной пар сильно меняет свою диэлектрическую проницаемость при более коротких волнах, при  $\lambda \sim 0,1$  мм.

Другими свойствами обладают неполярные диэлектрики, например, сухой неионизированный воздух, водород, бензол, гелий, неон и другие инертные газы; из твердых веществ — сера и алмаз. Поляризация этих диэлектриков обусловлена смещением электронов внутри атомов и молекул (*электронная дисперсия*). Для них равенство  $\epsilon = \epsilon_0$  выполняется иногда даже в оптическом диапазоне. Объясняется это тем, что электроны обладают малой инерцией и следуют за изменениями поля вплоть до весьма высоких частот.

Заметим, что на оптических частотах названный выше ориентационный механизм поляризации теряет значение и для полярных диэлектриков; при этом характер дисперсии полностью определяется динамикой

электронов в атомах и молекулах.

Обратившись к проводникам, сразу отметим комплексный характер их диэлектрической проницаемости, как это следует из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

наравне с токами смещения учитывающего и токи проводимости. Для монохроматических процессов это уравнение

$$\operatorname{rot}\hat{\mathbf{H}} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} - i\frac{\omega}{c}\epsilon'\right)\hat{\mathbf{E}} = -i\frac{\omega}{c}\left(\epsilon' + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\hat{\mathbf{E}}$$

принимает стандартный вид (7.22)  $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = -i(\omega/c)\epsilon\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ . Только теперь диэлектрическая проницаемость в нем является комплексной, объединяющей в себе «обычную» диэлектрическую проницаемость (вещественную) с проводимостью:

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'', \quad \text{причем } \epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega. \quad (9.1)$$

Для металлов, как показывает опыт, проводимость при всех радиочастотах (вплоть до *миллиметровых волн*) практически сохраняет то же значение, что на постоянном токе. Следовательно, комплексная диэлектрическая проницаемость металлов имеет весьма большую мнимую часть. Действительно, для меди  $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$  1/с, и даже для висмута, являющегося полуметаллом и сравнительно плохим проводником, имеем  $\sigma = 7,5 \cdot 10^{15}$  1/с, в то время как частота  $\omega \sim 10^{15}$  1/с уже относится к световым волнам. Поэтому для всех металлов во всем диапазоне радиочастот величина  $\epsilon''$  велика и по сравнению с ней вещественной частью диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$  практически можно пренебречь. Поэтому для металлов обычно полагают

$$\epsilon(\omega) = i(4\pi\sigma/\omega).$$

В оптическом диапазоне это простейшее соотношение не выполняется. Здесь  $\epsilon'$  и  $\sigma$  являются функциями частоты, определяемыми динамикой свободных электронов. Таким образом, в области оптических частот дисперсия как диэлектриков, так и проводников определяется электронным механизмом. Единственное различие между ними заключается в том, что в прозрачной среде (диэлектрики) дисперсия связана с вынужденными колебаниями связанных электронов, тогда как в металле (и плазме) она связана с вынужденными колебаниями свободных электронов.

Простейший вариант электронной теории дисперсии составляет предмет следующего параграфа. При использовании классической модели строения вещества здесь получаются результаты, имеющие принципиальное значение, так как они подтверждаются при точном квантовом рассмотрении.

## 9.2. Классическая электронная теория дисперсии

1. Ограничимся простейшим случаем достаточно разреженной газобразной среды, взаимодействием атомов или молекул в которой можно пренебречь, а также считать, что действующее на отдельный атом поле совпадает со средним полем электромагнитной волны. В таких условиях для получения макроскопического материального уравнения  $\epsilon(\omega)$  достаточно рассмотреть действие волны на изолированный атом.

Входящие в состав атома электроны можно разделить на внешние, или *оптические*, и электроны внутренних оболочек. С излучением оптического диапазона взаимодействуют только внешние электроны. Собственные частоты электронов внутренних оболочек столь велики, что поле световой волны на них практически не влияет и лишь для рентгеновского излучения внутренние электроны становятся существенными.

В классической теории дисперсии оптический электрон в атоме рассматривается как затухающий дипольный осциллятор, характеризуемый определенной собственной частотой  $\omega_0$  и постоянной затухания  $\gamma$ , так что уравнение его движения в поле световой волны имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -(e/m)\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}. \quad (9.2)$$

(Обусловленная магнитным полем составляющая силы Лоренца в  $v/c$  раз меньше силы со стороны электрического поля и в уравнении не принимается во внимание.) Входящая в уравнение собственная частота  $\omega_0$  атомного электрона может быть рассчитана только на основе квантовой теории атома. В рамках классической теории дисперсии ее следует рассматривать как формально введенную постоянную. В эксперименте значение  $\omega_0$  определяет частоту линии поглощения в спектре исследуемого вещества (это показано ниже). Постоянная затухания  $\gamma$ , характеризующая потери энергии электрона, содержит вклад, обусловленный *радиационным затуханием*, который в рассматриваемом случае



разреженной среды является главным<sup>1</sup>. Другие причины затухания (например, взаимодействия с другими атомами и соударения) связаны с диссипацией энергии электромагнитного поля, т. е. с ее превращением в другие формы (в теплоту), и имеет значение в плазме и металлах.

Решение уравнения (9.2) для установившихся вынужденных колебаний

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{r}}_0 e^{-i\omega t}, \quad \hat{\mathbf{r}}_0 = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \mathbf{E}_0$$

определяет значение вектора поляризации

$$\mathbf{P}(t) = -eN\mathbf{r}(t) = -eN\hat{\mathbf{r}}_0 e^{-i\omega t},$$

где  $N$  — концентрация атомов вещества. Тогда из цепочки равенств

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi\mathbf{P}(t) = [\mathbf{E}_0 + 4\pi(-e)N\hat{\mathbf{r}}_0]e^{-i\omega t} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

для искомой функции  $\epsilon(\omega)$ , которая вследствие затухания атомных осцилляторов оказывается комплексной, имеем

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad (9.3)$$

где  $\omega_p$  — постоянная, имеющая размерность частоты. В разреженных средах  $\omega_p^2 \ll \omega_0^2$ , и можно считать, что  $\epsilon$  мало отличается от единицы<sup>2</sup>. Тогда для комплексного показателя преломления  $\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa$  справедливы выражения

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad \kappa(\omega) = \omega_p^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (9.4)$$

(Обычно за вещественной частью  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$  сохраняют прежнее название, а его мнимую часть  $\kappa$  называют *коэффициентом затухания*.)

**2.** Проанализируем качественное поведение полученных функций. Нетрудно проверить, что  $n(\omega)$  имеет максимум и минимум в точках  $\omega_{1,2}$ , для которых  $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \mp 2\gamma\omega_0$ , или, с учетом условия  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\omega_{1,2} = \omega_0 \mp \gamma$ . То есть точки экстремума показателя преломления расположены вблизи собственной частоты  $\omega_0$  по обе стороны от нее; при этом

$$n_{max} = n(\omega_1) = 1 + \frac{\omega_p^2}{8\gamma\omega_0}, \quad n_{min} = 1 - \frac{\omega_p^2}{8\gamma\omega_0}. \quad (9.5)$$

<sup>1</sup> Оценка для величины  $\gamma$  приведена в (13.34) § 13.5.

<sup>2</sup> На самом деле условие  $|\epsilon - 1| \ll 1$ , как следует из результатов (9.5), выполняется при требовании  $\omega_p^2 \ll \gamma\omega_0$ , более жестком, чем  $\omega_p \ll \omega_0$ .

При значительном удалении от линии поглощения, т. е. при

$$|\omega - \omega_0| \gg \gamma,$$

показатель поглощения можно не принимать во внимание (что очевидно из выражения  $\epsilon(\omega)$  (9.3)), а показатель преломления

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

быстро стремится к единице. Причем, если  $\omega^2 < \omega_0^2$ , величина  $n - 1$  больше нуля и увеличивается с увеличением частоты. При  $\omega^2 > \omega_0^2$  значение  $n - 1$  отрицательно, но  $n$  также растет с увеличением  $\omega$ , приближаясь к единице.

Вблизи линии поглощения, т. е. при

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0,$$

выражения (9.4) можно упростить, заменив в них  $\omega$  на  $\omega_0$ , а  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  — на  $(\omega_0 - \omega)2\omega_0$ . В результате получаем

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}, \quad \kappa(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (9.6)$$

Эти функции, справедливые в названной области, изображены на рис. 9.1. (Вдали от линии поглощения мысленные продолжения этих кривых согласуются с результатом предыдущего анализа.) Видно, что в интервале от  $\omega_1 = \omega_0 - \gamma$  до  $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$  показатель преломления монотонно спадает от максимума до минимума, проходя через значение  $n = 1$  в точке  $\omega = \omega_0$ . Показатель поглощения принимает в этой точке максимальное значение

$$\kappa_{max} = \frac{\omega_p^2}{4\gamma\omega_0},$$

а в точках  $\omega_1, \omega_2$  экстремумов функции  $n(\omega)$  функция  $\kappa(\omega)$  принимает значение

$$\kappa(\omega_1, \omega_2) = (1/2)\kappa_{max}.$$

Изображаемый функцией  $\kappa(\omega)$  (9.6) спектральный контур линии поглощения, как и исследованный раньше (8.18) спектральный контур линии излучения затухающего осциллятора, имеет лоренцеву форму с максимумом в точке  $\omega_0$  и полушириной  $2\gamma$ .

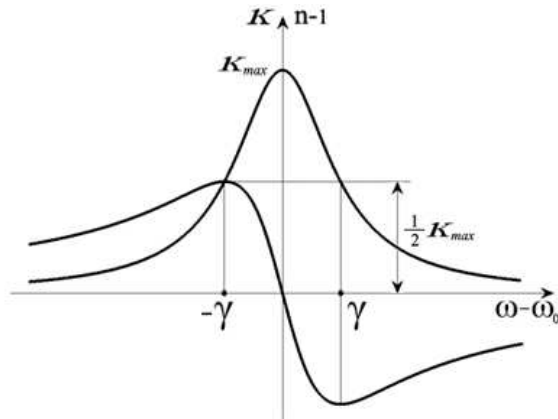


Рис. 9.1

Из приведенного анализа понятно, что, когда частота света приближается к  $\omega_0$ , основной эффект взаимодействия света с веществом обусловлен мнимой частью  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$ , т. е. функцией  $\kappa(\omega)$ , и связан с поглощением света. Такое избирательное поглощение приводит, например, к появлению темных линий в спектре солнечного излучения. Свет, излучаемый поверхностью Солнца, имеет сплошной спектр. При прохождении сквозь солнечную атмосферу излучение сильно поглощается на частотах, равных собственным частотам входящих в состав атмосферы атомов. Измеряя эти частоты, можно определить химический состав солнечной атмосферы. Такими методами установлено, что химические элементы на Солнце и звездах не отличаются от земных.

**3.** Применим результат (9.3) к исследованию закона дисперсии частично ионизованной разреженной плазмы. При этом будем иметь в виду частоты, намного меньшие частот собственных колебаний связанных электронов, и поэтому их влиянием на поляризацию среды будем пренебрегать. Не будем также учитывать влияние движения тяжелых ионов, считая их неподвижными в поле  $\mathbf{E}$  волны. Следовательно, принимаем во внимание поляризацию, обусловленную только газом свободных электронов, которые, не будучи привязаны к конкретным атомам, не испытывают «упругой силы» и не обладают собственными частотами. «Сила трения», входящая в уравнение движения (9.2), теперь порождается столкновениями электрона с ионами и постоянная затухания  $\gamma$  равна средней частоте этих столкновений (см. § 3.3). Отсюда следует,

что диэлектрическая проницаемость разреженной плазмы определяется первой формулой (9.3) после замены  $\omega_0^2$  на нуль:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 4\gamma^2} + i\omega_p^2 \frac{2\gamma/\omega}{\omega^2 + 4\gamma^2}, \quad (9.7)$$

причем характерная частота  $\omega_p$ , определяемая второй формулой (9.3), в этом случае называется *плазменной частотой* и зависит от концентрации  $N$  свободных электронов.

Видно, что рассматриваемая функция  $\epsilon(\omega)$  содержит в себе две характерные частоты  $\omega_p$  и  $\gamma$ . Частота столкновений  $\gamma$  для конкретной плазмы ионосферы имеет порядок  $(10^3 \div 10^4)$  1/с, так что для волн с частотой  $\omega > 10^6$  1/с (т. е.  $\lambda < 2 \cdot 10^3$  м) выполняется условие  $\omega \gg \gamma$ . В этом случае мнимой частью  $\epsilon(\omega)$  (9.7) можно пренебречь и принять

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (9.8)$$

При этом плазменная частота  $\omega_p$  играет роль некоторой граничной частоты. Если  $\omega < \omega_p$ , то  $\epsilon(\omega)$  отрицательна, а  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$  — чисто мнимая величина. Волны таких частот — не распространяются, а отражаются от плазмы<sup>3</sup>. При  $\omega > \omega_p$   $\epsilon(\omega)$  становится положительной, а плазма — прозрачной для падающего излучения. Для ионосферы именно методом радиозондирования, основанного на рассматриваемом эффекте, определено распределение концентрации электронов по высоте. Выяснено, что максимальная концентрация  $N_{max}$ , равная  $\sim 10^6$  1/см<sup>3</sup> (летом) и  $2 \cdot 10^6$  1/см<sup>3</sup> (зимой), имеет место примерно на высоте 350 км. По мере удаления от этого слоя концентрация электронов постепенно убывает и на высоте 60 км практически равна нулю. Считают, что волны длиннее 40 м отражаются от ионосферы, а короче 6–8 м, как правило, не отражаются (ионосфера для них прозрачна, как и для световых волн).

Заметим для дальнейшего, что волны, распространяющиеся в плазме, характеризуются дисперсионной зависимостью

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}},$$

получающейся в результате подстановки функции  $\epsilon(\omega)$  (9.8) в выражение (7.27). Кривая, изображенная на рис. 9.2, демонстрирует наличие граничной частоты, ниже которой волна в среде не распространяется.

<sup>3</sup> Данное утверждение здесь приводится без доказательства.

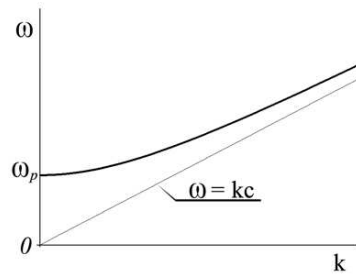


Рис. 9.2

Подобной дисперсионной зависимостью обладают волны в волноводах, которые подробно обсуждаются в § 10.6, 10.7.

4. Отметим, что формула (9.7) применима и к газу свободных электронов в металлах. Здесь постоянная затухания  $\gamma$ , равная средней частоте столкновения электрона с ионами  $\gamma = 1/\tau_s$ , характеризуется (см. § 3.3) порядком величины

$$\gamma \approx 2,5 \cdot 10^{13} 1/c,$$

а плазменная частота  $\omega_p$ , определяемая концентрацией электронов  $N \approx 8 \cdot 10^{22} 1/\text{см}^3$ , находится в области далекого ультрафиолета. Отсюда понятны качественные границы изменения характера диэлектрической проницаемости, приведенные для металлов в предыдущем параграфе. Действительно, как видно из формулы (9.7), при  $\omega \ll \gamma$  (т. е.  $\lambda \gg \lambda_*$ ) диэлектрическая проницаемость является чисто мнимой и характеризуется неизменной проводимостью (9.1). В условиях  $\omega \gg \gamma$  ( $\lambda \ll \lambda_*$ )  $\epsilon(\omega)$  становится вещественной (9.8), а граница между этими областями определяется характерной длиной волны

$$\lambda_* = \frac{2\pi}{\gamma} c \approx 10^{-2} \text{см}.$$

### 9.3. Дисперсия и волновой пакет

**1. Предварительное рассмотрение.** Рассмотрение монохроматических волн фактически не иллюстрирует полностью явление дисперсии. Поэтому для его наблюдения необходимо обратиться к изучению немонахроматических волн.

С одномерной некогерентной плоской волной, состоящей из совокупности монохроматических волн, мы частично познакомились в § 8.6. Выяснили, что если составляющий волновой пакет волны бегут с одинаковыми фазовыми скоростями  $u$ , то совокупная волна перемещается как целое, имея ту же скорость  $u$ . Иными словами, в среде с зависимостью  $\omega(k)$  вида (8.37)  $\omega = ku$  (например, в вакууме, где  $u = c$ ), волновой пакет распространяется без изменения своего профиля или, как говорят, волновой пакет не расплывается.

Теперь перейдем к рассмотрению пакета волн, имеющих неодинаковые фазовые скорости. Начнем с простейшего примера, предложенного еще Стоксом в 1876 г., когда группа состоит из двух монохроматических волн с одинаковыми амплитудами, бегущих в одном направлении с мало различающимися волновыми числами и частотами. Обозначая эти разности через  $2\Delta k$  и  $2\Delta\omega$  соответственно, такие волны можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \psi_0 \left\{ e^{i[(k_0 + \Delta k)z - (\omega_0 + \Delta\omega)t]} + e^{i[(k_0 - \Delta k)z - (\omega_0 - \Delta\omega)t]} \right\} = \\ &= 2\psi_0 \cos(\Delta k z - \Delta\omega t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Это выражение описывает «синусоидальную» волну с волновым числом  $k_0$  и частотой  $\omega_0$ , но с амплитудой, модулированной косинусом (по этой причине волна не является монохроматической). Поскольку по предположению величины  $\Delta k/k$  и  $\Delta\omega/\omega$  малы, ясно, что амплитуда представляет собой медленно меняющуюся как по  $z$ , так и по  $t$  функцию, огибающую быстро осциллирующие пульсации. Из графика (рис. 9.3) действительной части выражения (9.9), взятого для фиксированного момента времени, видно, что в качестве волнового пакета в данном случае можно рассматривать совокупность осцилляций, содержащихся между двумя последовательными узлами огибающей.

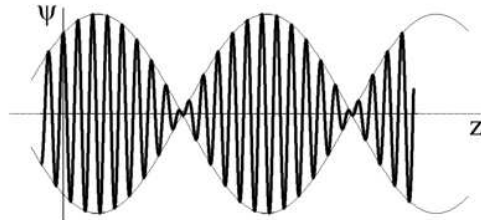


Рис. 9.3

Эти осцилляции распространяются с фазовой скоростью  $\omega_0/k_0$ , в то время как скорость огибающей равна  $\Delta\omega/\Delta k$ , отличной в общем случае от  $\omega_0/k_0$ . (Только для дисперсионной зависимости (8.37) связь между  $\Delta\omega$ ,  $\Delta k$  такова, что  $\Delta\omega/\Delta k = \omega_0/k_0$  и огибающая «приклеена» к своим пульсациям и бежит вместе с ними.)

Из данного примера видно, что волновой пакет может распространяться со скоростью, отличной от скорости отдельных составляющих волн. Но форма волнового пакета при его распространении в данном случае еще не меняется.

**2. Нерасплывающийся волновой пакет.** Теперь перейдем к более общему случаю движения волнового пакета в безграничной однородной среде, характеризуемой некоторой дисперсионной зависимостью  $\omega(k)$ , отличной от простейшего соотношения  $\omega = ku$ ,  $u = const$ . Пусть волновой пакет задан распределением поля в нем в фиксированный момент времени  $t = 0$  в виде

$$E(z, 0) = E_0(z)e^{ik_0z}. \quad (9.10)$$

Данное начальное распределение представляет собой модулированную волну с основной длиной волны  $\lambda = 2\pi/k_0$  и амплитудой, определяемой функцией  $|E_0(z)|$ .

Вслед за заданием начального распределения сразу возникает вопрос, чем определяется поведение волны при  $t > 0$ ? Ясно, что не волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

так как решения последнего, как мы убедились в п.2 § 8.6., представляют недиспергирующую волну. Следовательно, для решения данной задачи требуется иной подход, демонстрируемый ниже.

В случае волн с дисперсией нам известно поведение каждой гармонической составляющей распределения (9.10), которая перемещается со своей фазовой скоростью. Следовательно, для определения функции  $E(z, t)$  необходимо вначале распределение  $E(z, 0)$  представить в виде разложения

$$E(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k)e^{ikz} dk \quad (9.11)$$

на гармонические составляющие  $\hat{E}(k)e^{ikz}$ , а затем вновь собрать эти гармоники со своими фазовыми множителями  $e^{-i\omega(k)t}$  и получить ответ

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k)e^{i[kz - \omega(k)t]} dk. \quad (9.12)$$

Это — формальное решение, так как для произвольных  $\hat{E}(k)$  и  $\omega(k)$  не предоставляет возможности для анализа результата. Поэтому сузим задачу, наложив ограничение на протяженность области вдоль оси  $z$ , занятой модулированной волной (9.10). Примем, что этот размер  $L$  намного больше длины волны, т. е.  $k_0 L \gg \pi$ . Тогда, как следует из соотношения неопределенности  $\Delta k L \sim \pi$ , ширина спектра функции  $E(z, 0)$  достаточно мала:

$$\Delta k \sim (\pi/L) \ll k_0,$$

и спектральная плотность  $\hat{E}(k)$ , входящая в интеграл (9.2), отлична от нуля только в малой окрестности точки  $k = k_0$  с шириной  $\Delta k$ . «Центр» спектральной плотности находится в точке  $k = k_0$ , т. к. модулированной функции (9.10) соответствует спектр огибающей, сдвинутый на несущую частоту  $k_0$  (аналогично соотношению (8.12)), т. е.

$$\hat{E}(k) = \hat{E}_0(k - k_0), \quad \text{где} \quad \hat{E}_0(k) \doteq E_0(z). \quad (9.13)$$

В этом случае истинную дисперсионную зависимость  $\omega(k)$  для небольшого интервала интегрирования можно заменить первыми членами ее разложения в ряд Тейлора

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}(k_0)(k - k_0) + \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) \frac{(k - k_0)^2}{2}, \quad (9.14)$$

что принципиально увеличивает возможности анализа результата (9.12).

Вначале ограничимся двумя первыми членами суммы (9.14). Тогда

$$\omega(k) = \omega_0 + V_q(k - k_0), \quad (9.15)$$

где  $\omega_0 = \omega(k_0)$ ,  $V_q = d\omega/dk$  (в точке  $k_0$ ). Подставим выражение (9.15) в интеграл (9.12), учтя при этом соотношения (9.13). Промежуточный результат запишем в виде

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_0(k - k_0) e^{i[(k - k_0)z - \omega_0 t - V_q(k - k_0)t + k_0 z]} d(k - k_0).$$

Нетрудно заметить, что после вынесения  $\exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]$  остающийся интеграл определяет функцию  $E_0(z - V_q t)$  и, следовательно, искомый результат имеет вид

$$E(z, t) = E_0(z - V_q t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (9.16)$$



Отсюда видно, что, как и в примере Стокса (9.9), огибающая волнового пакета перемещается без изменения формы. Ее скорость определяется соотношением

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0) \quad (9.17)$$

и называется *групповой скоростью*. Обратим внимание, что в рассматриваемом случае общей *линейной дисперсионной зависимости* (9.15) фазовые скорости составляющих волновой пакет волн не одинаковы, как легко заметить из рис. 9.4. (Здесь две выделенные волны с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  имеют разные фазовые скорости  $u = \omega/k$ , определяемые тангенсами соответствующих углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .)

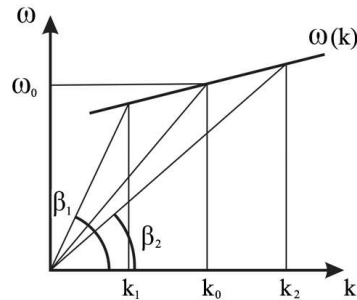


Рис. 9.4

Таким образом, мы убедились, что волновой пакет не расплывается не только при дисперсионной зависимости  $\omega = ku$ , когда фазовые скорости всех составляющих волн одинаковы, но и в более общем случае линейной зависимости (9.15).

Подчеркнем еще раз: условие постоянства фазовых скоростей не является необходимым условием неизменности формы волнового пакета. Волновой пакет не расплывается тогда, когда у всех составляющих волновой пакет *групп волн* групповые скорости одинаковы.

**3. О расплывании волнового пакета.** Заметим, что в общем случае нелинейной дисперсионной зависимости  $\omega(k)$ , когда

$$\omega_0'' = \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) \neq 0,$$

решение (9.16), полученное с удержанием лишь первых двух членов в разложении (9.14), справедливо только для некоторого начального промежутка времени. Этот промежуток устанавливается требованием,

чтобы дополнительный фазовый множитель под интегралом (9.12), обусловленный отброшенным членом  $\omega_0''(k - k_0)^2/2$  разложения (9.14), на интервале интегрирования мало отличался от единицы. Для этого дополнительная фаза, пропорциональная  $t$ , должна быть мала по сравнению с  $\pi/2$ , т. е.

$$|\omega_0''|(\Delta k)^2 t \ll \pi. \quad (9.18)$$

Так как  $\omega_0'' = dV_q/dk(k_0)$ , то, введя в рассмотрение разброс групповой скорости в пределах пакета

$$\Delta V_q = \left| \frac{dV_q}{dk}(k_0) \right| \Delta k,$$

условие (9.18) можно привести к виду

$$\Delta V_q t \ll \pi / \Delta k,$$

что с учетом соотношения неопределенности сводится к требованию

$$\Delta V_q t \ll L \quad (\text{или} \quad t \ll t_*, \quad t_* = L / \Delta V_q). \quad (9.19)$$

Таким образом, решение (9.16) справедливо на начальном этапе процесса, удовлетворяющем условию (9.19), когда изменение протяженности пакета, обусловленное разбросом групповой скорости отдельных групп волн в пределах пакета, мало по сравнению с начальным размером  $L$ .

Из приведенных качественных рассуждений понятно, что учет квадратичного члена в разложении (9.14) приводит к расплыванию волнового пакета, причем скорость расплывания определяется характерным параметром  $\Delta V_q = \omega_0'' \Delta k$ . Очевидно, что при  $t \rightarrow \infty$   $L(t) \approx \Delta V_q t$ , а амплитуда поля в пакете, как следует из закона сохранения энергии  $LE_0^2 = L(t)E^2(t)$ , должна спадать пропорционально  $t^{-1/2}$ .

**4\*. Количественный (асимптотический) анализ.** Для количественного описания движения рассматриваемого пакета бесконечные пределы интегрирования в решении (9.12) заменим на конечные (с учетом ширины спектра  $\hat{E}(k) = \hat{E}_0(k - k_0)$ ), а функцию  $\omega(k)$  — на выражение (9.14). Результат нетрудно привести к виду

$$E(z, t) = \frac{e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \hat{E}_0(k - k_0) \exp\{i(k - k_0)[z - (V_q + \frac{1}{2}V_q'(k - k_0))t]\} d(k - k_0)$$

или, после введения обозначений

$$\chi = k - k_0, \quad \Omega = \left[ \chi \frac{z}{t} - (V_q \chi + \frac{1}{2}V_q' \chi^2) \right], \quad (9.20)$$

к виду

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \hat{E}_0(\chi) e^{i t \Omega(z/t, \chi)} d\chi. \quad (9.21)$$

Отношение  $z/t$ , входящее в функцию  $\Omega$  (9.20), рассматривается как свободный параметр, а величины

$$V_q = \frac{d\omega}{dk}(k_0), \quad V'_q = \frac{dV_q}{dk}(k_0) = \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0)$$

являются константами. Интеграл, входящий в решение (9.21), все еще не может быть точно вычислен. Однако для больших значений времени для него можно получить асимптотическое приближение, используя так называемый *метод стационарной фазы*, кратко описанный в следующем параграфе.

Из этого изложения следует, что асимптотическое поведение интеграла при больших  $t$  зависит от положения точки  $\chi_*$  стационарной фазы относительно промежутка интегрирования  $[-\Delta k, \Delta k]$ : если  $-\Delta k < \chi_* < \Delta k$ , то главный член асимптотического разложения интеграла пропорционален  $t^{-1/2}$ , а в случае  $|\chi_*| > \Delta k$  интеграл спадает быстрее (как  $t^{-1}$ ). Так как фаза  $\Omega(\chi)$ , задаваемая выражением (9.20), содержит в своем составе параметр  $z/t$ , точка стационарной фазы

$$\chi_* = \frac{z - V_q t}{V'_q t},$$

определяемая условием  $\Omega'(\chi) = 0$ , занимает положение внутри промежутка интегрирования, если

$$|z - V_q t| < |V'_q| \Delta k t = \Delta V_q t. \quad (9.22)$$

При этом главный член асимптотического разложения интеграла определяется формулой (9.30), и решение (9.21) для области (9.22) приобретает вид

$$E(z, t) \sim \frac{\hat{E}_0(\chi_*)}{\sqrt{2\pi}} \exp\{i[k_0 z - \omega_0 t + t\Omega(\chi_*) \pm \pi/4]\} \sqrt{\frac{2\pi}{|V'_q|}} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

что после подстановки значения

$$\Omega(\chi_*) = \chi_* \frac{z - V_q t}{t} - \frac{1}{2} V'_q \chi_*^2 = \frac{1}{2} \frac{(z - V_q t)^2}{V'_q t^2}$$

дает

$$E(z, t) \sim \frac{\hat{E}_0(\chi_*)}{\sqrt{|V_q|}} \exp \left\{ i \left[ k_0 z - \omega_0 t + \frac{1}{2} \frac{(z - V_q t)^2}{V_q' t} \pm \frac{\pi}{4} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (9.23)$$

Таково асимптотическое поведение поля  $E(z, t)$  в центральной части волнового пакета, занимающей положение (9.22) вокруг «центра»  $z = V_q t$ , перемещающегося со скоростью  $V_q$ . Оно подтверждает результаты качественного рассмотрения, приведенные выше. Протяженность главной зоны (9.22) растет пропорционально  $t$  как  $L(t) = \Delta V_q t$ , где  $\Delta V_q$  есть характерная величина разброса групповой скорости внутри пакета; вне главной зоны поля затухают пропорционально  $t^{-1}$  и поэтому здесь не рассматриваются. Осцилляции, заполняющие волновой пакет в пределах зоны (9.22), описываются экспоненциальным множителем в решении (9.23). Наличие в показателе экспоненты слагаемого, пропорционального  $(z - V_q t)^2$ , приводит лишь к незначительному отклонению волнового числа и частоты осцилляций от значений  $k_0$  и  $\omega_0$  (по мере удаления от центра пакета). Этот вопрос не представляет большого интереса и здесь также не обсуждается.

Полученное решение прокомментируем с помощью примера. Пусть начальное распределение  $E_0(z)$  из (9.10) задано спектром прямоугольной формы

$$E_0(k) = \begin{cases} E_0 & \text{при } |k| < \Delta k, \\ 0 & \text{при } |k| > \Delta k, \end{cases}$$

где  $\Delta k \ll k_0$ . Тогда

$$E(z, 0) = E_0(z) e^{ik_0 z} = \frac{2E_0 \Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\Delta k z)}{\Delta k z} e^{ik_0 z},$$

и решение (9.16) для начального этапа  $t \ll t_*$ , где по определению (9.19)

$$t_* = \frac{\pi}{|\omega_0''|(\Delta k)^2} = \frac{\pi}{\Delta V_q \Delta k} = \frac{L}{\Delta V_q},$$

имеет вид

$$E(z, t) = \frac{2E_0 \Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\Delta k (z - V_q t))}{\Delta k (z - V_q t)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (9.24)$$

График вещественной части функции (9.24) для фиксированного значения  $t$  представлен на рис. 9.5. Как и в примере Стокса, в результате получился волновой цуг со средним волновым числом  $k_0$  и с амплитудой,

модулированной медленно меняющейся огибающей, которая формирует систему волновых пакетов. Пакеты распространяются с групповой скоростью  $V_q$ , в то время как составляющие их осцилляции распространяются с фазовой скоростью  $\omega_0/k_0$ .

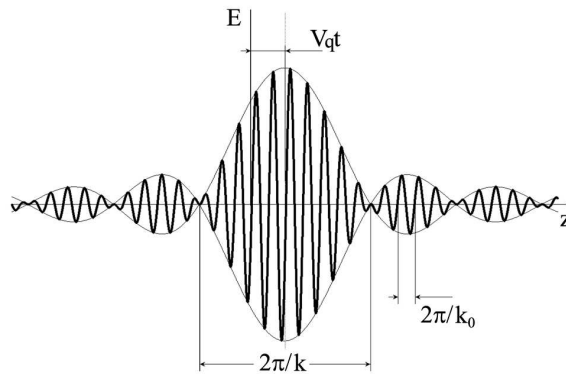


Рис. 9.5

По прошествии большого промежутка времени, т. е. при  $t \gg t_*$ , волновой пакет преобразуется в цуг волн, занимающий область  $|z - V_q t| \leq \Delta V_q t$ , в пределах которой волновое число осцилляций меняется от значения  $k_0$  (в центре) до  $k_0 + \Delta k$  (по краям) при амплитуде, неизменной по пространству и убывающей со временем пропорционально  $t^{-1/2}$ .

## 9.4. Метод стационарной фазы<sup>4</sup>

Здесь исследуется обобщенный интеграл Фурье

$$I(t) = \int_a^b f(\chi) e^{it\Omega(\chi)} d\chi, \quad b > a \quad (9.25)$$

в случае больших положительных  $t$ . При этом предполагается, что  $f(\chi)$  и  $\Omega(\chi)$  — вещественные функции и интеграл (9.25) существует. Если

<sup>4</sup>Изложение построено по замечательной книге: Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

названные функции непрерывно дифференцируемы, то для асимптотической оценки интеграла (9.25) можно попытаться применить метод интегрирования по частям, который дает следующее асимптотическое представление:

$$I(t) = \frac{i}{t} \left[ \frac{f(a)}{\Omega'(a)} e^{it\Omega(a)} - \frac{f(b)}{\Omega'(b)} e^{it\Omega(b)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \quad (9.26)$$

Этот метод становится непригодным, если производная  $\Omega'(\chi)$  обращается в нуль в какой-либо точке интервала  $[a, b]$ . Если же  $\Omega'(\chi) \neq 0$  на промежутке  $[a, b]$ , то, согласно формуле (9.26), основной вклад в асимптотику интеграла  $I(t)$  вносят только окрестности конечных точек. При этом быстрые колебания функции  $e^{it\Omega(\chi)}$  уничтожают вклад в интеграл от внутренних точек промежутка.

Если  $\Omega'(\chi)$  обращается в нуль на промежутке интегрирования (иначе говоря, если фаза имеет стационарные точки), вклад в асимптотическое разложение вносят как окрестности конечных точек, так и окрестности стационарных точек, причем вклад последних значительнее. Этот факт хорошо иллюстрируется на рис. 9.6, где приведен пример функции  $(1 + \sqrt{\chi}) \cos 50(2 - \chi)^2$  со стационарной точкой. В точках, далеких от конечных и стационарных, положительные и отрицательные полу-волны взаимно погашаются. К тому же, как видно из рис. 9.6, взаимное погашение колебаний оказывается меньшим в окрестности стационарной точки, чем в окрестностях конечных точек. Поэтому главные члены асимптотического разложения интегралов Фурье должны определяться именно окрестностями стационарных точек.

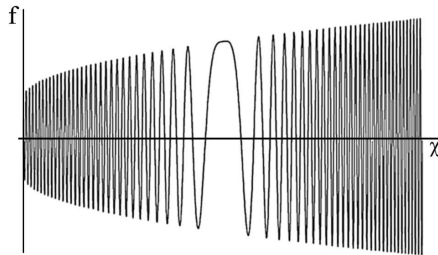


Рис. 9.6

Метод стационарной фазы, разработанный Кельвиным, позволяет учитывать вклад стационарной точки  $\chi = \chi_*$  в асимптотику с помощью

разложения функций  $f(\chi)$  и  $\Omega(\chi)$  по степеням  $(\chi - \chi_*)$ . Этот вклад представляет собой величину порядка  $t^{-1/2}$  и, следовательно, именно стационарные точки определяют характер главного члена асимптотического разложения интеграла  $I(t)$ , так как, напомним, вклад конечных точек, как показывает формула (9.26), пропорционален  $t^{-1}$  и быстро затухает.

Итак, пусть функция  $\Omega(\chi)$  имеет единственную стационарную точку  $\chi_*$ , лежащую внутри промежутка  $[a, b]$ . Кроме того, принимается, что функция  $f(\chi)$  ограничена в точке  $(\chi = \chi_*)$ . Главный член разложения интеграла  $I(t)$  определяется вкладом окрестности точки  $(\chi = \chi_*)$ , поэтому пределы интегрирования можем заменить на  $\chi_* - \delta$  и  $\chi_* + \delta$ , где  $\delta$  — малое положительное число. Таким образом, имеем

$$I(t) \sim \int_{\chi_* - \delta}^{\chi_* + \delta} f(\chi) e^{it\Omega(\chi)} d\chi. \quad (9.27)$$

В первом приближении функцию  $f(\chi)$  можно заменить на  $f(\chi_*)$ , а функцию  $\Omega(\chi)$  представить ее тейлоровским разложением

$$\Omega(\chi) = \Omega(\chi_*) + \frac{1}{2}\Omega''(\chi_*)(\chi - \chi_*)^2 + \dots,$$

поскольку  $\Omega'(\chi_*) = 0$ . При этом интеграл (9.27) можно переписать как

$$I(t) \sim f(\chi_*) e^{it\Omega(\chi_*)} \int_{\chi_* - \delta}^{\chi_* + \delta} \exp[it\Omega''(\chi_*)(\chi - \chi_*)^2/2] d\chi. \quad (9.28)$$

Используя вновь допущение, что наиболее существенный вклад в асимптотику вносит ближайшая окрестность стационарной точки, заменим пределы интегрирования на  $-\infty, \infty$ . Полагая теперь  $\chi - \chi_* = z$  и учитывая четность подынтегральной функции, перепишем формулу (9.28) в виде

$$I(t) \sim 2f(\chi_*) e^{it\Omega(\chi_*)} \int_0^{\infty} \exp[it\Omega''(\chi_*)z^2/2] dz. \quad (9.29)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой Коши

$$\int_C F(z) dz = 0$$

для аналитической функции  $F(z) = \exp[it\Omega''(\chi_*)z^2/2]$ . Замкнутый контур  $C$  составим, как на рис. 9.7, из участков  $C_1$ ,  $C_R$ ,  $C_2$ . Интеграл по дуге окружности  $C_R$  радиуса  $R$  при  $R \rightarrow \infty$  обращается в нуль (вычисления опускаем).

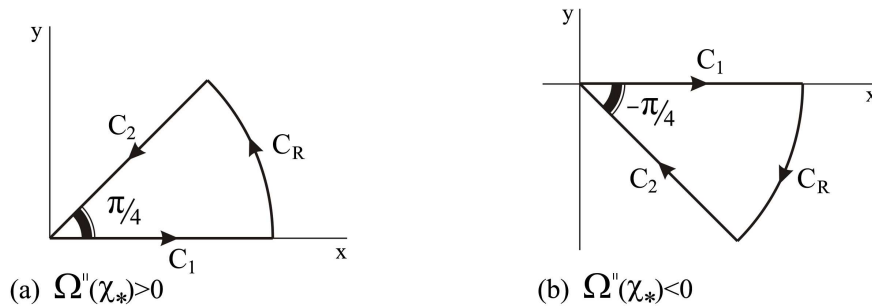


Рис. 9.7

Тогда искомый интеграл сводится к интегралу по лучу  $-C_2$ , уходящему на бесконечность, на котором  $z = r \exp(\pm i\pi/4)$ ,  $z^2 = \pm ir^2$  (в зависимости от знака  $\Omega''(\chi_*)$ ), причем

$$\int_{-C_2} = \exp(\pm i\pi/4) \int_0^{\infty} \exp[\mp \frac{1}{2} t \Omega''(\chi_*) r^2] dr = \exp(\pm i\pi/4) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(\chi_*)|}} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

т. е. исходный интеграл Фурье выразился через вещественный интеграл Пуассона. Следовательно, соотношение (9.29) сводится к следующему окончательному виду

$$I(t) \sim f(\chi_*) e^{i[t\Omega(\chi_*) \pm \pi/4]} \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(\chi_*)|}} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (9.30)$$

Выражение (9.30) и определяет вклад, связанный со стационарной фазой. Заметим, что эта величина имеет порядок  $t^{-1/2}$  и, значит, является главным членом в асимптотическом разложении  $I(t)$  для больших  $t$ . Можно строго показать, что ошибки, появляющиеся при выводе формулы (9.30) из (9.27) путем замены  $f(\chi)$  на  $f(\chi_*)$ , а  $\Omega$  на  $(1/2)\Omega''(\chi_*)(\chi - \chi_*)^2$ , и замены пределов интегрирования (9.28) на  $\pm\infty$  оказываются порядка  $1/t$ .



## 9.5. О затухании и усилении электромагнитной волны в среде

Как следует из материала § 9.1, 9.2, в рамках классической электродинамики прохождение электромагнитной волны по среде может быть связано только с ее ослаблением. Открытие эффекта усиления волны средой стало возможным в результате создания квантовой физики и привело к возникновению лазеров и мазеров. Поэтому данный параграф мы посвятим краткому изложению элементарных квантовых представлений, приводящих к пониманию физического механизма как усиления, так и ослабления волны средой, причем, для краткости, любую электромагнитную волну мы здесь будем называть светом. (Подробно материал данного параграфа можно найти в прекрасных учебниках по физической оптике Ахманова–Никитина и Бутикова.)

1. Начнем с напоминания, что электрон в атоме может иметь лишь дискретный набор значений энергии. Пусть в каждом атоме содержится один оптический электрон с энергетическими уровнями, которые обозначим  $i, k, l, m, \dots$ . Возьмем ансамбль атомов в  $1\text{см}^3$  и подсчитаем число атомов  $\mathcal{N}_i$  с данной энергией  $\mathcal{E}_i$ . Это число называется *заселенностью уровня*. Распределение числа атомов по энергетическим уровням в условиях термодинамического равновесия является бoльцмановским:

$$\frac{\mathcal{N}_i^{\text{равн}}}{\mathcal{N}_k^{\text{равн}}} = \frac{e^{-\mathcal{E}_i/kT}}{e^{-\mathcal{E}_k/kT}}.$$

Рассматриваемое равновесие — динамическое. Оно осуществляется посредством постоянного обмена квантами между полем излучения и материальными телами, в результате которого происходят переходы атомов между уровнями энергии и изменяется число квантов в поле излучения. Кванты могут поглощаться атомами, которые при этом переходят на более высокий уровень, например, от уровня  $\mathcal{E}_i$  на уровень  $\mathcal{E}_k$ . Напротив, при переходе атома с уровня  $\mathcal{E}_k$  на  $\mathcal{E}_i$  излучается квант с энергией

$$\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_i = \hbar\omega_0, \quad \hbar = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}. \quad (9.31)$$

Согласно принципу детального равновесия обмен квантами должен уравновешиваться для каждой частоты в отдельности. Поэтому рассмотрим лишь одну частоту, пусть связанную с парой уровней  $i, k$ . Для других частот все рассуждения аналогичны.

**2. Спонтанные и вынужденные переходы.** С нижнего уровня на верхний переходы возможны только с поглощением кванта энергии, т. е. под влиянием излучения, падающего на атом. Такие переходы называются *вынужденными*. Переходы с верхнего уровня на нижний могут быть как вынужденными, под влиянием падающего на атом излучения, так и *спонтанными*, или самопроизвольными, происходящими независимо от падающего излучения.

Если обозначить через  $\nu_{ki}^{(c)}$ ,  $\nu_{ki}^{(B)}$  частоты спонтанных и вынужденных переходов  $k \rightarrow i$  в единице объема, а через  $\nu_{ik}^{(B)}$  — с нижнего на верхний (вынужденно), то условие динамического равновесия записывается в виде

$$\nu_{ki}^{(c)} + \nu_{ki}^{(B)} = \nu_{ik}^{(B)}. \quad (9.32)$$

**3. Коэффициенты Эйнштейна.** В 1916 г. Эйнштейн предложил элементарную квантовую картину динамического равновесия между излучением и веществом, приводящую к правильной формуле для спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела (формуле Планка). Пусть  $A_{ki}$  — вероятность спонтанного перехода  $k \rightarrow i$  в секунду,  $\mathcal{N}_k$  — концентрация атомов на верхнем уровне. Тогда

$$\nu_{ki}^{(c)} = \mathcal{N}_k A_{ki},$$

и это выражение можно рассматривать как уточнение смысла постоянной  $A_{ki}$ . Частота вынужденных переходов пропорциональна спектральной плотности излучения  $U_\omega$  на частоте  $\omega_0$  (т. е. энергии излучения в единице объема, приходящейся на частоту  $\omega_0$ .) Обозначим  $B_{ki}$ ,  $B_{ik}$  вероятности соответствующих вынужденных переходов в секунду, отнесенные к спектральной плотности излучения  $U_\omega$ . Тогда

$$\nu_{ki}^{(B)} = \mathcal{N}_k B_{ki} U_\omega, \quad \nu_{ik}^{(B)} = \mathcal{N}_i B_{ik} U_\omega.$$

Следовательно, условие динамического равновесия (9.32) принимает вид

$$\mathcal{N}_k A_{ki} + \mathcal{N}_k B_{ki} U_\omega = \mathcal{N}_i B_{ik} U_\omega.$$

Так как в равновесии  $\mathcal{N}_k \sim \exp(-\mathcal{E}_k/kT)$ ,  $\mathcal{N}_i \sim \exp(-\mathcal{E}_i/kT)$ , отсюда следует равенство

$$e^{-\mathcal{E}_k/kT} A_{ki} + e^{-\mathcal{E}_k/kT} B_{ki} U_\omega = e^{-\mathcal{E}_i/kT} B_{ik} U_\omega,$$

разрешив которое относительно  $U_\omega$ , получаем

$$U_\omega = \frac{A_{ki}}{B_{ki}} \frac{1}{(B_{ik}/B_{ki}) e^{(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_i)/kT} - 1}.$$

## 9.5. Затухание и усиление электромагнитной волны в среде 103

(Величины  $A_{ki}, B_{ki}, B_{ik}$  называют коэффициентами Эйнштейна.) Теперь заметим, что в предельном случае  $T \rightarrow \infty$  спектральная плотность излучения также должна неограниченно возрастать. Это возможно лишь при условии

$$B_{ik} = B_{ki}.$$

При этом предыдущая формула с учетом равенства (9.31) приобретает вид

$$U_\omega = \frac{A_{ki}}{B_{ki}} \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1}$$

и совпадает с формулой Планка для спектральной плотности равновесного излучения, если коэффициенты Эйнштейна связаны условием

$$\frac{A_{ki}}{B_{ki}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}.$$

Важно подчеркнуть, что для получения формулы Планка Эйнштейну пришлось предположить существование вынужденного (или, как часто говорят, *индуцированного*) излучения), причем, как выяснилось, вероятности вынужденных переходов равны.

**4.** Отметим разницу между спонтанным и индуцированным излучениями.

Испущенные в результате спонтанных переходов кванты имеют случайное направление распространения, случайную поляризацию и случайную фазу.

Кванты, испущенные в результате вынужденных переходов, коррелируют по своим свойствам с излучением, которое вызывает переход. Вынужденное излучение обладает той же поляризацией, тем же направлением распространения и той же фазой, что и вынуждающее переход излучение. Это чрезвычайно важное свойство индуцированного излучения.

**5.** Вернемся к прохождению света через среду. Рассмотрим пучок света с частотой  $\omega_0$ , где  $\hbar\omega_0 = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_i$ . Пусть  $W_\omega$  — спектральная плотность энергии в пучке,  $S = cW_\omega$  — интенсивность света (плотность потока энергии), меняющаяся вдоль направления пучка (схематический рис. 9.8). Она изменяется в результате поглощения квантов атомами среды  $\mathcal{N}_i$ , приводящего к уменьшению плотности потока, и вследствие вынужденного излучения атомов  $\mathcal{N}_k$ , приводящего к увеличению плотности  $W_\omega$ . Баланс энергии пучка в слое толщиной  $dz$

$$S(z + dz) - S(z) = \hbar\omega_0(B_{ki}\mathcal{N}_k W_\omega - B_{ik}\mathcal{N}_i W_\omega)dz = \hbar\omega_0 B \frac{S}{c} (\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i) dz$$

приводит к уравнению для интенсивности света

$$\frac{dS}{dz} = \alpha S, \quad \text{где} \quad \alpha = \hbar\omega_0(\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i)B/c, \quad B = B_{ki} = B_{ik}.$$

Из решения этого уравнения

$$S(z) = S_0 e^{\alpha z}$$

видно, что интенсивность света в среде меняется по экспоненциальному закону, причем знак показателя экспоненты зависит от знака разности заселенностей уровней ( $\mathcal{N}_k - \mathcal{N}_i$ ).

Если среда находится в состоянии теплового равновесия, то  $\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_i = e^{-\hbar\omega_0/kT}$ . Например, для видимого интервала частот и комнатной температуры имеем  $\hbar\omega_0/kT \approx 10^2$ , т. е. тепловой заселенностью верхнего уровня можно пренебречь и для интенсивности записать

$$S(z) = S_0 e^{-|\alpha|z}, \quad |\alpha| = \hbar\omega_0 \mathcal{N} B/c.$$

Эта формула описывает привычное уменьшение интенсивности света в среде (*закон Бугера*). То есть проведенный выше анализ выявляет и *механизм* этого уменьшения, заключающийся в следующем. В результате вынужденных переходов атомов  $i \rightarrow k$  плотность энергии пучка уменьшается. При переходе  $k \rightarrow i$  часть квантов возвращается в пучок, но только часть — кванты, испущенные в результате вынужденных переходов. Кванты, испущенные спонтанно, в пучок не возвращаются, как схематически изображено на рис. 9.8, что и является причиной суммарного уменьшения его интенсивности.

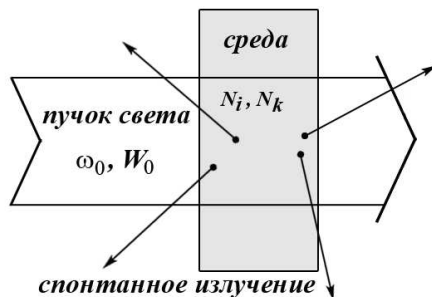


Рис. 9.8

**6. Условия усиления.** Если привести систему атомов в неравновесное состояние, нарушить распределение Больцмана, сделав  $\mathcal{N}_k > \mathcal{N}_i$  (т.

## 9.5. Затухание и усиление электромагнитной волны в среде 105

е. создать *инверсную заселенность уровней*), тогда коэффициент  $\alpha > 0$  и среда действует как усилитель светового потока. Это позволяет создавать генераторы и усилители волн, основанные на индуцированном излучении, которые для светового диапазона называются *лазерами*, а для микроволнового — *мазерами*. В полном виде концепцию лазера разработали академики Басов, Прохоров в СССР и Таунс, Шавлов в США. В 1964 г. Басову, Прохорову и Таунсу была присуждена Нобелевская премия.

## Глава 10

# СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ. РЕЗОНАТОРЫ. ВОЛНОВОДЫ

Данная глава посвящена изучению монохроматических электромагнитных волн в областях, ограниченных металлическими стенками, применительно к резонаторам и волноводам, являющимся основными элементами СВЧ-техники. Мы ограничиваемся изучением кинематики полей в простейших вариантах названных устройств в нулевом приближении идеально проводящих границ и не обсуждаем подробно вопросы возбуждения этих полей. Вследствие малости толщины скин-слоя при частотах СВЧ-диапазона, учет потерь, обусловленных конечной проводимостью, не приводит к существенной перестройке полей нулевого приближения. Поэтому данные результаты имеют самостоятельное значение, позволяя объяснить характерные особенности в действии рассматриваемых устройств. Учет конечной проводимости стенок, осуществляемый с введением *приближенного граничного условия Леонтовича*, здесь продемонстрирован на примере возбуждения вынужденных колебаний полей в плоской щели. В связи с этим обсуждено понятие добротности резонатора.

Начнем главу с рассмотрения стоячих волн и построения примеров решений для простейших резонатора и волновода.

## 10.1. Стоячие волны

1. Это название используется для обозначения волны, получающейся от сложения падающей и отраженной волн. Чтобы увидеть характерные свойства, позволяющие результат суперпозиции назвать *стоячей* волной (в противовес «нормальной» распространяющейся волне), возьмем плоскую идеально проводящую стенку (рис. 10.1) и бросим на нее по нормали волну с электрическим полем

$$\mathbf{E}_{\text{пад}}(z, t) = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(-kz - \omega t)} \quad (k = \omega/c = 2\pi/\lambda). \quad (10.1)$$

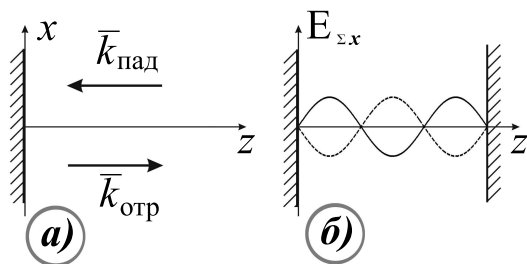


Рис. 10.1

Так как внутри стенки  $\mathbf{E} \equiv 0$ , электрическое поле отраженной волны можно выписать сразу в виде

$$\mathbf{E}_{\text{отр}}(z, t) = -\hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (10.2)$$

имея в виду, что при этом условие непрерывности  $\mathbf{E}_\tau$  на границе  $z = 0$  выполняется автоматически. Относительно характера поляризации падающей волны пока никаких ограничений не вводится; считаем, что  $\hat{\mathbf{E}}_0$  — произвольная комплексная амплитуда, имеющая компоненты по направлениям  $x, y$ , перпендикулярным вектору  $\mathbf{k}_{\text{пад}}$ .

В результате сложения полей (10.1), (10.2) имеем

$$\mathbf{E}_\Sigma(z, t) = -2i\hat{\mathbf{E}}_0 \sin kz e^{-i\omega t}, \quad (10.3)$$

а суммарное магнитное поле, складывающееся из составляющих

$$\mathbf{B}_{\text{пад}} = [-\mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{E}}_0] e^{i(-kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}_{\text{отр}} = [\mathbf{e}_z \times (-\hat{\mathbf{E}}_0)] e^{i(kz - \omega t)},$$

определяемых соотношениями (7.31) при  $\epsilon\mu = 1$ , приобретает вид

$$\mathbf{B}_\Sigma(z, t) = -2[\mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{E}}_0] \cos kz e^{-i\omega t}. \quad (10.4)$$

Результирующие поля (10.3), (10.4) обладают характерными особенностями. Во-первых, это — независимость фазы колебаний от пространственной координаты, так что каждое из полей  $\mathbf{E}_\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma$  совершает колебания с частотой  $\omega$  синфазно в пространстве, но в каждой точке со своей амплитудой. Во-вторых, в пространстве существуют фиксированные плоскости (узлы), где амплитуды колебаний равны нулю. Для поля  $\mathbf{E}_\Sigma$  это плоскости  $kz_n = n\pi$ , а для  $\mathbf{B}_\Sigma$  —  $kz_n = n\pi + \pi/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Между узлами находятся плоскости максимальных амплитуд (пучности). Третьей особенностью — отсутствие переноса энергии в полях (10.3), (10.4), т. е.

$$\langle S_z \rangle = 0,$$

покажем, воспользовавшись правилом (7.19) вычисления среднего значения произведения применительно к вектору Пойнтинга. Имеем

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}}_\Sigma^* \times \hat{\mathbf{B}}_\Sigma]_z = \frac{c}{8\pi} (-4 \sin kz \cos kz) \text{Re}[i \hat{\mathbf{E}}_0^* \times [\mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{E}}_0]]_z = 0,$$

так как  $\text{Re}[i \hat{\mathbf{E}}_0^* \times [\mathbf{e}_z \times \hat{\mathbf{E}}_0]]_z = \text{Re}[i |\hat{\mathbf{E}}_0|^2] = 0$ .

Именно перечисленные свойства характерны для стоячей волны.

**2.** Рассмотрим более подробно «конструкцию» полей в этой волне, от общего случая комплексной амплитуды  $\hat{\mathbf{E}}_0$  обратившись к двум конкретным случаям.

**Линейная поляризация.** Пусть  $\hat{\mathbf{E}}_0 = E_0 \mathbf{e}_x, E_0$  — вещественная константа. При этом поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\Sigma(z, t) &= -2E_0 \sin kz \sin \omega t \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{B}_\Sigma(z, t) &= -2E_0 \cos kz \cos \omega t \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (10.5)$$

в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны, напоминая этим плоскую монохроматическую волну, но по фазе сдвинуты на  $\pi/2$ . Поэтому, например, когда электрическое поле максимально, магнитное поле во всем пространстве обращается в нуль, и наоборот.

**Круговая поляризация.** Ей соответствует комплексная амплитуда

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = E_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y).$$



Очевидно, что суммарный вектор  $\mathbf{E}_\Sigma$  в каждой точке пространства совершает вращение с угловой скоростью  $\omega \mathbf{e}_z$  без изменения модуля. Нетрудно представить, что вектор  $\mathbf{B}_\Sigma$  должен вести себя аналогичным образом. Формулы

$$\mathbf{E}_\Sigma(z, t) = -2iE_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \sin kz e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{B}_\Sigma(z, t) = 2iE_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \cos kz e^{-i\omega t},$$

получающиеся для рассматриваемого случая из соотношений (10.3), (10.4), или их вещественные аналоги

$$\mathbf{E}_\Sigma(z, t) = -2E_0 \sin kz (\mathbf{e}_x \sin \omega t - \mathbf{e}_y \cos \omega t),$$

$$\mathbf{B}_\Sigma(z, t) = 2E_0 \cos kz (\mathbf{e}_x \sin \omega t - \mathbf{e}_y \cos \omega t),$$

подтверждая высказанные утверждения, демонстрируют еще одну особенность, непривычную для электромагнитных волн. Здесь поля  $\mathbf{E}_\Sigma, \mathbf{B}_\Sigma$  в любой точке, вращающиеся с угловой скоростью  $\omega \mathbf{e}_z$ , лежат на одной прямой, как показано на рис. 10.2. Модули  $|\mathbf{E}_\Sigma| = 2E_0 |\sin kz|$ ,  $|\mathbf{B}_\Sigma| = 2E_0 |\cos kz|$  зависят от координаты  $z$  так, что в названных раньше плоскостях  $z_n = n\pi/k = n\lambda/2$  и  $z_n = (n\pi + \pi/2)/k = n\lambda/2 + \lambda/4$  принимают экстремальные значения.

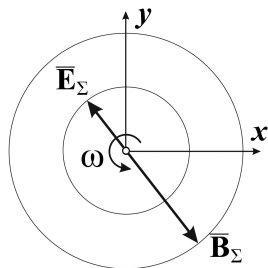


Рис. 10.2

## 10.2. Стоячие волны при отражении от стенки конечной проводимости

1. Используемое в предыдущем параграфе предположение  $\sigma = \infty$ , позволяющее не учитывать проникновение волны за границу раздела

и использовать граничное условие  $\mathbf{E}_\tau = 0$ , является, конечно, идеализацией. Это обстоятельство порождает естественные вопросы: как себя проявляет конечность проводимости в структуре стоячей волны, возникающей при отражении, например, от металлической поверхности, и какова мощность потерь (или энергетический коэффициент поглощения) при отражении. Для получения ответа необходимо схему из рис. 10.1, состоящую из падающей и отраженной волн, дополнить проходящей волной, распространяющейся в проводящей среде. Исследование структуры этой волны даст нам возможность сформулировать недостающее граничное условие на отражающей поверхности взамен условия  $\mathbf{E}_\tau = 0$ .

2. С подобной проблемой нам придется встретиться и в следующих разделах. Поэтому структуру волны, проникающей в толщу металлического проводника, и вытекающее отсюда граничное условие мы рассмотрим в более общем виде. Для начала вспомним, что в металлах диэлектрическая проницаемость (9.1) является комплексной, причем такой, что в области радиочастот ее вещественной частью можно пренебречь и принять

$$\epsilon(\omega) = i(4\pi\sigma/\omega) \quad (\sigma \gg \omega).$$

Тогда волновое число для проходящей в металлическую стенку волны будет

$$k = \sqrt{\epsilon(\omega)} \omega/c = \sqrt{2i} \sqrt{2\pi\sigma\omega}/c$$

(принимая  $\mu = 1$ ), а структура полей в волне будет определяться выражениями, следующими из соотношений (7.31),

$$\hat{\mathbf{E}}(\xi) = \hat{E}_0 e^{ik\xi} \boldsymbol{\tau},$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\xi) = \epsilon(\omega) [\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}(\xi)] = \epsilon(\omega) \hat{E}_0 e^{ik\xi} [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}],$$

где  $\xi$  — координата вдоль направления внутренней нормали к отражающей поверхности,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной (см. рис. 10.3). В качестве  $k$  и  $\sqrt{\epsilon(\omega)}$  здесь необходимо принять значения, получающиеся при выборе  $\sqrt{2i} = +(1+i)$ . Тогда последние формулы приобретают вид, известный нам из теории скин-эффекта

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\xi) &= \hat{E}_0 \exp\left\{-\left(1-i\right)\frac{\xi}{\delta}\right\} \boldsymbol{\tau}, \\ \hat{\mathbf{H}}(\xi) &= (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \hat{E}_0 \exp\left\{-\left(1-i\right)\frac{\xi}{\delta}\right\} [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}], \end{aligned} \quad (10.6)$$

где  $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$  — толщина скин-слоя. Последняя в условиях  $\sigma \gg \omega$  намного меньше длины волны в свободном пространстве  $\lambda_0 = c2\pi/\omega$ , так как

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \ll 1.$$

(Например, для меди ( $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1}$ ) при частоте  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ , соответствующей длине волны  $\lambda_0 = 3 \text{ см}$ , отношение  $\delta/\lambda_0 \sim 2 \cdot 10^{-5}$ .)

Из соотношений (10.6) следует, что поля внутри металла и на его поверхности связаны между собой соотношением

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \mathbf{H}_t = (1+i)[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t] \quad (10.7)$$

(здесь нижние индексы  $t$  подчеркивают, что рассматриваемые поля являются тангенциальными.) Так как на границе раздела поля  $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$  непрерывны, этим же соотношением должны быть связаны поля с внешней стороны границы раздела. Таким образом, учет конечной проводимости приводит к замене граничного условия  $\mathbf{E}_\tau = 0$  на условие (10.7) (*граничное условие Леонтовича*), связывающее между собой тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на поверхности металла.

**3.** Перейдем непосредственно к задаче отражения от поверхности металла (рис. 10.4), ограничившись случаем линейно поляризованных волн, считая, кроме того, что в полупространстве  $z > 0$   $\epsilon = \mu = 1$ .

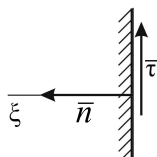


Рис. 10.3

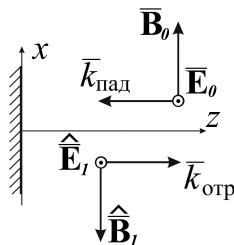


Рис. 10.4

Пусть поля в падающей и отраженной волне равны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{пад}} &= \hat{E}_0 e^{i(-kz-\omega t)} \mathbf{e}_y, & \mathbf{E}_{\text{отр}} &= \hat{E}_1 e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B}_{\text{пад}} &= \hat{E}_0 e^{i(-kz-\omega t)} \mathbf{e}_x, & \mathbf{B}_{\text{отр}} &= -\hat{E}_1 e^{i(kz-\omega t)} \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Для определения неизвестной амплитуды  $\hat{E}_1$  служит граничное условие (10.7). На границе  $x = 0$  соответствующие поля равны

$$\hat{\mathbf{H}}_t = (\hat{E}_0 - \hat{E}_1)\mathbf{e}_x, \quad \hat{\mathbf{E}}_t = (\hat{E}_0 + \hat{E}_1)\mathbf{e}_y,$$

а нормалью  $\mathbf{n}$  служит  $-\mathbf{e}_z$ . При этом, если предварительно ввести обозначение

$$\chi = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}, \quad (10.8)$$

условие (10.7) принимает вид

$$\chi(\hat{E}_0 - \hat{E}_1) = (1 + i)(\hat{E}_0 + \hat{E}_1),$$

откуда

$$\hat{E}_1 = -\hat{E}_0 \frac{1 + i - \chi}{1 + i + \chi}. \quad (10.9)$$

Тогда результат сложения  $\mathbf{E}_{\text{пад}}$  и  $\mathbf{E}_{\text{отр}}$  приобретает вид

$$\mathbf{E}_{\Sigma}(z, t) = 2\hat{E}_0 \frac{(1 - i) \sin kz + \chi \cos kz}{1 + i + \chi} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_y$$

и представляет собой *систему из двух стоячих волн*. Первая из них аналогична стоячей волне (10.3) (при  $\chi = 0$  совпадает с ней) и характеризуется системой узлов, начинающихся на отражающей поверхности. Вторая имеет существенно меньшую амплитуду и ее пучности совпадают с узлами первой, обеспечивая ненулевое электрическое поле на поверхности, необходимое для протекания тока в отражающей среде.

Мощность потерь, приходящаяся на единицу площади отражающей поверхности, определяется усредненной по времени  $z$ -компонентой вектора Пойнтинга как  $-\langle S_z \rangle$ . Выписав суммарное магнитное поле  $\mathbf{B}_{\Sigma} = \mathbf{B}_{\text{пад}} + \mathbf{B}_{\text{отр}}$  в виде

$$\mathbf{B}_{\Sigma}(z, t) = 2\hat{E}_0 \frac{(1 + i) \cos kz - i\chi \sin kz}{1 + i + \chi} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_x,$$

для  $\langle S_z \rangle = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{E}_{\Sigma} \hat{B}_{\Sigma}^*)$  несложно получить выражение

$$\langle S_z \rangle = -\frac{c}{2\pi} |\hat{E}_0|^2 \frac{\chi}{(1 + \chi)^2 + 1}.$$

(Пусть это будет задание для самостоятельного выполнения.) В рассматриваемом здесь случае  $\chi \ll 1$  полученный результат можно представить в виде

$$- \langle S_z \rangle = 2\chi \langle S_0 \rangle, \text{ где } \langle S_0 \rangle = \frac{c}{8\pi} |\hat{E}_0|^2 -$$

модуль усредненного вектора Пойнтинга падающей волны (см. (7.38)). Следовательно, энергетический коэффициент поглощения при отражении от металлической поверхности  $-\langle S_z \rangle / \langle S_0 \rangle$  равен  $2\chi$  и по порядку величины определяется отношением  $\delta/\lambda_0$ .

### 10.3. Два примера электромагнитных волн в ограниченных областях

Вспомним, что в ч.1 данного учебного пособия точные решения для областей с границами применительно к стационарным полям мы строили, используя комбинации модельных решений («потенциал однородного поля», «потенциал точечного заряда», «потенциал диполя» и др.). Для волновых полей подобный метод конструирования решений также уместен. Однако возможности его использования пока ограничены бедностью наличного ассортимента модельных решений. Фактически в нашем распоряжении имеется единственный набор точных решений в виде монохроматических плоских волн (впоследствии этот набор будет расширен). Тем не менее, как мы увидим вскоре, комбинируя несколько таких волн, можно построить решения, справедливые для ограниченных областей. А пока подобным способом, накладывая всего по две волны (падающую и отраженную), составим простейшие решения двух типов: для резонатора и для волновода.

1. Первые из названных решений (10.3), (10.4) (или более частные решения (10.5)) фактически у нас уже выписаны. Но до сих пор они рассматривались как относящиеся к полубесконечной области  $z > 0$  с единственной границей  $z = 0$ . Теперь заметим, что и для ограниченной по  $z$  области  $0 < z < z_0$  в виде щели между двумя идеально проводящими границами (идеальными плоскими зеркалами) рассматриваемые решения можно сделать пригодными, выбрав соответствующие значения  $z_0$ , обеспечивающие выполнение дополнительного граничного условия  $E_\Sigma(z_0) = 0$ .

Из материала предыдущего параграфа следует, что при фиксированной длине волны в качестве  $z_0$  может быть взято любое из значений  $n\lambda/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При этом любая компонента электрического поля в

щели, например,  $E_{\Sigma x}$ , для двух моментов времени, отстоящих на полпериода, имеет распределения, показанные на рис. 10.1(б) (для  $n = 3$ ).

Для фиксированной ширины щели справедливо будет утверждение в следующем виде. *Пустая щель ширины  $a$  между двумя плоскими зеркалами допускает решения в виде стоячих волн (10.3), (10.4) (или (10.5)), если частота  $\omega$  имеет определенные значения  $\omega_n$ , удовлетворяющие условию*

$$k_n a = n\pi, \quad \text{где } k_n = \omega_n/c.$$

Иными словами, щелевой резонатор (так можно назвать рассматриваемую щель) обладает набором собственных частот

$$\omega_n = n\pi c/a, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10.10)$$

при которых однородные уравнения Максвелла (7.21) в области  $0 < z < a$  допускают существование нетривиального решения, удовлетворяющего однородным граничным условиям  $\mathbf{E}_\tau = 0$ . Минимальной частоте  $\omega_{min} = \omega_1 = \pi c/a$  соответствует длина волны  $\lambda_{max} = 2a$ , вдвое превышающая ширину щели.

**2.** Теперь обратимся к наложению наклонно падающей и отраженной от плоскости  $x = 0$  волн, как показано на рис. 10.5, ограничившись случаем линейно-поляризованных волн. Электрическое поле соответствующих волн запишем в виде

$$\mathbf{E}_{\text{пад}} = E_0 e^{i(-\gamma x + kz - \omega t)} \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{E}_{\text{отр}} = -E_0 e^{i(\gamma x + kz - \omega t)} \mathbf{e}_y,$$

воспользовавшись нелогичными, на первый взгляд, обозначениями для компонент волновых векторов

$$\mathbf{k}_{\text{пад}} = -\gamma \mathbf{e}_x + k \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k}_{\text{отр}} = \gamma \mathbf{e}_x + k \mathbf{e}_z$$

( $\gamma, k$  — ненулевые положительные константы,  $\sqrt{\gamma^2 + k^2} = \omega/c$ ).

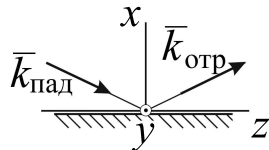


Рис. 10.5

В результирующей волне электрическое поле равно

$$\mathbf{E}_\Sigma = -2iE_0 \sin \gamma x e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y, \quad (10.11)$$

откуда видно, что здесь мы встречаемся с монохроматической *неплоской* волной, бегущей в направлении оси  $z$  с амплитудой, зависящей от поперечной координаты  $x$ , причем в фиксированных плоскостях  $x = x_n = n\pi/\gamma$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , как и в плоскости  $x = 0$ , имеем  $E_{\Sigma y} = 0$ .

Для определения той ограниченной области, для которой решение (10.11) удовлетворяет условиям  $\mathbf{E}_\tau = 0$  на границах, обратимся к системе плоскостей, в которых  $\mathbf{E}_{\Sigma\tau} = 0$ . Это, во-первых, все плоскости  $y = \text{const}$ , т. к. поле  $\mathbf{E}_\Sigma$  везде имеет только  $y$ -компоненту, и, во-вторых, отмеченные выше плоскости  $x = 0$  и  $x = x_n$ . Следовательно, бесконечная труба прямоугольного поперечного сечения  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  (размеры  $a, b$  — произвольные) может служить той ограниченной по  $x, y$  областью, для которой решение (10.11) и соответствующее ему

$$\mathbf{B}_\Sigma = 2 \frac{E_0}{\omega/c} [-\gamma \cos \gamma x \mathbf{e}_z + ik \sin \gamma x \mathbf{e}_x] e^{i(kz - \omega t)} \quad (10.12)$$

удовлетворяет всем уравнениям Максвелла для  $\epsilon = \mu = 1$  и всем граничным условиям, если параметр  $\gamma$  принимает одно из значений

$$\gamma_m = m\pi/a, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Полученное решение представляет собой простейшее решение, демонстрирующее возможность распространения волны по волноводу конкретного (в данном случае прямоугольного) поперечного сечения.

## 10.4. Резонаторы

1. В предыдущем параграфе мы упомянули резонатор, комментируя решение, приспособленное для описания гармонических колебаний поля в ограниченной области пространства в виде плоской щели. Теперь заметим, что любая полость, окруженная хорошо проводящими границами, является резонатором, обладающим собственными частотами. При идеальных границах без сопротивления колебания поля в резонаторе, будучи возбуждены внешним источником, происходят без затухания, а при наличии сколь угодно малого сопротивления для поддержания незатухающих колебаний необходимо присутствие внешнего источника.

В качестве такого источника может служить металлический штырь, на который подается переменное напряжение, вводимый в резонатор. Часто источником служит электронный пучок с модулированным током, пропускаемый через полость. При этом частота модуляции совпадает с одной из резонансных частот, а фаза колебаний тока устанавливается так, что сгустки электронов пучка в среднем за период совершают положительную работу против электрического поля в резонаторе.

2. Обратимся к задаче определения собственных частот и конфигурации полей внутри замкнутой полости, считая границы идеально проводящими. Монохроматические поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  внутри области подчиняются двум независимым уравнениям из системы (7.21) (при  $\epsilon = \mu = 1$ )

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}} = i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{B}}, \quad \operatorname{rot} \hat{\mathbf{B}} = -i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{E}} \quad (10.13)$$

и граничным условиям

$$\mathbf{E}_{\tau|\Gamma} = 0, \quad B_{n|\Gamma} = 0. \quad (10.14)$$

Как многократно подчеркивалось, выполнение условия для  $\mathbf{E}_{\tau}$  автоматически обеспечивает выполнение второго условия (10.14). Поэтому в качестве искомой функции примем поле  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ , удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (7.24)

$$\Delta \hat{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (10.15)$$

и дополнительному условию

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{E}} = 0. \quad (10.16)$$

Казалось бы, математическая формулировка задачи завершена: требуется найти поле  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ , удовлетворяющее уравнению (10.15) и условиям (10.14), (10.16). Но легко заметить, что всем названным требованиям удовлетворяет тривиальное решение  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \equiv 0$ . Поэтому, исходя из опыта с щелевым резонатором, формулировку задачи необходимо видоизменить: *требуется определить набор собственных значений  $\omega_*$  и соответствующих им нетривиальных решений  $\hat{\mathbf{E}}_*(\mathbf{r})$  уравнения (10.15), удовлетворяющих условиям (10.14), (10.16).*

Мы впервые получили здесь так называемую *задачу на собственные значения* или *спектральную задачу*. Собственные значения данной задачи являются собственными частотами полости, а собственные



функции  $\hat{\mathbf{E}}_*(\mathbf{r})$  вместе с функциями  $\hat{\mathbf{B}}_*(\mathbf{r})$ , выражаемыми через  $\hat{\mathbf{E}}_*(\mathbf{r})$  по первому из соотношений (10.13), определяют собственные колебания поля в резонаторе, или его *моды*.

Число различных собственных частот резонатора бесконечно, и они составляют *дискретный спектр*. Порядок величины наименьшего из них есть  $c/l$ , где  $l$  — характерный линейный размер полости. Это очевидно уже из соображений размерности, т. к.  $l$  есть единственный размерный параметр, характеризующий условия задачи. При бесконечной проводимости стенок резонатора собственные колебания происходят без затухания, т. е. собственные частоты являются вещественными.

**3.** Высказанные утверждения продемонстрируем на простейшем примере резонатора в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами  $a, b$  и  $d$  (рис. 10.6).

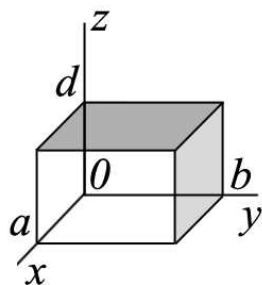


Рис. 10.6

Для построения решения обратим внимание, что каждая из трех компонент искомого поля  $\hat{\mathbf{E}}(x, y, z)$ , удовлетворяя скалярному уравнению Гельмгольца вида (7.25), должна удовлетворять граничным условиям типа выписанных здесь для компоненты  $\hat{E}_x$ :

$$\hat{E}_x|_{y=0, y=b} = 0, \quad \hat{E}_x|_{z=0, z=d} = 0. \quad (10.17)$$

То есть каждая из компонент на соответствующих гранях параллелепипеда обязательно принимает нулевые значения. Поэтому в качестве  $\hat{E}_x, \hat{E}_y, \hat{E}_z$  здесь следует брать произведения типа  $\sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z$ , которые, как и произведения  $\exp(i\alpha x), \exp(i\beta y), \exp(i\gamma z)$  из упражнения § 7.5, удовлетворяют уравнению (7.25) при выполнении условия

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2 \quad (10.18)$$

(считается, что  $\epsilon\mu = 1$ ). Учитывая, что рассматриваемое поле в каждой точке внутри области обязано удовлетворять дополнительному условию (10.16), структуру решения нетрудно угадать:

$$\hat{E}_x = E_1 \cos \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z,$$

$$\hat{E}_y = E_2 \sin \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z,$$

$$\hat{E}_z = E_3 \sin \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z.$$

Здесь синусоидальные множители в каждом из выражений взяты так, чтобы иметь возможность удовлетворить нулевым граничным условиям типа (10.17), придавая константам  $\alpha, \beta, \gamma$  значения

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad \gamma = \frac{p\pi}{d}, \quad (10.19)$$

где  $m, n, p$  — целочисленные параметры. Косинусоидальные множители приняты таким образом, чтобы  $\operatorname{div} \hat{\mathbf{E}}$  приобретала форму

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{E}} = -(E_1 \alpha + E_2 \beta + E_3 \gamma) \sin \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z,$$

допускающую тождественное обращение в нуль за счет условия

$$E_1 \frac{m}{a} + E_2 \frac{n}{b} + E_3 \frac{p}{d} = 0. \quad (10.20)$$

Таким образом, нетривиальные решения задачи для рассматриваемого резонатора существуют при собственных частотах

$$\omega_{mnp} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2}, \quad (10.21)$$

вытекающих из условия (10.18) с учетом соотношений (10.19), и задаваемых набором трех целочисленных параметров  $m, n, p$ . При этом в общем случае все три компоненты собственного поля  $\hat{\mathbf{E}}_{mnp}(x, y, z) \exp(-i\omega_{mnp}t)$  отличны от нуля и определяются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{E}_x &= E_1 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{d} z, \\ \hat{E}_y &= E_2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{p\pi}{d} z, \\ \hat{E}_z &= E_3 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \frac{p\pi}{d} z, \end{aligned} \quad (10.22)$$

причем амплитуды  $E_1, E_2, E_3$  подчинены ограничению (10.20).

Магнитное поле  $\hat{\mathbf{B}}_{mnp}(x, y, z) \exp(-i\omega_{mnp}t)$  определяется из первого уравнения системы (10.13):

$$\hat{\mathbf{B}}_{mnp} = -\frac{i}{\omega/c} \text{rot } \hat{\mathbf{E}}_{mnp}(x, y, z). \quad (10.23)$$

Наличие множителя  $i$  в этом выражении означает, что поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в резонаторе сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Это следствие того, что в объемном резонаторе, как и в любой электромагнитной колебательной системе, происходит непрерывный процесс обмена энергией между электрическим и магнитным полями. Дважды за период энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и наоборот.

4. Рассмотрим более подробно конфигурацию полей для случая минимальной собственной частоты, получающейся из соотношения (10.21), если одно из значений  $m, n, p$  положить равным 0, а два другие принять равными 1. Когда, например, размер  $a$  по оси  $x$ , как на рис. 10.6, меньше двух других, т. е.  $a < (b, d)$ , следует принять  $m = 0, n = p = 1$ , и тогда

$$\omega_{min} = \omega_{011} = c\pi\sqrt{(1/b)^2 + (1/d)^2}.$$

Этой частоте, как следует из соотношений (10.22), (10.23), соответствует простейшая мода колебаний, для которой электрическое поле

$$\mathbf{E}(y, z, t) = E_0 \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{d} e^{-i\omega_{011}t} \mathbf{e}_x \quad (10.24)$$

всюду перпендикулярно к выделенным граням  $x = 0, x = a$ , а магнитное поле

$$\mathbf{B}(y, z, t) = -i\frac{E_0}{\omega/c} \left( \frac{\pi}{d} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{d} \mathbf{e}_y - \frac{\pi}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{d} \mathbf{e}_z \right) e^{-i\omega_{011}t} \quad (10.25)$$

параллельно этим граням, причем оба поля не зависят от координаты  $x$ . Силовые линии поля  $\mathbf{B}$ , неизменные во времени, лежащие в плоскости  $x = \text{const}$ , изображены на рис. 10.7 для примера параллелепипеда со сторонами  $b = 2d$ .

Поля (10.24), (10.25) составляют стоячую волну, которую можно представить в виде суперпозиции плоских линейно-поляризованных волн (в данном случае четырех волн) с волновыми векторами  $\pm\mathbf{k}_1, \pm\mathbf{k}_2$ ,

$$\mathbf{k}_1 = (\pi/b)\mathbf{e}_y + (\pi/d)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k}_2 = (\pi/b)\mathbf{e}_y - (\pi/d)\mathbf{e}_z.$$

В этом легко убедиться, выразив синусы в соотношении (10.24) через мнимые экспоненты по формулам Эйлера, в результате чего поле  $E_x$  принимает искомый вид

$$E_x(y, z, t) = -\frac{E_0}{4} \{ e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega t)} - e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}-\omega t)} - e^{i(-\mathbf{k}_2\mathbf{r}-\omega t)} + e^{i(-\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega t)} \} \quad (10.26)$$

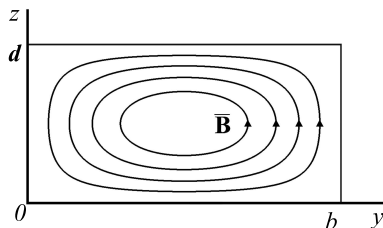


Рис. 10.7

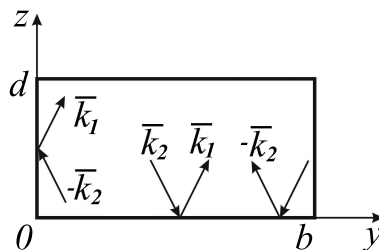


Рис. 10.8

(здесь частота  $\omega_{011}$  дана без индексов). Для каждой из граней, параллельных оси  $x$ , эти волны составляют две пары падающих-отраженных волн, как схематически показано на рис. 10.8 (пример  $b = 2d$ ). Для грани  $z = 0$  такими парами являются волны с волновыми векторами  $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$  и  $(-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2)$ , а для грани  $y = 0$  — с векторами  $(-\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$ ,  $(-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  (последняя на рисунке не показана). Обращаем внимание, что каждая из пар для любой конкретной грани, как видно из выражения (10.26), имеет амплитуды, равные по модулю и противоположные по знаку, что естественно для отражения от идеального зеркала.

## 10.5. Вынужденные колебания полей в щелевом резонаторе с потерями

1. Как отмечалось выше, при наличии потерь для поддержания незатухающих колебаний необходимо присутствие внешнего источника. Иными словами, незатухающие колебания поля в реальном резонаторе являются вынужденными колебаниями, поддерживаемыми сторонним источником. Считая, что источником потерь является конечная проводимость металлических стенок, в данном параграфе рассмотрим установившиеся вынужденные колебания в плоской щели. Выявим резонансный характер энергии возбуждаемых колебаний и определим добротность резонатора, принимая в качестве стороннего источника поверхностный ток  $i_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_y$  и разместив его для определенности в срединной плоскости (плоскость  $z = 0$ , см. рис. 10.9).

2. Воспользовавшись соображениями симметрии (схематически также представленными на рис. 10.9), установившиеся поля в правой и

левой половинах резонатора можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}_{\text{пр}} &= (\hat{E}_0 e^{ikz} + \hat{E}_1 e^{-ikz})\mathbf{e}_y, & \hat{\mathbf{E}}_{\text{лев}} &= (\hat{E}_0 e^{-ikz} + \hat{E}_1 e^{ikz})\mathbf{e}_y; \\ \hat{\mathbf{B}}_{\text{пр}} &= (-\hat{E}_0 e^{ikz} + \hat{E}_1 e^{-ikz})\mathbf{e}_x, & \hat{\mathbf{B}}_{\text{лев}} &= (\hat{E}_0 e^{-ikz} - \hat{E}_1 e^{ikz})\mathbf{e}_x,\end{aligned}\quad (10.27)$$

обозначив через  $\hat{E}_0$  и  $\hat{E}_1$  амплитуды полей для волн, уходящих от источника и приходящих к нему, соответственно.

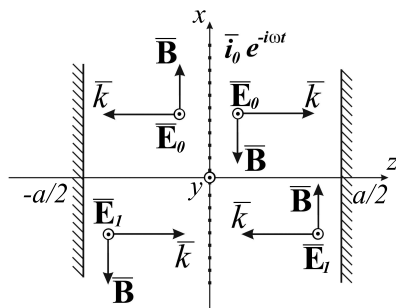


Рис. 10.9

Для их определения служат граничные условия. Первое из них, связывающее разрыв тангенциальной  $x$ -компоненты полей  $\mathbf{B}_{\text{пр}}$  и  $\mathbf{B}_{\text{лев}}$  на поверхностном токе в плоскости  $z = 0$ , приводит к соотношению

$$\hat{E}_1 - \hat{E}_0 = \frac{2\pi}{c} i_0. \quad (10.28)$$

Непрерывность  $y$ -компоненты поля  $\mathbf{E}$  на этой границе обеспечивается автоматически использованными условиями симметрии формул (10.27). Поэтому следующим содержательным условием является условие Леонтовича (10.7) на границе  $z = a/2$ . Так как здесь  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , а

$$\hat{\mathbf{E}}_t = (\hat{E}_0 e^{ika/2} + \hat{E}_1 e^{-ika/2})\mathbf{e}_y, \quad \hat{\mathbf{H}}_t = (-\hat{E}_0 e^{ika/2} + \hat{E}_1 e^{-ika/2})\mathbf{e}_x,$$

то с учетом  $[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y] = -\mathbf{e}_x$  условие (10.7) сводится к связи между амплитудами  $\hat{E}_0 \exp(ika/2)$ ,  $\hat{E}_1 \exp(-ika/2)$  падающей на стенку  $z = a/2$  и отраженной от нее волн в виде

$$\hat{E}_1 e^{-ika/2} = -\hat{E}_0 e^{ika/2} \frac{1+i-\chi}{1+i+\chi}, \quad (10.29)$$

полностью совпадающей по содержанию с соотношением (10.9). Из соотношений (10.28), (10.29) для амплитуд рассматриваемых волн получаем выражения

$$\begin{aligned}\hat{E}_0 e^{ika/2} &= -\frac{\pi i_0}{c} \frac{1+i+\chi}{(1+i)\cos ka/2 - i\chi \sin ka/2}, \\ \hat{E}_1 e^{-ika/2} &= \frac{\pi i_0}{c} \frac{1+i-\chi}{(1+i)\cos ka/2 - i\chi \sin ka/2}.\end{aligned}\quad (10.30)$$

**3.** Теперь обратимся к вычислению энергии поля этих установившихся вынужденных колебаний, например, в правой половине щели. Для этого нам понадобятся значения  $|\hat{E}|^2$  и  $|\hat{B}|^2$ , через которые плотности энергии электрического и магнитного полей, усредненные по времени, выражаются как  $\langle w_E \rangle = (1/16\pi)|\hat{E}|^2$ ,  $\langle w_B \rangle = (1/16\pi)|\hat{B}|^2$ . Вычисления показывают, что  $\langle w_E \rangle$ ,  $\langle w_B \rangle$  являются функциями координаты  $z$  (что естественно для стоячих волн, которыми являются рассматриваемые вынужденные колебания), а суммарная плотность энергии не зависит от  $z$  и выражается формулой

$$\langle w \rangle = \langle w_E \rangle + \langle w_B \rangle = \frac{1}{8\pi} (|\hat{E}_0|^2 + |\hat{E}_1|^2).$$

Следовательно, энергия одной половины щели, приходящаяся на единицу площади сечения в плоскости  $x, y$ , равна  $\langle W \rangle = \langle w \rangle a/2$  и после подстановки выражений (10.30) может быть представлена в виде

$$\langle W \rangle = W_0 U(\xi), \quad U(\xi) = \frac{2 + \chi^2(\xi)}{(1 + \cos \xi) - \chi(\xi) \sin \xi + (\chi^2(\xi)/2)(1 - \cos \xi)}, \quad (10.31)$$

где

$$\begin{aligned}W_0 &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 a && \text{— размерная величина, характеризующая} \\ &&& \text{масштаб энергии,} \\ U(\xi) &&& \text{— безразмерная функция переменной } ka = \\ &&& = (\omega/c)a, \text{ обозначенной здесь символом } \xi.\end{aligned}$$

Заметим, что параметр  $\chi$ , введенный выше соотношением (10.8), в формуле фигурирует в виде функции

$$\chi(\xi) = \sqrt{(c/2\pi\sigma a)\xi}.$$

4. Анализ полученной формулы начнем со случая  $\chi = 0$  идеально проводящих стенок, для которого

$$\langle W \rangle = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 a \frac{2}{1 + \cos ka}. \quad (10.32)$$

На первый взгляд эта формула кажется противоречащей «здравому смыслу». Действительно, как мы знаем (см. (10.10)), для щели с шириной  $a$ , частоты, при которых  $ka = n\pi$  ( $n$  — целое), являются резонансными. Отсюда, казалось бы, следует, что при этих частотах установившиеся вынужденные колебания должны приобрести бесконечную амплитуду. А из формулы (10.32) видно, что только при нечетных  $n = 2m - 1$ , когда  $\cos ka = -1$ , энергия поля действительно обращается в  $\infty$ , в то время как при четных  $n = 2m$  ее значение конечно. Это кажущееся противоречие является недоразумением. Обратим внимание, что при нечетных  $n$  собственное электрическое поле внутри щели в срединной плоскости имеет максимальную амплитуду, и сторонние токи, помещенные в эту плоскость, постоянно совершают работу против этого поля и «установившийся» режим действительно может быть только с бесконечной энергией. При четных  $n$  ситуация иная: здесь амплитуда собственного поля в срединной плоскости равна нулю, мощность, передаваемая внешним источником электромагнитному полю в щели, отсутствует, и, таким образом, постоянный рост энергии поля в резонаторе невозможен.

При конечной проводимости стенок (т. е. при  $\chi \neq 0$ ) энергия вынужденных колебаний поля (10.31) всюду конечна и имеет резко выраженный резонансный характер. Как нетрудно догадаться из приведенного анализа формулы (10.32), положения максимумов функции  $U(\xi)$  должны находиться вблизи точек  $\xi_n = n\pi$  ( $n$  — нечетные). Вычисления, выполненные с учетом малости  $\chi(\xi) \ll 1$ , показывают, что точки максимума определяются значениями

$$\xi_* = n\pi - \chi_n, \quad \text{где } \chi_n = \chi(n\pi) \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

а поведение вблизи максимума описывается функцией

$$U(\xi) = \frac{U_{max}}{1 + \left( \frac{(\xi - \xi_*)}{\chi_n} \right)^2}, \quad U_{max} = U(\xi_*) = \frac{4}{\chi_n^2}. \quad (10.33)$$

То есть удаление от точки максимума всего на расстояние  $\chi_n \ll 1$

уменьшает значение энергии вдвое:

$$U(\xi_* \pm \chi_n) = (1/2)U_{max}.$$

Таким образом, резонансная кривая  $U(\xi - \xi_*)$  (рис. 10.10) характеризуется полушириной, равной  $\chi_n$ , причем максимальное значение энергии, как видно из (10.33), обратно пропорционально  $\chi_n^2$ .

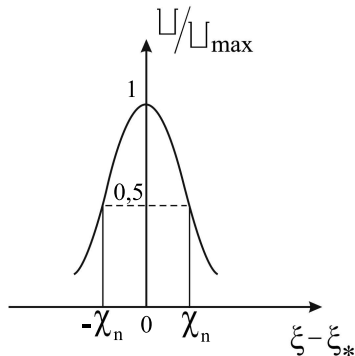


Рис. 10.10

5. Добротность вынужденных колебаний на резонансной частоте определяется отношением

$$Q = \frac{\omega_n \langle W \rangle_{max}}{\langle S_z \rangle}, \quad (10.34)$$

поскольку интенсивность потерь, обусловленных конечной проводимостью стенок, выражается величиной  $\langle S_z \rangle$ . Так как в пространстве  $0 < z < a/2$  нет поглощения энергии, усредненная величина  $\langle S_z \rangle$  не зависит от  $z$  и может быть взята в плоскости  $z = +0$ , непосредственно прилегающей к источнику. Воспользовавшись решением (10.27), величину

$$\langle S_z \rangle = -\frac{c}{4\pi} \langle E_y B_x \rangle |_{z=0}$$

можем привести к виду

$$\langle S_z \rangle = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \text{Re} \left( (\hat{E}_0 + \hat{E}_1)(-\hat{E}_0^* + \hat{E}_1^*) \right) = \frac{c}{8\pi} \left( |\hat{E}_0|^2 - |\hat{E}_1|^2 \right).$$

После подстановки выражений (10.30) отсюда получим

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{8\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 \frac{4\chi}{(1 + \cos ka) - \chi \sin ka + (\chi^2/2)(1 - \cos ka)}.$$



При резонансной частоте знаменатель полученной дроби имеет значение  $\chi_n^2/2$ . Следовательно, интенсивность потерь при частоте  $\omega_n$  ( $n$  — нечетное)

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{8\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 \frac{4\chi_n}{(1/2)\chi_n^2} = \frac{c}{\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 \frac{1}{\chi_n},$$

а добротность (10.34) после подстановки

$$\langle W \rangle_{max} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\pi i_0}{c} \right)^2 \frac{4a}{\chi_n^2} \quad \text{принимает значение} \quad Q = \frac{\omega_n a}{2c} \frac{1}{\chi_n}.$$

Обычно его представляют в виде отношения характерного размера резонатора к толщине скин-слоя  $\delta_n = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega_n}$  при соответствующей резонансной частоте. В рассматриваемом случае мы получили  $Q = a/(2\delta_n)$ , т. е. характерным размером выступает половина ширины щели.

## 10.6. Волноводы

**1.** Мы будем рассматривать волноводы только в виде металлической трубы с произвольной формой поперечного сечения, неизменной по длине, оставляя без обсуждения диэлектрические волноводы (световоды), играющие важную роль в оптическом диапазоне частот. По таким трубам обычно передается электромагнитная энергия в СВЧ-диапазоне, т. к. передача энергии по проводам в этом случае становится невозможной вследствие того, что провода здесь работают как антенны, излучающие электромагнитную энергию.

Реальные волноводы изготавливаются из меди, а в особо важных случаях бывают посеребренные изнутри. Но в любом случае небольшие потери здесь имеют место. Как уже неоднократно подчеркивалось, эти потери мы игнорируем, считая стенки волновода идеально проводящими. В этом приближении исследуем конфигурацию полей и дисперсионные свойства волн, распространяющихся по волноводу. Примем, для общности, что пространство внутри волновода заполнено однородной непоглощающей средой с вещественными  $\epsilon = const, \mu = const$ . Ось  $z$  декартовой системы координат направим вдоль волновода, координаты  $x, y$  совместим с некоторой плоскостью поперечного сечения, как показано на рис. 10.11.

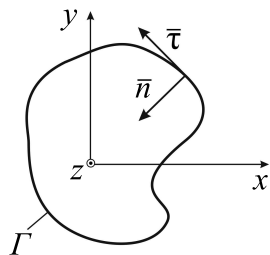


Рис. 10.11

2. Перейдем к задаче определения полей, составляющих волну в волноводе. На первый взгляд эта задача представляется весьма сложной, т. к. комплексные амплитуды полей  $\hat{\mathbf{E}}(x, y, z)$ ,  $\hat{\mathbf{B}}(x, y, z)$  в этом случае являются трехмерными полями, зависящими от координат  $x, y, z$ , и уравнения (7.21), выписанные покомпонентно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial y} - \left( \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) &= i \frac{\omega}{c} \hat{B}_x, \\ \left( \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \hat{B}_y, \\ \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \hat{B}_z, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial y} - \left( \frac{\partial \hat{B}_y}{\partial z} \right) &= -i \epsilon \mu \frac{\omega}{c} \hat{E}_x, \\ \left( \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial x} &= -i \epsilon \mu \frac{\omega}{c} \hat{E}_y, \\ \frac{\partial \hat{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{B}_x}{\partial y} &= -i \epsilon \mu \frac{\omega}{c} \hat{E}_z \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

выглядят достаточно громоздко. (Для удобства последующего поиска каждая тройка уравнений здесь сгруппирована выделением двух из них фигурной скобкой. Кроме того, слагаемые, представляющие собой производные по  $z$ , взяты в круглые скобки.) Но в задаче имеется возможность упрощения, подсказываемая частным «волноводным» решением (10.11): предугадав зависимость искомых функций от продольной координаты  $z$ , принять, что

$$\hat{\mathbf{E}}(x, y, z) = \hat{\mathcal{E}}(x, y) e^{ikz}, \quad \hat{\mathbf{B}}(x, y, z) = \hat{\mathcal{B}}(x, y) e^{ikz}, \quad (10.36)$$

и, таким образом, число независимых переменных свести к двум. Тогда поля в волноводе приобретают вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{E}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{B}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (10.37)$$

волны, бегущей по направлению оси  $z$ , с амплитудами, зависящими от поперечных координат  $x, y$ .

**3.** Переход (10.36) к переменным  $\hat{\mathcal{E}}(x, y), \hat{\mathcal{B}}(x, y)$  и, соответственно, к представлению решения в виде (10.37) сильно упрощает задачу, т. к. уравнения для амплитуд  $\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{B}}$ , получающиеся из уравнений (10.35), расщепляются на независимые группы. Из четверки выделенных фигурными скобками уравнений после подстановки в них выражений (10.36), замены  $\partial/\partial z$  на множитель  $ik$  и сокращения общего множителя  $\exp(ikz)$  получаются две пары линейных алгебраических уравнений для поперечных компонент полей (обозначим  $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}, \hat{\mathcal{B}}_{\perp}$ ). Для  $\hat{\mathcal{B}}_x, \hat{\mathcal{E}}_y$  пара:

$$i\frac{\omega}{c}\hat{\mathcal{B}}_x + ik\hat{\mathcal{E}}_y = \frac{\partial\hat{\mathcal{E}}_z}{\partial y}, \quad ik\hat{\mathcal{B}}_x + i\epsilon\mu\frac{\omega}{c}\hat{\mathcal{E}}_y = \frac{\partial\hat{\mathcal{B}}_z}{\partial x} \quad (10.38)$$

и для компонент  $\hat{\mathcal{B}}_y, \hat{\mathcal{E}}_x$  другая пара:

$$i\frac{\omega}{c}\hat{\mathcal{B}}_y - ik\hat{\mathcal{E}}_x = -\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}_z}{\partial x}, \quad ik\hat{\mathcal{B}}_y - i\epsilon\mu\frac{\omega}{c}\hat{\mathcal{E}}_x = \frac{\partial\hat{\mathcal{B}}_z}{\partial y}. \quad (10.39)$$

Решения этих уравнений можно объединить и представить в векторном виде

$$\hat{\mathcal{B}}_{\perp} = \frac{i}{\gamma^2} \{k \operatorname{grad}_{\perp} \hat{\mathcal{B}}_z + \epsilon\mu\frac{\omega}{c} [\mathbf{e}_z \times \operatorname{grad}_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z]\}, \quad (10.40)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{\perp} = \frac{i}{\gamma^2} \{k \operatorname{grad}_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z - \frac{\omega}{c} [\mathbf{e}_z \times \operatorname{grad}_{\perp} \hat{\mathcal{B}}_z]\}, \quad (10.41)$$

где  $\operatorname{grad}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y$ , а через  $\gamma^2$  обозначен комплекс

$$\gamma^2 = \epsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad (10.42)$$

равный определителю (с точностью до знака) выписанных пар уравнений, физический смысл которого станет понятным чуть позже.

Таким образом, естественное предположение (10.36) привело нас к результатам (10.40), (10.41), выражающим поля  $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}, \hat{\mathcal{B}}_{\perp}$  непосредственно через продольные компоненты  $\hat{\mathcal{E}}_z, \hat{\mathcal{B}}_z$ . Следовательно, независимыми искомыми теперь остаются всего эти две скалярные функции  $\hat{\mathcal{E}}_z(x, y), \hat{\mathcal{B}}_z(x, y)$ , для которых уравнения

$$\Delta_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z + \gamma^2 \hat{\mathcal{E}}_z = 0, \quad \Delta_{\perp} \hat{\mathcal{B}}_z + \gamma^2 \hat{\mathcal{B}}_z = 0 \quad (\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad (10.43)$$

получаются из двух последних уравнений системы (10.35) после перехода к полям  $\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{B}}$  и использования формул (10.40), (10.41) для поперечных компонент этих полей<sup>1</sup>.

Для получения граничных условий для  $\hat{\mathcal{E}}_z, \hat{\mathcal{B}}_z$  обратимся вначале к исходным условиям равенства нулю нормальной компоненты поля  $\mathbf{B}$  и тангенциальных компонент поля  $\mathbf{E}$  на поверхности волновода. Вектор нормали  $\mathbf{n}$  и один из двух независимых тангенциальных единичных векторов (на рис. 10.11 обозначен  $\tau$ ) лежат в плоскости поперечного сечения, а вторым тангенциальным вектором является орт  $\mathbf{e}_z$ , так что названные условия можно представить в виде

$$a) \hat{E}_z|_{\Gamma} = 0, \quad б) \hat{E}_{\tau}|_{\Gamma} = 0, \quad в) \hat{B}_n|_{\Gamma} = 0. \quad (10.44)$$

Из них только а) и б), как мы знаем, являются независимыми. Но в рассматриваемой задаче целесообразно в качестве независимых принять условия а) и в), которые при переходе к полям  $\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{B}}$  приобретают вид

$$\hat{\mathcal{E}}_z|_{\Gamma} = 0, \quad \hat{\mathcal{B}}_n|_{\Gamma} = (\hat{\mathcal{B}}_{\perp} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0,$$

причем последнее, воспользовавшись выражением (10.40), можно выразить через нужную неизвестную  $\hat{\mathcal{B}}_z$  в виде

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{B}}_z}{\partial n}|_{\Gamma} = 0.$$

Действительно, в скалярном произведении векторов  $\hat{\mathcal{B}}_{\perp}$  и  $\mathbf{n}$  первое слагаемое в фигурной скобке (10.40) дает  $k \partial \hat{\mathcal{B}}_z / \partial n$ , а второе, являющееся смешанным произведением  $\mathbf{e}_z$ ,  $grad_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z$  и  $\mathbf{n}$ , в точках границы  $\Gamma$  обратится в 0, т. к. здесь  $grad_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z \parallel \mathbf{n}$ . Отсюда и следует требуемый ответ. (Отброшенное нами условие б) из (10.44), эквивалентное требованию  $(\hat{\mathcal{E}}_{\perp} \cdot \tau)|_{\Gamma} = 0$ , теперь выполняется автоматически, в чем читателю следует убедиться самостоятельно.)

4. Таким образом, для искомым полей  $\hat{\mathcal{E}}_z, \hat{\mathcal{B}}_z$  мы получили две задачи на собственные значения

$$\Delta_{\perp} \hat{\mathcal{E}}_z + \gamma^2 \hat{\mathcal{E}}_z = 0, \quad \hat{\mathcal{E}}_z|_{\Gamma} = 0, \quad (10.45)$$

$$\Delta_{\perp} \hat{\mathcal{B}}_z + \gamma^2 \hat{\mathcal{B}}_z = 0, \quad \partial \hat{\mathcal{B}}_z / \partial n|_{\Gamma} = 0. \quad (10.46)$$

<sup>1</sup>Казалось бы, эти уравнения проще можно получить как результат подстановки соотношений (10.36) в уравнения Гельмгольца типа (7.24) для  $z$ -компонент полей. Но возникающая при этом необходимость проверки дополнительного условия  $div \mathbf{E} = 0$  сводит названную «простоту» на нет.

Так как граничные условия для  $\hat{\mathcal{E}}_z$  и  $\hat{\mathcal{B}}_z$ , как видим, различны, эти задачи не могут удовлетворяться одновременно. Иными словами, если набор собственных значений  $\gamma$  найден из задачи (10.45), то этот набор не будет таковым для задачи (10.46), и наоборот.

Следовательно, если  $\gamma_n$  находим из задачи

$$\Delta_{\perp}\Psi + \gamma^2\Psi = 0, \quad \Psi|_{\Gamma} = 0,$$

то им соответствуют собственные функции  $\Psi = \hat{\mathcal{E}}_z(x, y)$ , определяющие продольную компоненту электрического поля в волне; при этом  $\hat{\mathcal{B}}_z(x, y) \equiv 0$ . В этом случае говорят, что по волноводу бежит ТМ-волна (*поперечно-магнитная*) или *волна типа E*.

В другом случае, соответствующем задаче

$$\Delta_{\perp}\Psi + \gamma^2\Psi = 0, \quad \partial\Psi/\partial n|_{\Gamma} = 0,$$

когда  $\Psi(x, y) = \hat{\mathcal{B}}_z(x, y)$ ,  $\hat{\mathcal{E}}_z(x, y) \equiv 0$ , имеем дело с ТЕ-волной (*поперечно-электрической*) или *волной типа H*.

Вот и вся общая теория цилиндрического металлического волновода с произвольным поперечным сечением. Конечно, ее еще необходимо «прочувствовать». Для этого в следующем параграфе мы рассмотрим конкретный волновод с прямоугольным поперечным сечением — самый простой для рассмотрения и самый распространенный. Но перед этим сразу ответим на вопросы, волны какой частоты могут, а какие не могут бежать по данному волноводу, какова скорость этих волн? Ответы на подобные вопросы фактически содержатся в соотношении (10.42) и в задачах на собственные значения (10.45), (10.46). Решая одну из этих задач для данного волновода, мы получаем значение  $\gamma$ . Пусть конкретное значение будет  $\gamma_{mn}$ . Тогда соотношение (10.42) явится дисперсионным уравнением для конкретной волны, бегущей в волноводе,

$$\epsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \gamma_{mn}^2. \quad (10.47)$$

Отсюда видно, что для волны, характеризуемой фиксированным значением  $\gamma_{mn}$ , существует *граничная частота*

$$\omega_{mn} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}\gamma_{mn} \quad (10.48)$$

такая, что при  $\omega < \omega_{mn}$  волновое число  $k$  становится мнимым и данная волна по волноводу не распространяется ( $\omega_{mn}$  определяется подстановкой  $k = 0$  в соотношение (10.47)).

Для волновода существует *минимальная частота*, соответствующая минимальному собственному значению  $\gamma$ , ниже которой *никакие* волны по данному волноводу распространяться не могут.

## 10.7. Волновод с прямоугольным поперечным сечением

Пусть сечение характеризуется размерами  $a, b$ , указанными на рис. 10.12.

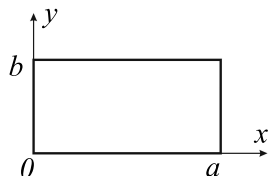


Рис. 10.12

Рассмотрим, для определенности, ТЕ-волну (волну типа Н), представляющую основной практический интерес. Для нее задача на собственные значения и собственные функции  $\Psi = \vec{B}_z(x, y)$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \gamma^2 \Psi = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0, x=a} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=0, y=b} = 0.$$

Исходя из опыта, приобретенного при исследовании поля резонатора, решение задачи выпишем сразу:

$$\Psi(x, y) = B_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \tag{10.49}$$

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right],$$

где  $m, n$  — целочисленные индексы. Отсюда, опираясь на результат исследований предыдущего параграфа, перечислим основные моменты, характеризующие волну  $H_{mn}$  в данном волноводе.

Конфигурация полей в волне задается компонентами

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{i(kz-\omega t)}, \quad E_z \equiv 0, \\ \mathbf{B}_\perp &= (ik/\gamma_{mn}^2) B_0 \mathit{grad}_\perp (\cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y) e^{i(kz-\omega t)}, \\ \mathbf{E}_\perp &= -(i/\gamma_{mn}^2)(\omega/c) B_0 [\mathbf{e}_z \times \mathit{grad}_\perp (\cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y)] e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (10.50)$$

(Для произвольных  $m, n$  формулы  $\mathbf{B}_\perp, \mathbf{E}_\perp$  покомпонентно не расписаны.)

Граничная частота через найденные значения  $\gamma_{mn}$  (10.49) выражается формулой (10.48). Минимальное собственное значение данного волновода достигается именно в рассматриваемой волне типа Н, т. к. здесь один из индексов  $m, n$  можно принять равным нулю<sup>2</sup>. Если больший из размеров поперечного сечения есть  $a$  (т. е.  $a > b$ ),  $\gamma_{min}$  получается при  $m = 1, n = 0$ . Следовательно, минимальная частота для данного волновода

$$\omega_{min} = \omega_{10} = \frac{\pi}{a} \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

При частотах  $\omega < \omega_{10}$  никакие волны по волноводу не распространяются. Для стандартного волновода с размерами  $a = 2b$  имеем  $\omega_{01} = 2\omega_{10}$  и в диапазоне частот  $\omega_{10} < \omega < 2\omega_{10}$  по волноводу бежит только одна волна  $H_{10}$ . Этот диапазон от  $\omega_{min}$  до  $2\omega_{min}$  составляет рабочий участок спектра для данного волновода, т. к. здесь перенос энергии осуществляется одной контролируемой волной.

*Закон дисперсии.* С введением граничной частоты (10.48) дисперсионную зависимость  $\omega(k)$  для конкретной волны удобно представлять либо в виде

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu} k^2 + \omega_{mn}^2, \quad (10.51)$$

либо как

$$k = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}}. \quad (10.52)$$

Последнее соотношение только множителем из квадратного корня отличается от дисперсионной формулы (7.27) для волн в безграничном пространстве. При  $\omega \rightarrow \infty$  этот множитель стремится к единице и дисперсионные кривые приближаются к асимптоте  $\omega = kc/\sqrt{\epsilon\mu}$ , как это

<sup>2</sup>В волне типа Е наименьшее собственное значение есть  $\gamma_{11}$ , см. упражнение к данному параграфу.

видно из рис. 10.13.

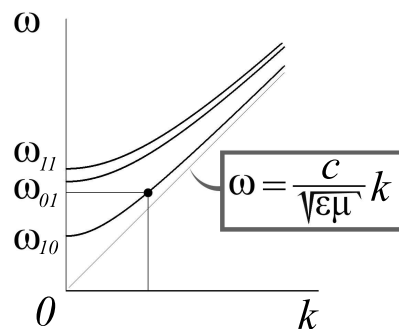


Рис. 10.13

Здесь для примера  $a = 2b$  изображены дисперсионные кривые для волн  $H_{10}$ ,  $H_{01}$  ( $H_{20}$ ) и  $H_{11}$ . Видно, что при  $\omega < \omega_{10}$  нет волны, бегущей по волноводу. При выделенной на рисунке частоте  $\omega_{10} < \omega < \omega_{01}$  по волноводу бежит  $H_{10}$ -волна с параметрами  $\omega, k$ , соответствующими жирной точке на кривой.

Физический смысл собственных значений  $\gamma_{mn}$  просматривается уже из соотношения (10.47), в котором левая часть представляет собой квадрат волнового вектора плоской монохроматической волны, распространяющейся в однородной среде с показателями  $\epsilon, \mu$ , а первое слагаемое  $k^2$  правой части есть квадрат волнового числа для волны (10.50), бегущей по волноводу. Отсюда можно предположить, что рассматриваемая волна  $H_{mn}$  в волноводe ( $E_{mn}$  тоже) есть результат суперпозиции плоских монохроматических волн, у которых  $k_z = k$ , а поперечные компоненты  $\mathbf{k}_\perp$  каждой волны имеют длину, равную  $\gamma_{mn}$ . В справедливости этого предположения мы убеждались при построении частного решения (10.11), которое, как теперь понятно, есть решение, отвечающее волне  $H_{m0}$ . Для общего случая (10.50) высказанное положение очевидно.

Фазовая  $u = \omega/k$  и групповая  $v_g = d\omega/dk$  скорости для волн в волноводe имеют значения

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} \right)^{-1}, \quad (10.53)$$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} \right). \quad (10.54)$$



Первый из этих результатов следует непосредственно из закона дисперсии (10.52), а для получения второго удобнее всего воспользоваться формулой

$$uv_g = c^2/\epsilon\mu,$$

возникающей после дифференцирования соотношения (10.51) по переменной  $k$ .

Как видно из соотношений (10.53), (10.54), волна по волноводу распространяется с фазовой скоростью, превышающей  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$  (т. е. в пустом волноводе бежит быстрее скорости света), но групповая скорость (скорость переноса энергии) при этом меньше данной величины.

Для наглядности приведем еще чисто геометрический вывод формул (10.53), (10.54), рассматривая простейшую волну  $H_{10}$ , для которой  $\gamma_{10} = \pi/a$ , а поля, определяемые соотношениями (10.50), при  $m = 1, n = 0$  приобретают вид

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \cos \gamma_{10} x e^{i(kz - \omega t)}, & E_z &\equiv 0, \\ B_x &= -(ik/\gamma_{10}) B_0 \sin \gamma_{10} x e^{i(kz - \omega t)}, & B_y &\equiv 0, \\ E_y &= i \frac{\omega/c}{\gamma_{10}} B_0 \sin \gamma_{10} x e^{i(kz - \omega t)}, & E_x &\equiv 0. \end{aligned}$$

(Нетрудно убедиться, что эти выражения совпадают с результатами (10.11), (10.12), если в последних константу  $E_0$  заменить на комплекс  $-(\omega/c)(2\gamma_{10})^{-1} B_0$ , а в качестве  $\gamma$  принять значение, соответствующее  $m = 1, n = 0$ .)

Электрическое поле в рассматриваемой волне, состоящее из одной  $y$ -компоненты, воспользовавшись формулой Эйлера для  $\sin \gamma_{10} x$ , можно представить в виде наложения двух линейно поляризованных волн

$$\mathbf{E}(x, z, t) = B_0 \frac{\omega/c}{2\gamma_{10}} [e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)} - e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)}] \mathbf{e}_y$$

с волновыми векторами

$$\mathbf{k}_1 = k\mathbf{e}_z + \gamma_{10}\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{k}_2 = k\mathbf{e}_z - \gamma_{10}\mathbf{e}_x,$$

имеющими длину  $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \sqrt{\epsilon\mu} \omega/c$ . На рис. 10.14 эти волны схематически изображены вместе с указанием направлений полей в них. Видно, что поля  $\mathbf{E}$  в этих волнах имеют компоненты  $B_x$  и  $B_z$ .

Такое геометрическое представление волны  $H_{10}$  в виде суперпозиции двух наклонных волн позволяет наглядно увидеть фазовую и групповую скорости и чисто геометрически вычислить их величины. Для этого

обратимся, например, к волне с наклонным волновым вектором  $\mathbf{k}_1$ , волновой фронт которой перемещается вдоль направления  $\mathbf{k}_1$  со скоростью  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

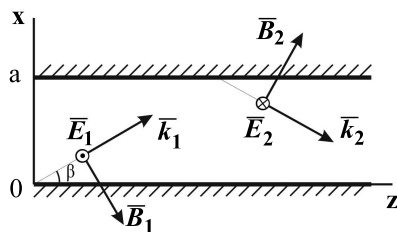


Рис. 10.14

Тогда скорость перемещения точки пересечения волнового фронта с осью  $z$  и есть фазовая скорость волны в волноводе

$$u = \frac{c/\sqrt{\epsilon\mu}}{\cos\beta} \quad (\text{превышающая величину } c/\sqrt{\epsilon\mu}),$$

где  $\cos\beta = k/|\mathbf{k}_1|$  при учете соотношения (10.52) приобретает значение  $\sqrt{1 - (\omega_{10}/\omega)^2}$ . Отсюда для  $u$  получается выражение (10.54).

Групповая скорость совпадает со скоростью перемещения энергии. Каждая составляющая волна переносит энергию со скоростью  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , но за счет многократных отражений ее фактический путь будет удлиняться. Результирующая скорость вдоль оси волновода будет

$$V_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cos\beta = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{10}^2}{\omega^2}} < \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

*Упражнение.* Сформулировать задачу на собственные значения и собственные функции для волн типа Е. Убедиться, что решение задачи имеет вид

$$\Psi(x, y) = \mathcal{E}_z(x, y) = B_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right].$$

Отсюда видно, что нетривиальным решениям соответствуют индексы  $m \geq 1, n \geq 1$ ; следовательно,  $\gamma_{min} = \gamma_{11}$ .

## 10.8. ТЕМ-волны

Все вышесказанное о ТМ- и ТЕ-волнах относилось к волноводам с односвязной формой поперечного сечения. Положение совершенно меняется при многосвязной форме сечения типа приведенного ниже на рис. 10.15. В таких волноводах, наряду с описанными Е- и Н-волнами, оказывается возможным распространение еще одного типа волн, частота которых *не ограничена никакими условиями*. Эта волна — поперечно-электромагнитная, ТЕМ-волна, в которой  $B_z \equiv 0$ ,  $E_z \equiv 0$ .

Выясним основные свойства этой волны, одновременно показав, почему этот тип волн невозможен при односвязной форме сечения волновода. Итак, в амплитудах полей  $\hat{\mathcal{E}}(x, y)$ ,  $\hat{\mathcal{B}}(x, y)$ , определяющих решения (10.36), пусть  $\hat{\mathcal{E}}_z \equiv 0$ ,  $\hat{\mathcal{B}}_z \equiv 0$ . При этом две пары уравнений (10.38), (10.39) для поперечных компонент превращаются в однородные системы

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} \hat{\mathcal{B}}_x + k \hat{\mathcal{E}}_y &= 0, & k \hat{\mathcal{B}}_x + \epsilon \mu \frac{\omega}{c} \hat{\mathcal{E}}_y &= 0; \\ \frac{\omega}{c} \hat{\mathcal{B}}_y - k \hat{\mathcal{E}}_x &= 0, & k \hat{\mathcal{B}}_y - \epsilon \mu \frac{\omega}{c} \hat{\mathcal{E}}_x &= 0. \end{aligned}$$

При выполнении условия равенства нулю определителей, т. е.

$$k = \sqrt{\epsilon \mu} (\omega/c), \quad (10.55)$$

эти системы допускают нетривиальное решение

$$\hat{\mathcal{B}}_x = -\sqrt{\epsilon \mu} \hat{\mathcal{E}}_y, \quad \hat{\mathcal{B}}_y = \sqrt{\epsilon \mu} \hat{\mathcal{E}}_x, \quad \text{т. е. } \hat{\mathcal{B}} = \sqrt{\epsilon \mu} [\mathbf{e}_z \times \hat{\mathcal{E}}], \quad (10.56)$$

которое можно переписать в виде соотношения

$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon \mu} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}] \quad (10.57)$$

между полями в рассматриваемой волне. Таким образом, ТЕМ-волна характеризуется той же дисперсионной зависимостью (10.55), что и волна в безграничном пространстве. Кроме того, в каждой точке пространства поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$  в ТЕМ-волне взаимно перпендикулярны и связаны соотношением (10.57), как и в плоской монохроматической волне. Но тем не менее эта волна

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \hat{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \hat{\mathcal{B}}_{\perp}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$$

не есть плоская монохроматическая волна, т. к. здесь амплитуды  $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y)$ ,  $\hat{\mathcal{B}}_{\perp}(x, y)$  хотя и перпендикулярны направлению распространения, но не

постоянны. Они должны зависеть от поперечных координат  $x, y$ , чтобы удовлетворить граничному условию  $\mathbf{E}_\tau = 0$  на стенках волновода.

Задача определения поля  $\hat{\mathcal{E}}_\perp(x, y)$  состоит из уравнений

$$\operatorname{rot} \hat{\mathcal{E}}_\perp(x, y) = 0, \quad \operatorname{div} \hat{\mathcal{E}}_\perp(x, y) = 0$$

и граничного условия  $\mathcal{E}_\tau = 0$ . (Первое из этих уравнений есть следствие последней строки системы (10.35), а второе вытекает из условия  $\operatorname{div} \hat{\mathbf{E}}(x, y, z) = 0$ .) Следовательно, искомое двумерное поле  $\hat{\mathcal{E}}_\perp(x, y) = -\operatorname{grad} \varphi(x, y)$  определяется как решение электростатической задачи

$$\Delta \varphi(x, y) = 0, \quad \varphi|_\Gamma = \operatorname{const}.$$

В односвязной области этой задаче соответствует решение  $\varphi(x, y) = \operatorname{const}$  с электрическим полем  $\hat{\mathcal{E}}_\perp(x, y) \equiv 0$ . Тем самым доказывается невозможность распространения ТЕМ-волн по волноводу с односвязным поперечным сечением. В многосвязной же области значение константы в граничном условии не обязано быть одним и тем на различных граничных контурах, и тогда решение уравнения Лапласа имеет нетривиальное решение. При этом распределение электрического поля в поперечном сечении волновода соответствует плоскому электростатическому полю между обкладками конденсатора, а магнитное поле в волне определяется соотношением (10.56).

В качестве иллюстрации выпишем поля ТЕМ-волны для коаксиального кабеля с сечением, показанным на рис. 10.15.

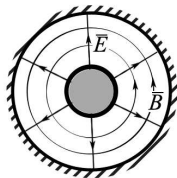


Рис. 10.15

Здесь уравнение Лапласа имеет решение

$$\varphi(r) = \varphi_0 \ln(b/r).$$

Следовательно, поля в волне имеют вид

$$\mathbf{E}(r, z, t) = (\varphi_0/r) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{B}(r, z, t) = \sqrt{\epsilon\mu} (\varphi_0/r) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_\alpha,$$

схематически представленные на рис. 10.15. Волновое число и частота связаны соотношением (10.55), причем ограничений на частоту не существует.

## Глава 11

# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Мы переходим к изучению явления, в истории физики послужившего основой для осознания волновой природы света, тогда как геометрическая оптика вполне укладывалась в рамки корпускулярных представлений. С явлением интерференции на примере света сталкиваться приходилось всем, в солнечный день наблюдая разноцветные бензиновые или масляные пленки на поверхности воды и на мокром асфальте. Но сразу приступить к анализу данного проявления интерференции нам не удастся. Придется преодолеть определенные трудности, обусловленные некогерентностью оптического излучения нелазерных источников. Мы пройдем путь в несколько шагов, начиная от вопросов, для анализа которых достаточно монохроматической идеализации. А затем будем последовательно дополнять модель волнового поля излучения его корреляционными свойствами, чтобы понять влияние некогерентности и других осложняющих факторов на характерные особенности интерференционных явлений.

## 11.1. О природе интерференции

Чтобы обозначить природу явления, предположим, что в некоторую точку приходят две волны с соответствующими полями  $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{V}_1 = \hat{\mathbf{V}}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  и  $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{V}_2 = \hat{\mathbf{V}}_2(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ . По принципу суперпозиции напряженности результирующего поля равны их векторным суммам  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ . В результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты получаются колебания той же частоты. Амплитуды этих колебаний  $\hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\mathbf{V}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{V}}_2(\mathbf{r})$  неизменны во времени, но в разных точках имеют, вообще говоря, разные значения.

В оптическом диапазоне частот не существует способа измерить сами быстропеременные поля. Все приемники излучения измеряют энергетические величины, усредненные за некоторый интервал времени  $\tau_0$  — так называемое разрешающее время измерительного прибора, которое обычно много больше периода волны. (Примером такого прибора может служить глаз, для него  $\tau_0 \sim 0,05$  с.) Так как любой физический процесс взаимодействия света с веществом сводится в первую очередь к действию *электрического* поля световой волны на электроны, входящие в состав вещества, приемник излучения фиксирует среднее за время  $\tau_0$  значение квадрата напряженности электрического поля.

Операцию усреднения за интервал  $\tau_0$  в данной главе обозначим угловыми скобками<sup>1</sup> и для произвольной физической величины, зависящей от  $\mathbf{r}$  и  $t$ , будем понимать в виде

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(\mathbf{r}, t + t') dt'. \quad (11.1)$$

Для функции, среднее значение которой не зависит от момента времени,

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(\mathbf{r}, t) dt.$$

В частности, для интересующего нас квадрата напряженности электрического поля

$$\langle E^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} E^2(\mathbf{r}, t) dt.$$

<sup>1</sup> Усреднение за период волны будет отмечаться горизонтальной чертой над символом усредняемой величины.

Дальше повсюду эту величину мы для краткости будем называть интенсивностью и обозначать символом  $I$ . Тогда при наложении двух волн будем иметь

$$I = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (11.2)$$

где  $I_1 = \langle E_1^2 \rangle$ ,  $I_2 = \langle E_2^2 \rangle$  — интенсивности составляющих волн, а  $I_{12} = 2 \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$  — так называемый *интерференционный член*. Именно это последнее слагаемое в выражении (11.2) характеризует явление интерференции, заключающееся в том, что интенсивность суммарной волны отлична от суммы интенсивностей составляющих волн и, следовательно, принцип суперпозиции для интенсивности несправедлив. Естественно, здесь речь не идет о нарушении закона сохранения энергии. Интерференция приводит лишь к перераспределению потока энергии по пространству, сохраняя его суммарную энергию. А в условиях, когда  $I_{12} \equiv 0$ , результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей парциальных волн и интерференция отсутствует. Например, две линейно поляризованные в перпендикулярных направлениях волны не интерферируют, так как в них  $(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \equiv 0$ .

## 11.2. Интерференция монохроматического света

Хотя свет, излучаемый любым реальным источником, как уже упоминалось, не является строго монохроматичным, использование монохроматической идеализации полезно в качестве первого шага при знакомстве с явлением интерференции.

1. Начнем с интерференции плоских монохроматических волн, считая вначале, что они эллиптически поляризованы и характеризуются полями

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_{01} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_{02} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Если несовпадающие по направлению волновые вектора этих волн  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  изобразить выходящими из одной точки, как на рис. 11.1, то они образуют некоторую плоскость в пространстве. Тогда электрическое поле каждой из интерферирующих волн можно разложить на составляющие  $\mathbf{E}_1^\perp, \mathbf{E}_2^\perp$ , перпендикулярные плоскости векторов  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , и лежащие в этой плоскости  $\mathbf{E}_1^\parallel, \mathbf{E}_2^\parallel$ . (На рис. 11.1 векторы  $\mathbf{E}_1^\perp, \mathbf{E}_2^\perp$  изображены в виде жирной точки, символизирующей конец стрелы, перпендикулярной



плоскости рисунка.) Так как

$$(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = [(\mathbf{E}_1^\perp + \mathbf{E}_2^\perp) + (\mathbf{E}_1^\parallel + \mathbf{E}_2^\parallel)]^2 = (\mathbf{E}_1^\perp + \mathbf{E}_2^\perp)^2 + (\mathbf{E}_1^\parallel + \mathbf{E}_2^\parallel)^2$$

не содержит «перекрестных» произведений, суммарная интерференционная картина от эллиптически поляризованных волн складывается из двух независимых распределений

$$I = I^\perp + I^\parallel, \text{ где } I^\perp = (\mathbf{E}_1^\perp + \mathbf{E}_2^\perp)^2, \quad I^\parallel = (\mathbf{E}_1^\parallel + \mathbf{E}_2^\parallel)^2.$$

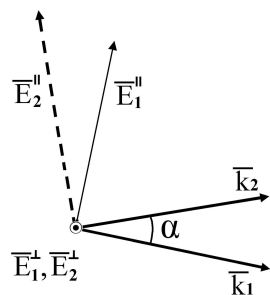


Рис. 11.1

При этом, как видно из примера (см. ниже), результатом этого наложения может стать полное исчезновение интерференции.

Таким образом, исследование интерференции эллиптически поляризованных волн сводится к соответствующему исследованию для составляющих линейно поляризованных волн. Поскольку поля в них содержат по одной пространственной компоненте, их можно представить в виде

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{01} e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)}, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{02} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_2)}, \quad (11.3)$$

содержащем вещественные амплитуды  $\mathbf{E}_{01}, \mathbf{E}_{02}$  (без «шляпок») и начальные фазы  $\varphi_1, \varphi_2$ . В рассматриваемом здесь случае монохроматических волн результат усреднения  $\langle \rangle$  совпадает с усреднением за период волны. Поэтому интенсивности составляющих волн (11.3)  $I_1 = \overline{E_1^2}$ ,  $I_2 = \overline{E_2^2}$  выражаются как  $I_1 = (1/2)E_{01}^2$ ,  $I_2 = (1/2)E_{02}^2$ , а интерференционный член  $I_{12} = 2 \overline{(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}$ , где

$$\overline{(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)} = \frac{1}{2} \text{Re} \left( (\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02}) e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \varphi_1)} e^{-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \varphi_2)} \right),$$

приобретает вид

$$I_{12}(\mathbf{r}) = E_{01}E_{02} \cos \alpha \cos \delta\Psi(\mathbf{r}).$$

Здесь  $\alpha$  — угол между амплитудами  $\mathbf{E}_{01}$ ,  $\mathbf{E}_{02}$ , а

$$\delta\Psi(\mathbf{r}) = (\delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \varphi_1 - \varphi_2, \quad \delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \quad (11.4)$$

есть разность фаз приходящих в точку наблюдения волн (11.3). Отличный от единицы множитель  $\cos \alpha$  возникает в этой формуле, когда в качестве  $\mathbf{E}_{01}$ ,  $\mathbf{E}_{02}$  выступают  $\mathbf{E}_1^{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_2^{\parallel}$  (рис. 11.1); при этом  $\alpha$  равен углу между векторами  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ . Обычно этот угол мал и поэтому дальше множитель  $\cos \alpha$  опускается. Выразив входящие в  $I_{12}(\mathbf{r})$  амплитуды  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  через  $I_1, I_2$ , интерференционную формулу (11.2) для монохроматических волн (11.3) удобно представлять в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta\Psi(\mathbf{r}). \quad (11.5)$$

Отсюда видно, что интенсивность зависит от положения точки наблюдения, характеризуемого радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ . Поверхности равных интенсивностей определяются уравнением  $(\delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \text{const}$  и представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору  $\delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  (рис. 11.2).

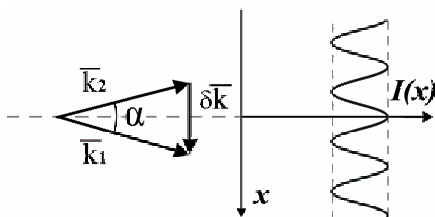


Рис. 11.2

Интенсивность максимальна там, где косинус в (11.5) принимает значение  $+1$ , и минимальна при  $-1$ . (Следовательно, их положения зависят от разности  $\varphi_1 - \varphi_2$ .) Расстояние  $\Delta x$  между плоскостями максимальной (или минимальной) интенсивности определяется условием  $\delta k \Delta x = 2\pi$ . Так как модули  $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$ , то  $\delta k = 2k \sin(\alpha/2)$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ . Следовательно,  $\Delta x = 2\pi/\delta k$  приобретает значение

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2} \simeq \frac{\lambda}{\alpha} \quad (11.6)$$

(последнее относится к случаю волн, распространяющихся под малым углом друг к другу).

Если на пути волн поместить плоский экран, то плоскости равной интенсивности пересекут его по параллельным прямым, т. е. на экране будут наблюдаться чередующиеся светлые и темные *интерференционные полосы*. Когда плоскость экрана перпендикулярна биссектрисе угла между направлениями волн, ширина интерференционной полосы равна величине  $\Delta x$ , определяемой соотношением (11.6).

Зависимость освещенности экрана от координаты  $x$  (рис. 11.2) дается выражением

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi x/\Delta x) \quad (11.7)$$

(начало отсчета на оси  $x$  выбрано в одном из максимумов — данный рисунок соответствует значению  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ). В частном случае интерференции волн одинаковой интенсивности  $I_1 = I_2$  формула (11.7) принимает вид

$$I(x) = 2I_1[1 + \cos(2\pi x/\Delta x)] = 4I_1 \cos^2(\pi x/\Delta x), \quad (11.8)$$

а освещенность экрана изменяется от минимального значения, равного нулю, до максимального, равного учетверенному значению освещенности от одной волны. Заметим, что если экран наклонить на угол  $\beta$ , то ширина полосы увеличится и станет равной  $\Delta x/\cos \beta$ .

Данный пункт завершим следующим замечанием о результирующей интерференционной картине для случая эллиптически поляризованных волн. Здесь ширина интерференционных полос (11.6) для каждой из двух пар составляющих волн  $\mathbf{E}^\perp$  и  $\mathbf{E}^\parallel$  одинакова, но положения полос, зависящие от соответствующих разностей фаз  $\varphi_1^\perp - \varphi_2^\perp$  и  $\varphi_1^\parallel - \varphi_2^\parallel$ , в общем случае не совпадают. Поэтому их наложение может привести как к усилению, так и к ослаблению резкости интерференционной картины. Приведем в этой связи пример, демонстрирующий возможность полного погашения интерференции при наложении волн эллиптической поляризации.

*Пример\**. Вычислить интерференционный член  $I_{12}$  и выявить условия, при которых  $I_{12} \equiv 0$ , для волн с волновыми векторами, изображенными на рис. 11.1, которые, совместив ось  $z$  плоскости  $(x, z)$  с направлением  $\mathbf{k}_1$ , можно записать в виде

$$\mathbf{k}_1 = k\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k}_2 = k(\cos \alpha \mathbf{e}_z + \sin \alpha \mathbf{e}_x).$$

Соответствующие поля эллиптической поляризации для общности примем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= (E_{11}\mathbf{e}_x + E_{12}e^{i\delta_1}\mathbf{e}_y)e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= (E_{21}\mathbf{e}_x + E_{22}e^{i\delta_2}\mathbf{e}_y + E_{23}\mathbf{e}_z)e^{i\delta_0}e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E_{11}, E_{12}$ , а также  $E_{21}, E_{22}$  — положительные константы ( $E_{23} < 0$  не участвует в интерференции),  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  — произвольные фазы.

*Решение.* По определению

$$I_{12} = 2(\overline{E_{1x}E_{2x}} + \overline{E_{1y}E_{2y}})$$

и в данном случае приобретает значение

$$I_{12} = E_{11}E_{21} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} - \delta_0] + E_{12}E_{22} \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} - \delta_0 + (\delta_1 - \delta_2)].$$

Так как по условию задачи  $E_{11}E_{21} \neq 0$ ,  $E_{12}E_{22} \neq 0$ , для выполнения требования  $I_{12} \equiv 0$  необходимо, чтобы косинусы в последнем выражении отличались только знаками, а коэффициенты при них были равны между собой.

Таким образом, волны (1) не интерферируют, если фазы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  отличаются на  $\pi$ , т. е.

$$\delta_1 = \delta_2 \pm \pi, \quad (2)$$

а амплитуды компонент полей  $E_x, E_y$  связаны соотношением

$$\frac{E_{12}}{E_{11}} = \frac{E_{21}}{E_{22}}. \quad (3)$$

Таковы формальные условия для получения  $I_{12} \equiv 0$ . Чтобы увидеть физические особенности неинтерферирующих эллиптически поляризованных волн, обратимся к  $x, y$ -компонентам полей (1), которые при выполнении условия (2) приобретают вид

$$\begin{cases} E_{1x} = E_{11} \cos(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega t), \\ E_{1y} = -E_{12} \cos(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega t + \delta_2), \\ E_{2x} = E_{21} \cos(\mathbf{k}_2\mathbf{r} - \omega t + \delta_0), \\ E_{2y} = E_{22} \cos(\mathbf{k}_2\mathbf{r} - \omega t + \delta_0 + \delta_2), \end{cases}$$

где  $\delta_2$  — произвольная (так же, как и  $\delta_0$ , роль которой здесь не обсуждается). Видно, что при  $\delta_2 = 0$  эти волны являются линейно-поляризованными, а при выполнении условия (3) они к тому же поляризованы в перпендикулярных направлениях. (Этот очевидный результат, конечно, интереса здесь не представляет.) При  $\delta_2 \neq 0$  рассматриваемые волны эллиптически поляризованы. Их эллипсы поляризации подобны между собой и повернуты друг относительно друга на угол  $\pi/2$ , а вектора  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  вращаются в противоположных направлениях. Эти свойства наиболее просто, как мы видели в § 7.6., выявляются в случае  $\delta_2 = \pi/2$ , когда

$$\begin{cases} E_{1x} = E_{11} \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t), \\ E_{1y} = E_{12} \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t), \end{cases} \quad \begin{cases} E_{2x} = E_{21} \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \delta_0), \\ E_{2y} = -E_{22} \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \delta_0) \end{cases}$$

и главные оси эллипсов совпадают с направлениями осей координат.

Для иллюстрации сказанного на рис. 11.3 изображены эллипсы поляризации с указанием направлений вращения полей (видимых с конца вектора  $\mathbf{k}_1$ ) в волнах 1 и 2 при конкретном значении  $E_{12}/E_{11} = 1/2$ .

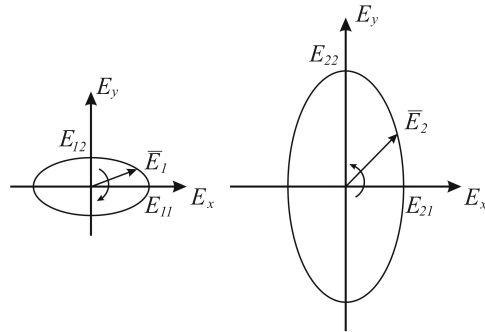


Рис. 11.3

**2.** Теперь рассмотрим случай интерференции волн от двух точечных монохроматических источников  $S_1$  и  $S_2$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга. Для наблюдения служит плоский экран, установленный на расстоянии  $L \gg d$  от линии  $S_1S_2$ , как показано на рис. 11.4. Плоскость рисунка образована линией  $S_1S_2$  и прямой, проведенной из средней точки между источниками перпендикулярно к экрану. Линия пересечения экрана с рисунком принята за ось  $x$ .

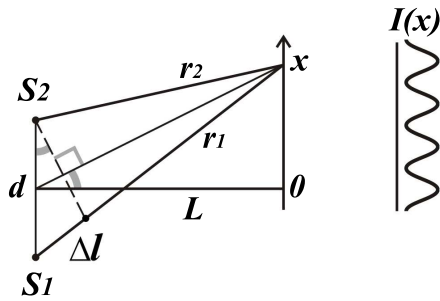


Рис. 11.4

В каждую точку экрана приходят две сферические волны. Поле каждой из них в точке наблюдения состоит из двух взаимно перпендикулярных составляющих. Для точек на оси  $x$  эти составляющие, лежащие соответственно в плоскости рисунка и перпендикулярно к ней, легко мысленно представить как аналог рис. 11.1. Для произвольной точки экрана подобное разложение также справедливо, но обсуждение соответствующих геометрических построений, уводящее нас без особой необходимости в сторону, здесь неуместно. Поэтому вначале мы ограничимся рассмотрением распределения интенсивности только в точках на оси  $x$ . В соответствии с условием  $L \gg d$  компоненты поля от каждого источника будем рассматривать как параллельные между собой и одну из пар представим в виде (7.57)

$$\begin{aligned} E_{01} \frac{L}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)}, \\ E_{02} \frac{L}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

допустив, для возможности дальнейшего обобщения, отличные друг от друга начальные фазы  $\varphi_1, \varphi_2$ . Здесь  $E_{01}, E_{02}$  — положительные вещественные константы,  $r_1, r_2$  — расстояния от  $S_1, S_2$  до точки наблюдения на экране; при условии  $L \gg d$  отличим  $r_1, r_2$  между собой, а также отличим их от  $L$  (при обычном ограничении  $x \ll L$ ) в знаменателях выписанных выражений можно пренебречь. Тогда для результирующей интенсивности, повторив рассуждения п. 1, получаем выражение (11.5), где в качестве разности фаз проходящих волн выступает

$$\delta\Psi(\mathbf{r}) = k(r_1 - r_2) + \varphi_1 - \varphi_2.$$

Заметим, что это выражение отличается от (11.4), что обусловлено отмеченным в § 7.11 несовпадением показателей экспонент, описывающих сферическую и плоскую монохроматические волны.

Таким образом, для интерференции волн от точечных источников имеем

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta l + \delta\varphi), \quad (11.10)$$

где  $\Delta l = r_1 - r_2$  — разность хода интерферирующих волн,  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  — разность начальных фаз, а  $I_1 = (1/2)E_{01}^2$ ,  $I_2 = (1/2)E_{02}^2$ . Отсюда понятно, что при минимальной по модулю разности хода  $\Delta l_{min}$ , только компенсирующей разность  $\delta\varphi$ , на экране возникает максимальная интенсивность  $I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ . Положения других максимумов определяются условием

$$\Delta l_m = \Delta l_{min} \pm m\lambda \text{ или } k\Delta l_m = \pm 2\pi m,$$

где целое число  $m$  называется *порядком интерференции*, а соответствующие максимумы называются максимумами  $m$ -го порядка. Следовательно, тот максимум, который возникает при  $\Delta l = \Delta l_{min}$ , является максимумом *нулевого порядка*. Заметим, что интерференционные минимумы  $I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$  в общем случае не равны нулю. Только при  $I_1 = I_2$  имеем  $I_{min} = 0$ .

Отчетливость интерференционной картины зависит от разности между  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  и характеризуется параметром, называемым *видность интерференционных полос*

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (11.11)$$

изменяющимся в пределах от 0 (когда интерференция отсутствует) до 1, когда  $I_{min} = 0$ . В рассматриваемом случае распределения интенсивности (11.10) имеем

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Чтобы найти зависимость освещенности экрана от координаты  $x$ , нужно разность хода выразить через координату точки наблюдения. В качестве достаточного приближения здесь можно принять результат в виде  $\Delta l(x) = (d/L)x$ , просматривающийся при  $d \ll L$ ,  $x \ll L$  непосредственно из геометрического построения, намеченного пунктиром на рис. 11.4. Этот результат является нулевым приближением более точного выражения

$$\Delta l(x) = d\left[\left(1 - \frac{1}{8} \frac{d^2}{L^2}\right) \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{L^3}\right], \quad (11.12)$$

которое нам понадобится еще раз в § 11.7. Таким образом, интерференционный член в формуле (11.10) имеет вид

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\frac{d}{L}x + \delta\varphi),$$

откуда следует, что шаг интерференционных полос, определяемый условием  $k(d/L)\Delta x = 2\pi$ , равен  $\Delta x = (\lambda/d)L$ . Следовательно, условие  $L \gg \gg d$ , принятое раньше, является необходимым для визуального наблюдения интерференционной картины. Заметим, что при  $I_1 = I_2 = I_0$  распределение интенсивности (11.10) приобретает вид

$$I(x) = 2I_0[1 + \cos(k\frac{d}{L}x + \delta\varphi)]; \quad (11.13)$$

тогда видность полос принимает значение  $V = 1$ .

До сих пор рассматривались только точки экрана, лежащие в плоскости чертежа на рис. 11.2. В пространстве поверхности максимальной и минимальной интенсивности представляют собой гиперboloиды вращения с фокусами в точках  $S_1$  и  $S_2$ , так как соответствуют множеству точек, для которых разность расстояний от двух заданных точек (источников  $S_1$  и  $S_2$ ) имеет одно и то же значение. Форма интерференционных полос на экране определяется линиями пересечения этих гиперboloидов с плоскостью экрана. В небольшой центральной его области полосы практически можно считать равноотстоящими параллельными прямыми, ориентированными перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 11.2.

### 11.3. Первый шаг в сторону от монохроматической идеализации

Теперь предположим, что точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$  являются малые скопления независимо излучающих атомов. Тогда приходящие в точку наблюдения волны являются квазимонохроматическими (см. § 8.3) и представляют собой наложения случайных последовательностей отдельных цугов волн. Связанные с ними поля при этом могут описываться выражениями (11.9), если только под символами  $\varphi_1, \varphi_2$  понимать независимые медленноменяющиеся случайные функции времени  $\varphi_1(t)$



и  $\varphi_2(t)$ . Эти функции таковы, что за «приборное время»  $\tau_0$  они с равной вероятностью принимают любое значение из промежутка  $(-\pi, \pi)$ , так что справедливо равенство

$$\langle \cos \varphi_{1,2}(t) \rangle = 0.$$

С другой стороны, для функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  характерно существование промежутка времени  $\tau$ , называемого *временем когерентности*, в течение которого они остаются почти неизменными. Как следует из оценки § 8.3, по порядку величины промежутки  $\tau$  составляет  $10^7$  периодов волны ( $\tau \sim 10^7 \cdot 2\pi/\omega$ ). Но он все же очень мал по сравнению с временем усреднения  $\tau_0$ , т. е. справедливы оценки

$$2\pi/\omega \ll \tau \ll \tau_0. \quad (11.14)$$

Таким образом, при использовании квазимонохроматической модели излучения интерферирующим в точках экрана волнам соответствуют поля вида

$$E_1 = E_{01} e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)},$$

$$E_2 = E_{02} e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)},$$

в которых амплитуды  $E_{01}, E_{02}$  можно считать не зависящими от времени. Теперь при условии (11.14) вычисление средних значений, определяющих интенсивность (11.2), можно выполнять поэтапно. Сначала осуществить усреднение за период  $2\pi/\omega$ , считая функции  $\varphi_{1,2}(t)$  неизменными, а затем полученный результат усреднить за интервал  $\tau_0$ . Для интерференционного члена, например,

$$I_{12} = 2 \langle E_1 E_2 \rangle = 2 \langle \overline{E_1 E_2} \rangle,$$

используя правило (7.20), согласно которому

$$\overline{E_1 E_2} = (1/2) E_{01} E_{02} \cos[k(r_1 - r_2) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)],$$

получаем

$$I_{12} = E_{01} E_{02} \langle \cos[k(r_1 - r_2) + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \rangle.$$

Учтя, что  $I_1 = (1/2) E_{01}^2$ ,  $I_2 = (1/2) E_{02}^2$ , основную интерференционную формулу теперь можем представить в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta\Psi \rangle, \quad (11.15)$$

отличие которого от соответствующего результата (11.10) для монохроматической идеализации содержится в операции усреднения косинуса разности фаз приходящих волн

$$\delta\Psi = k(r_1 - r_2) + \delta\varphi(t), \quad \delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t). \quad (11.16)$$

Это отличие, несущественное на первый взгляд, приводит к весьма существенным последствиям.

В зависимости от характера функции  $\delta\varphi(t)$  две волны, приходящие в точку наблюдения, при грубом рассмотрении можно разделить на *когерентные* и *некогерентные* между собой. Первый случай имеет место, если  $\delta\varphi(t) \approx \text{const}$ : при  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ , являющихся случайными функциями времени, их разность почти не меняется в течение промежутка времени  $\tau_0$ . В этом случае

$$\langle \cos \delta\Psi \rangle = \cos[k(r_1 - r_2) + \delta\varphi]$$

зависит от положения точки наблюдения и создает такие же интерференционные полосы, как и для монохроматических волн. Если же  $\delta\varphi(t)$  является случайной функцией времени, для которой

$$\langle \cos \delta\Psi \rangle = 0,$$

волны называются некогерентными; эти волны не интерферируют.

#### 11.4. Квазимонохроматичность и когерентность

Эти понятия, введенные в главе 8 и в предыдущем параграфе, имеют фундаментальное значение для понимания явления интерференции. Поэтому здесь продолжим обсуждение содержания этих понятий и их связи. Постараемся составить определенное образное представление о характере изменения фазы в волне, называемой квазимонохроматической.

Напомним, что электрическое поле в точке наблюдения в случае естественного источника света есть результат наложения полей от спонтанно излучающих возбужденных атомов. А возбужденный атом излучает не монохроматическую волну, а выстреливает волновой цуг определенной длительности, причем в качестве модели можно принять либо обрывок синусоиды, либо поле затухающего осциллятора (рис. 11.5).

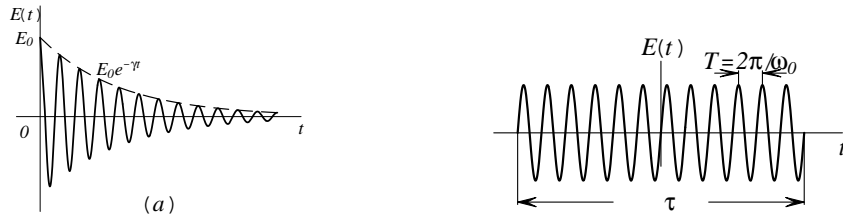


Рис. 11.5

Поле затухающего осциллятора (рис. 11.5, *a*) отвечает излучению свободных атомов. Здесь коэффициент  $\gamma$  является коэффициентом радиационного затухания. Время  $\tau_{\text{изл}} = 1/\gamma$  есть время жизни возбужденного состояния, причем  $\tau_{\text{изл}} \simeq 10^{-8}$  с.

В реальном источнике из-за столкновения атомов процесс излучения может прерываться. При определенной плотности газовой среды эффективное время жизни  $\tau_{\text{уд}}$  излучающего атома в возбужденном состоянии может оказаться меньше радиационного времени  $\tau_{\text{изл}}$ . А если характерное время между столкновениями много меньше времени радиационного затухания, то изменением амплитуды на протяжении отдельного цуга можно пренебречь и принять модель обрывка синусоиды. Излучение, приходящее в точку наблюдения от реального источника, состоящего из большого числа элементарных излучателей, можно схематически изобразить в виде простейшей идеализации (рис. 11.6).

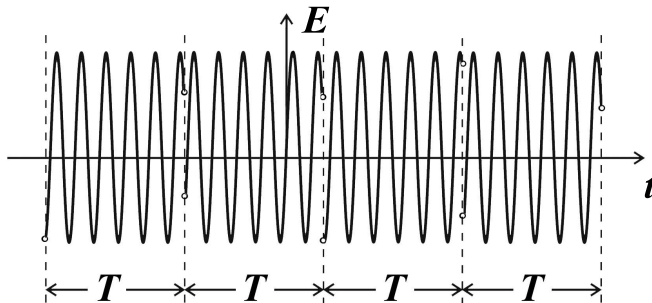


Рис. 11.6

Здесь изображена последовательность цугов волн неизменной амплитуды и неизменной длительности  $T$ , в пределах которых фаза не сби-

вается, а при переходе от одного цуга к другому случайным образом меняется. Реальная картина только приближенно укладывается в эту простую модель, т. к.  $\varphi$  меняется постоянно. Однако всегда можно выделить некоторый промежуток времени  $\tau$ , в течение которого значение фазы можно предсказать по ее начальному значению. Это время уже было названо временем когерентности, а само явление наличия корреляции фаз называется *временной когерентностью*.

Напомним, что поле, схематически представленное на рис. 11.6, является квазимонохроматическим; его спектр характеризуется некоторой шириной возле основной частоты  $\omega_0$ . Ширина линии связана с длительностью цуга (или временем когерентности  $\tau$ ) соотношением неопределенности

$$\Delta\omega \cdot \tau \sim \pi.$$

Таким образом, когда мы говорим о квазимонохроматическом свете, то под этим понимаем следующее. *Во временном представлении* это есть последовательность синусоидальных цугов определенной длительности, большой по сравнению с периодом колебаний, фазы которых при переходе от одного цуга к другому случайным образом меняются. *В спектральном представлении* квазимонохроматическая волна характеризуется наличием малой ширины спектральной линии  $\Delta\omega \sim \pi/\tau$  возле основной частоты  $\omega_0$ . При этом минимальная ширина в случае естественного источника получается, если в качестве  $\tau$  выступает время радиационного затухания  $\tau_{\text{изл}} \sim 10^{-8}$  с. Тогда, как видно из § 8.3.,  $\Delta\omega/\omega_0 \sim 10^{-7}$  и, следовательно, время когерентности составляет  $10^7$  периодов колебаний. С учетом ударного и доплеровского уширения реальная ширина линии может в несколько сотен раз превышать естественную ширину линии  $\pi/\tau_{\text{изл}}$ . В лазерах благодаря вынужденному излучению возбужденных атомов  $\tau$  достигает значений  $10^{-3}$  с.

Сделаем уточняющее замечание о соотношении неопределенности применительно к случайному процессу типа изображенного на рис. 11.6. На первый взгляд кажется, что протяженность рассматриваемого процесса скорее равна бесконечности, чем  $T$ , и поэтому ширина спектра не обязана удовлетворять требованию  $\Delta\omega \sim \pi/T$ .

Чтобы удостовериться в ошибочности подобных представлений, проведем необходимый анализ. Примем, что случайное поле  $E(t)$  в точке наблюдения представляет собой наложение цугов волн, приходящих от элементарных излучателей. Пусть, для простоты, все цуги одинаковы. Они могут быть обрывком синусоиды, полем затухающего осциллятора или чем-либо другим, но обязаны быть одинаковыми, т. е. весь *стацио-*

нарный случайный процесс может быть изображен в виде такой суммы:

$$E(t) = \sum_i E_0(t - t_i).$$

Здесь  $E_0(t)$  — поле одного цуга, «центр» которого приходится на момент  $t = 0$ ,  $t_i$  — случайные, между ними нет корреляции, т. к. атомы излучают спонтанно.

Пусть за промежутков усреднения  $(-\tau_0/2, \tau_0/2)$  через точку наблюдения проходит большое число  $n$  «центров». Поле этих  $n$  цугов пусть будет

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^n E_0(t - t_i).$$

Обратимся к средней интенсивности поля  $E(t)$  в точке наблюдения и выразим ее через  $\mathcal{E}(t)$ :

$$I = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} E^2(t) dt = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^2(t) dt.$$

(Здесь при замене  $E(t)$  на  $\mathcal{E}(t)$  и замене пределов интегрирования мы негласно предположили, что на всем интервале  $(-\tau_0/2, \tau_0/2)$  поля  $E(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  тождественны, и что  $\mathcal{E}(t) = 0$  вне этого интервала. На самом деле оба эти предположения неточны: поле  $\mathcal{E}(t)$  выходит за пределы интервала за счет «хвостиков» полей от тех цугов, центры которых находятся вблизи границ; по аналогичной причине в этих местах поля  $E(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  отличаются между собой. Но в условиях, когда интервал усреднения  $\tau_0$  намного больше длительности одного цуга, т. е.  $n \gg 1$ , отмеченные неточности не влияют на справедливость выписанного соотношения.)

На основании теоремы Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(\omega)|^2 dt.$$

Так как  $E_0(t - t_i) \doteq E_0(\omega)e^{i\omega t_i}$  (см. (8.11)), то

$$\mathcal{E}(\omega) = E_0(\omega) \sum_{i=1}^n e^{i\omega t_i}, \quad |\mathcal{E}(\omega)|^2 = |E_0(\omega)|^2 \sum_{i=1}^n |e^{i\omega t_i}|^2 =$$

$$= |E_0(\omega)|^2 \sum_{i,k=1}^n e^{i\omega(t_i-t_k)} = |E_0(\omega)|^2 \left( n + 2 \sum_{i<k}^n \cos \omega(t_i - t_k) \right)$$

(двойную сумму преобразовали, выделив из нее слагаемые  $i = k$ ). Напомним, что моменты времени  $t_i$  — совершенно случайны. В силу этого косинус в последней сумме с одинаковой вероятностью принимает одинаковые по модулю положительные и отрицательные значения, поэтому при  $n \gg 1$  эта сумма равна 0. Получили, что

$$|\mathcal{E}(\omega)|^2 = n |E_0(\omega)|^2.$$

Следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega = (n/\tau_0) \int_{-\infty}^{\infty} |E_0(\omega)|^2 d\omega, \text{ т. е. } I(\omega) = n_1 |E_0(\omega)|^2,$$

где  $n_1 = n/\tau_0$  — среднее число цугов, проходящих через точку наблюдения за единицу времени. Таким образом, энергетический спектр рассматриваемого случайного поля по форме совпадает со спектром отдельного цуга.

Итак, контур спектральной линии квазимонохроматической волны совпадает по ширине и форме с контуром спектральной линии одного цуга. Следовательно, наше сомнение было необоснованно. Важно подчеркнуть, что для получения данного результата важна случайность моментов прихода отдельных цугов. Вспомнив спектр периодически повторяющихся сигналов, легко сообразить, как бы видоизменился спектр, если бы цуги волн приходили строго с выдерживанием интервала.

## 11.5. Опыт Юнга. Качественное рассмотрение

Как было замечено в § 11.3, если разность фаз  $\delta\varphi(t)$  двух волн, входящих в точку наблюдения, является случайной функцией, то эти волны не интерферируют. Подобная ситуация имеет место, когда система волн, изображенная на рис. 11.3, порождается независимыми квазимонохроматическими источниками  $S_1, S_2$ . Понятно, что для возможности наблюдения интерференции необходимо, чтобы интерферирующие

волны исходили от одного источника и были когерентны. Это впервые было осуществлено Томасом Юнгом в начале XIX века. *Принципиальная схема* опыта Юнга представлена на рис. 11.7. Здесь  $S$  — точечный источник, создающий квазимонохроматическую сферическую волну, которая на двух малых (меньше длины волны) близкорасположенных отверстиях в экране  $A$  порождает вторичные сферические волны<sup>2</sup>. Для наблюдения интерференции этих волн служит другой экран, расположенный на большом расстоянии  $L$  от первого ( $L \gg d$ , где  $d$  — расстояние между отверстиями  $O_1, O_2$ ).

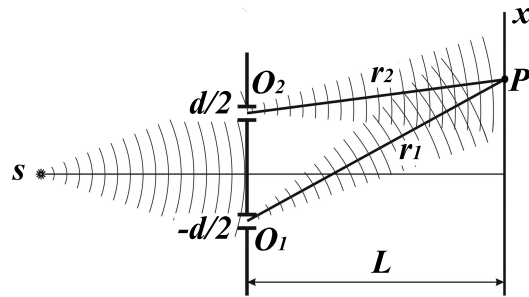


Рис. 11.7

Поле волн, порождаемой источником  $S$ , в отверстиях  $O_1, O_2$  может быть представлено в виде  $E(t) = E_0 e^{i\varphi_s(t)} e^{-i\omega t}$ , где  $\varphi_s$  — случайная функция времени, характеризующаяся временем когерентности  $\tau$  (см. § 11.3). Тогда волны, приходящие в точку наблюдения  $P$ , характеризуются полями, фазы которых с учетом запаздывания на времена  $r_1/c, r_2/c$  равны соответственно

$$\Psi_1(t) = \varphi_s\left(t - \frac{r_1}{c}\right) - \omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right), \quad \Psi_2(t) = \varphi_s\left(t - \frac{r_2}{c}\right) - \omega\left(t - \frac{r_2}{c}\right),$$

где  $r_1, r_2$  — расстояния от  $O_1, O_2$  до точки наблюдения  $P$ . При этом распределение суммарной интенсивности определяется формулой (11.15)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \delta\Psi \rangle,$$

а в качестве разности фаз выступает

$$\delta\Psi = k(r_1 - r_2) + \varphi_s\left(t - \frac{r_1}{c}\right) - \varphi_s\left(t - \frac{r_2}{c}\right).$$

<sup>2</sup>Влияние размера источника  $S$  на интерференционные явления рассматривается в § 11.7, а конечность размеров отверстий будет обсуждаться в главе о дифракции.

Сместив начало отсчета времени, последнюю величину можно представить в виде

$$\delta\Psi = k\Delta l + \varphi_s(t) - \varphi_s(t + \frac{\Delta l}{c}), \quad \Delta l = r_1 - r_2,$$

так как для стационарной случайной функции это не приводит к изменению среднего значения  $\langle \delta\Psi \rangle$ .

Таким образом, суммарная интенсивность света в опыте Юнга для общего случая  $I_1 \neq I_2$  определяется формулой

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[k\Delta l + \varphi_s(t) - \varphi_s(t + \frac{\Delta l}{c})] \rangle.$$

(Заметим, что отличие  $I_1$  и  $I_2$  в данном опыте может быть вызвано только неодинаковостью малых отверстий  $O_1, O_2$  по площади; при одинаковых отверстиях имеем  $I_1 = I_2$ .) Из формулы видно, что здесь интерференционный член полностью зависит от величины разности хода.

Если  $\Delta l/c \ll \tau$ , где  $\tau$  — время когерентности источника, то входящая в аргумент косинуса разность фаз  $\delta\varphi_s(t)$  почти для всех моментов времени внутри интервала усреднения  $\tau_0$  равна нулю и  $\langle \cos \delta\Psi \rangle = \langle \cos k\Delta l \rangle$ . То есть, если разность хода  $\Delta l$  существенно меньше длины волнового пуга  $c\tau$  ( $\Delta l \ll c\tau$ ) (в дальнейшем ее будем называть *продольным размером когерентности* и обозначать символом  $l_{\parallel}$ ), то волны, приходящие в точку наблюдения по двум разным путям, когерентны и создают интерференционную картину, совпадающую с той, которая получается при использовании монохроматической идеализации. Она исследована в § 11.2 и графически представлена на рис. 11.3.

Можно представить, что когда разность хода достигнет значений, близких к  $l_{\parallel} = c\tau$  или превышающих эту величину, то функция  $\delta\varphi_s(t)$  на интервале усреднения начинает принимать случайные значения, что приводит к снижению видности (11.11) интерференционной картины.

Таким образом, если в схеме Юнга используется точечный квазимонохроматический источник с временем когерентности  $\tau$  (или с шириной спектральной линии  $\Delta\omega \sim \pi/\tau$ ), то отчетливая интерференционная картина наблюдается в тех частях экрана, для которых разность хода

$$\Delta l \ll l_{\parallel}.$$

При увеличении  $\Delta l$  видность полос интерференционной картины уменьшается и при  $\Delta l > l_{\parallel}$  быстро обращается в нуль.



Заметим для дальнейшего, что продольный размер когерентности квазимонохроматического излучения определяется по одной из следующих формул:

$$l_{\parallel} = c\tau = c \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}. \quad (11.17)$$

(Последнее выражение относится к случаю, когда излучение характеризуется разбросом длин волн  $\Delta\lambda$  возле основной величины  $\lambda_0$ ; получается из соотношения  $\omega = c(2\pi/\lambda)$ , связывающего круговую частоту с длиной волны излучения.) Продольный размер когерентности для естественных источников света может достигать метров. Например, если источником света является разреженный газ, то, как отмечалось в § 11.4, в качестве времени когерентности выступает время радиационного затухания  $\tau_{\text{изл}} \sim 10^{-8}\text{с}$ , и тогда  $l_{\parallel}$  имеет порядок  $\tau_{\text{изл}} = 3 \cdot 10^2\text{см}$ . При учете доплеровского уширения эта величина спадает до сантиметров.

## 11.6. Опыт Юнга. Количественный анализ

Итак, из качественных соображений о времени и длине когерентности мы пришли к пониманию характера изменения интерференционной картины по мере удаления точки наблюдения от оси симметрии. Теперь полученный качественный результат подтвердим прямым вычислением. Источник будем еще продолжать считать точечным. Пусть он излучает спектр ширины  $\Delta\omega \ll \omega_0$  вблизи основной частоты  $\omega_0$ . Для простоты истинный контур спектральной линии аппроксимируем прямоугольником, как показано на рис. 11.8.

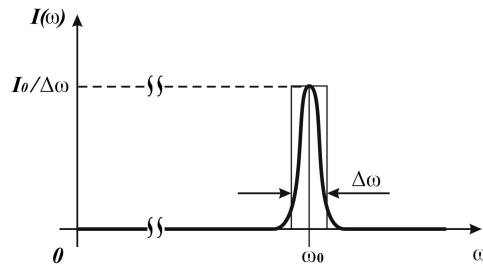


Рис. 11.8

Выделим в спектре линию ширины  $d\omega$ , узкую настолько, что ее про-

дольный размер когерентности  $l_{\parallel} = c\pi/d\omega$  намного больше, чем все рассматриваемые здесь разности хода. В этом случае данная спектральная линия в рассматриваемой области экрана создает интерференционную картину, определяемую соотношением (11.10). Отверстия в экране А (рис. 11.7) будем считать одинаковыми. Тогда входящие в формулу (11.10) интенсивности  $I_1, I_2$  равны и для рассматриваемой узкой линии

$$dI_1 = dI_2 = \frac{I_0}{\Delta\omega} d\omega,$$

а распределение  $dI(x)$  задается как

$$dI(x) = 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \left( 1 + \cos \frac{\omega}{c} \Delta l(x) \right) d\omega.$$

Соседняя спектральная линия излучает другую квазимонохроматическую волну, фазы в которой меняются случайно, независимо от первой волны. Следовательно, вторая волна не может интерферировать с первой. У них просто складываются интенсивности. Поэтому суммарное распределение интенсивности на экране будет

$$I(x) = 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \left( 1 + \cos \frac{\omega}{c} \Delta l(x) \right) d\omega,$$

что после интегрирования приобретает вид

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega}{2c} \Delta l(x) \right] \cos \frac{\omega_0}{c} \Delta l(x) \right). \quad (11.18)$$

Полученное выражение отличается от соответствующего результата (11.13) для монохроматического излучения (при  $\delta\varphi = 0$ ) только наличием в интерференционном члене множителя

$$\xi = \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega}{2c} \Delta l(x) \right],$$

представляющего собой медленноменяющуюся функцию по сравнению с  $\cos[(\omega_0/c)\Delta l(x)]$ . Но благодаря ему видность интерференционных полос (11.11) теперь не остается постоянной  $V = 1$ , как в случае (11.13), а меняется при изменении координаты  $x$ , так как

$$I_{max} = 2I_0(1 + |\xi|), \quad I_{min} = 2I_0(1 - |\xi|) \quad \text{и} \quad V = |\xi(x)|.$$

Для удобства интерпретации результатов аргумент функции  $\xi$  преобразуем, введя в него  $l_{\parallel} = c(\pi/\Delta\omega)$  — продольный размер когерентности. Тогда

$$\xi = \text{sinc}\left[\frac{\pi}{2} \frac{\Delta l(x)}{l_{\parallel}}\right],$$

и график функции

$$V = |\xi| = \left| \text{sinc}\left[\frac{\pi}{2} \frac{\Delta l(x)}{l_{\parallel}}\right] \right|$$

имеет вид, изображенный на рис. 11.9.

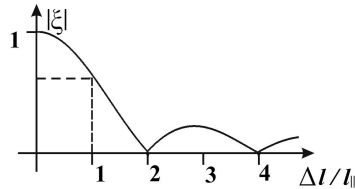


Рис. 11.9

Таким образом, как уже отмечалось в предыдущем параграфе, видность интерференционных полос остается близкой к единице, пока разность хода намного меньше  $l_{\parallel}$ . Когда  $\Delta l$  находится в пределах  $0 \leq \Delta l \leq l_{\parallel}$ , видность полос превышает значение  $V = 1/2$ , т. е.

$$V > 1/2 \text{ при } \Delta l \leq l_{\parallel}.$$

Только при дальнейшем увеличении разности хода значение  $V$  падает до нуля (при  $\Delta l_{max} = 2l_{\parallel}$ ).

Формулу (11.18), задающую распределение интенсивности, перепишем, заменив разность хода приближенным выражением  $\Delta l(x) = xd/L$ :

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2c} \frac{d}{L} x\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{c} \frac{d}{L} x\right) \right],$$

и для части экрана со стороны положительных  $x$  изобразим на рис. 11.10. Здесь местоположение, где видность полос в первый раз опускается до нуля, отмечено координатой  $x_* = 2l_{\parallel}L/d$ . Сравнив ее с шагом интерференционных полос  $\Delta x = \lambda_0 L/d$ , находим, что  $x_* = 2(l_{\parallel}/\lambda_0)\Delta x$ . Так как  $l_{\parallel} = \lambda_0^2/(2\Delta\lambda)$  (см. (11.17)), имеем  $x_* = (\lambda_0/\Delta\lambda)\Delta x$ , т. е. число

интерференционных полос в рассматриваемой полосе  $0 < x < x_*$  равно  $\lambda_0/\Delta\lambda$ , или, иными словами, максимальный порядок интерференции  $m_{max} = \Delta l_{max}/\lambda_0$  ограничивается отношением  $\lambda_0/\Delta\lambda$ :

$$m_{max} = \lambda_0/\Delta\lambda.$$

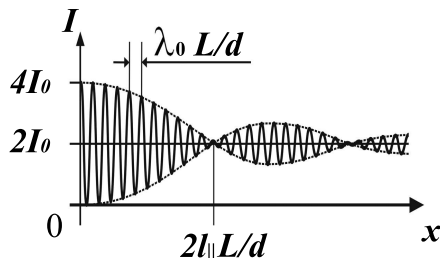


Рис. 11.10

В заключение параграфа отметим, что если свет не квазимонохроматичен, т. е. не выполняется условие  $\Delta\lambda/\lambda_0 \ll 1$ , то наблюдаемая картина зависит также от спектральной чувствительности приемника излучения. В практически важном случае белого света и визуального наблюдения эффективный диапазон длин волн простирается приблизительно от 400 до 700 нм и  $\Delta\lambda/\lambda_0$  примерно равно 1. В этом случае на том месте, где при монохроматическом освещении должна была бы находиться полоса нулевого порядка, мы увидим центральную белую полосу; по обе стороны от нее располагаются окрашенные полосы, а за ними — пространство, которое кажется глазу равномерно освещенным белым светом. Анализ данной ситуации выходит за пределы данного курса, и приведенные результаты наблюдения здесь оставляются без обсуждения.

### 11.7. Влияние размеров источника на интерференционные явления

Рассмотрение схемы Юнга до сих пор проводилось в предположении малости как размера источника, так и отверстий  $O_1, O_2$  по сравнению

с длиной волны. Это позволяло считать, что в каждую точку наблюдения интерферирующие волны приходят со строго определенной разностью хода, зависящей от положения точки. Такая идеализация давала возможность выявить роль некогерентности излучения в интерференционных явлениях, не усложняя анализ побочными факторами.

Теперь откажемся от предположения о малости размеров источника и перейдем к исследованию схемы Юнга при использовании протяженного источника. Последний можно рассматривать как совокупность точечных источников, каждый из которых излучает квазимонохроматическую волну с определенным временем когерентности и единой фиксированной частотой. Разные точки излучают некогерентно, т. е. фазы этих волн меняются случайно и независимо друг от друга. (Встречающееся в некоторых учебниках утверждение, что рассматриваемые точечные источники монохроматичны, но некогерентны между собой, нельзя признать удачным. Подразумевается, конечно, именно квазимонохроматичность.)

Итак, источник света состоит из квазимонохроматических независимых точечных источников. Возникает вопрос, каким образом размер источника может сказаться на интерференционных явлениях. Ответ является достаточно легким. Для этого достаточно рассмотреть систему из двух точечных источников. Для простоты один из них поместим на оси симметрии устройства Юнга, а второй — на расстоянии  $a_s$  от первого, причем располагается в плоскости, проходящей через два отверстия и источник  $S_1$  (рис. 11.11).

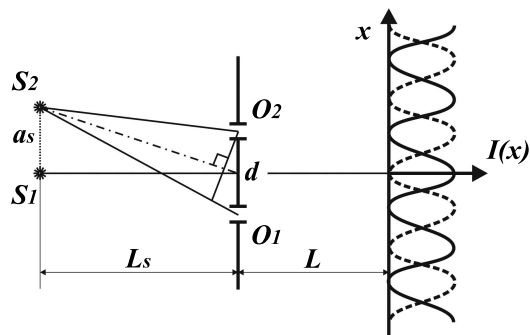


Рис. 11.11

Первый источник создает на экране систему интерференционных полос с максимумом в точке  $x = 0$ . Этому источнику соответствует распреде-

ление  $I(x)$ , показанное на рис. 11.11 сплошной линией. Второй источник создает другую систему интерференционных полос. (Не забываем, что поля от разных квазимонохроматических источников не интерферируют — здесь имеет место простое сложение интенсивностей.) Может случиться, что второму источнику будет соответствовать система полос с нулем в точке  $x = 0$ , изображенная на рис. 11.11 пунктирной линией. В результате этого суммарная интенсивность перестанет зависеть от координаты  $x$ , т. е. присутствие второго источника приводит к исчезновению интерференционной картины. Заметим, что подобная ситуация возникнет, если разность хода от источника  $S_2$  до отверстий равна нечетному числу полувольт, т. к. для источника  $S_1$  соответствующая разность хода равна нулю. Таким образом, минимальный размер  $a_s$ , при котором интерференционная картина на экране исчезает, определяется из условия

$$\frac{a_s}{L_s} d = \frac{\lambda}{2}. \quad (11.19)$$

(В приведенных рассуждениях только для простоты точку  $S_1$  мы располагали на оси симметрии. В общем случае два источника  $S_1, S_2$ , расположенные на расстоянии  $a_s$ , могут взаимно погашать интерференционные картины, если соответствующая *разность разностей хода*  $\delta_1 = S_1O_1P - S_1O_2P$ ,  $\delta_2 = S_2O_1P - S_2O_2P$  достигает величины  $\lambda/2$ . При вычитании  $\delta_2$  из  $\delta_1$  отрезки  $O_1P$  и  $O_2P$  выпадают и условие  $|\delta_1 - \delta_2| = \lambda/2$  сводится к геометрическому требованию  $(S_1O_1 - S_1O_2) - (S_2O_1 - S_2O_2) = \lambda/2$ , эквивалентному равенству (11.19).)

Из данного простейшего анализа понятно, что и для общего случая протяженного источника с характерным размером  $a_s$ , при выполнении вышеприведенного условия, связывающего геометрические размеры  $d, a_s$  и  $L_s$  с длиной волны  $\lambda$ , интерференционная картина будет весьма существенно повреждена. Найденное здесь качественное условие обычно выражают следующим образом: если при фиксированных  $a_s, L_s$  расстояние между отверстиями в схеме Юнга достигнет величины

$$d \sim \frac{\lambda L_s}{2a_s},$$

то видность интерференционных полос уменьшится так, что их наблюдение станет затруднительным.

Такое критическое расстояние между отверстиями

$$l_{\perp} = \frac{\lambda L_s}{2a_s}, \quad (11.20)$$

обозначаемое символом  $l_{\perp}$ , будет дальше называться *поперечным размером когерентности* волнового поля, созданного протяженным квази-монохроматическим источником. Таким образом, условие, необходимое для возможности наблюдения интерференции при использовании протяженного источника, можно представить в виде

$$d \leq l_{\perp}. \quad (11.21)$$

Отсюда следует, что возможности использования протяженных источников для интерференционных опытов по схеме Юнга весьма ограничены. Например, для такого естественного источника как Солнце ( $a_s/L_s \approx 10^{-2}$ ),  $l_{\perp}$  (11.20) составляет всего 50 $\lambda$ ; следовательно, воспользоваться данным источником в схеме Юнга практически невозможно. При реализации схемы Юнга в качестве источника (нелазерного) принимают искусственный источник в виде небольшого отверстия в непрозрачном экране, пропускающего излучение реального протяженного источника.

Приведенные здесь качественные рассуждения и выводы уточним с помощью прямых вычислений, начав с протяженного источника в виде равномерно светящегося отрезка длины  $a_s \ll L_s$ , как показано на рис. 11.12. При этом интенсивности, создаваемые в точке Р волнами, исходящими от элемента  $dx_s$  и проходящими через каждое из одинаковых отверстий, можно принять в виде

$$dI_1 = dI_2 = \frac{I_0}{a_s} dx_s.$$

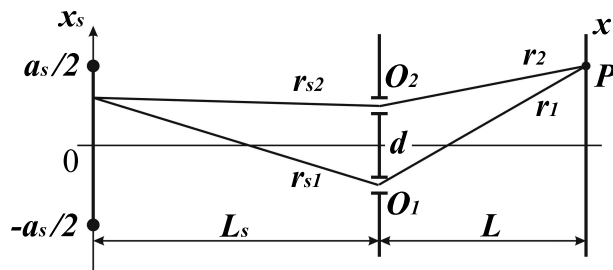


Рис. 11.12

Тогда для результата наложения этих волн в точке наблюдения можно воспользоваться соотношением (11.18). Только в качестве  $\Delta l$  в этой

формуле теперь должна фигурировать суммарная разность хода от элемента  $dx_s$  до точки наблюдения (рис. 11.12)

$$\Delta l_{\Sigma}(x, x_s) = (r_{s1} - r_{s2}) + (r_1 - r_2), \quad (11.22)$$

зависящая от координат  $x$  и  $x_s$ . Таким образом,

$$dI(x) = 2 \frac{I_0}{a_s} \left( 1 + \operatorname{sinc} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\Delta l_{\Sigma}(x, x_s)}{l_{\parallel}} \right] \cos \left[ \frac{\omega_0}{c} \Delta l_{\Sigma}(x, x_s) \right] \right) dx_s.$$

В данном параграфе нас интересует влияние протяженности источника на картину интерференции. Поэтому будем наблюдать лишь ту ограниченную область экрана, где видность полос от отдельных участков протяженного источника равна единице, т. е.  $\Delta l_{\Sigma}(x, x_s) \ll l_{\parallel}$ . Поэтому для этих точек экрана  $\operatorname{sinc} \equiv 1$  и суммарная интенсивность определяется интегралом

$$I(x) = 2 \frac{I_0}{a_s} \int_{-a_s/2}^{a_s/2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\omega_0}{c} \Delta l_{\Sigma}(x, x_s) \right) \right] dx_s.$$

Не ограничиваясь нулевым приближением, аналогичным использованному в § 11.2., разность хода  $\Delta l_{\Sigma}(x, x_s)$ , входящую в аргумент косинуса под интегралом, здесь выпишем с сохранением основных малых добавок, следующих из выражения (11.12):

$$\Delta l_{\Sigma}(x, x_s) = d \left( \frac{x_s}{L_s} + \frac{x}{L} \right) + \Delta l^{(1)}(x_s, x),$$

$$\Delta l^{(1)}(x_s, x) = -\frac{1}{2} d \left[ \left( \frac{x_s}{L_s} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right].$$

В § 11.2. малые добавки можно было не учитывать. Теперь, имея в виду процесс интегрирования, пренебречь влиянием  $\Delta l^{(1)}(x_s, x)$  можно только при выполнении определенного условия. Необходимо, чтобы после умножения на  $\omega_0/c = k$  эта добавка по модулю была мала по сравнению с  $\pi/2$ :

$$\frac{\omega_0}{c} |\Delta l^{(1)}(x_s, x)| \ll \frac{\pi}{2}$$

(и тем самым не оказывала заметного влияния на косинус для всех точек  $|x_s| \leq a_s/2$  внутри промежутка интегрирования и для всех точек наблюдения). Отсюда необходимые ограничения на протяженность источника и области наблюдения для правомерности использования нулевого приближения для  $\Delta l_{\Sigma}$  приобретают вид

$$\left( \frac{a_s}{L_s} \right)^3 \ll \frac{\lambda}{d}, \quad \left( \frac{x}{L} \right)^3 \ll \frac{\lambda}{d}. \quad (11.23)$$

При этом разность хода

$$\Delta l_{\Sigma}(x, x_s) = d \left( \frac{x_s}{L_s} + \frac{x}{L} \right) \ll 2d \left( \frac{\lambda}{d} \right)^{1/3}$$



и заведомо удовлетворяет принятому условию  $\Delta l_{\Sigma} \ll l_{\parallel}$ . Заметим, что условия (11.23) не слишком ограничительны. Например, если  $\lambda/d = 10^{-3}$  ( $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см,  $d = 0,5 \cdot 10^{-1}$  см), то ограничения имеют вид  $a_s \ll 0,1L_s$ ,  $x \ll 0,1L$ .

Таким образом, при выполнении условий (11.23) суммарная интенсивность

$$I(x) = 2 \frac{I_0}{a_s} \left( a_s + \int_{-a_s/2}^{a_s/2} \cos kd \left( \frac{x_s}{L_s} + \frac{x}{L} \right) dx_s \right)$$

после выполнения интегрирования и простого преобразования результата приобретает вид

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc} \left( \frac{kda_s}{2L_s} \right) \cos \frac{kdx}{L} \right].$$

Чтобы физическое содержание полученной формулы сделать яснее, аргумент множителя *sinc* преобразуем, используя введенную выше (11.20) величину  $l_{\perp}$ , и получим

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{2} \frac{d}{l_{\perp}} \right) \cos \frac{kdx}{L} \right]. \quad (11.24)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемой ограниченной области экрана (теперь нетрудно заметить, что эта область задается простым условием  $(x/L)d \ll l_{\parallel}$ , т. к. максимальное значение разности  $r_{s1} - r_{s2}$ , входящей в суммарную разность хода (11.22), при  $d \leq l_{\perp}$  не превышает  $\lambda/2$  и может не учитываться), видность полос

$$V = \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{2} \frac{d}{l_{\perp}} \right) \right| \quad (11.25)$$

не зависит от координаты  $x$ . Обратим внимание: видность полос от одного точечного источника в рассматриваемой области наблюдения имеет значение  $V = 1$ , а конечный размер источника уменьшает ее до значения (11.25), зависящего от отношения  $d/l_{\perp}$ . Нетрудно заметить с помощью рис. 11.9, что видность полос в данном случае больше  $1/2$ , если  $d/l_{\perp} \leq 1$ .

Таким образом, мы еще раз убедились, что ограничение (11.21) на расстояние  $d$  между отверстиями действительно необходимо, чтобы видность полос вблизи центра экрана не упала ниже значения  $V = 1/2$ .

Заметим, что здесь рассматривался простейший вариант протяженного источника в виде равномерно светящегося отрезка длины  $a_s$ . Тот же результат (11.24)

внимательный читатель легко получит, рассматривая источник в виде прямоугольника  $|x_s| \leq a_s/2, |y_s| \leq b_s/2$  (ось  $y_s$  перпендикулярна плоскости рис. 11.12). При этом суммарная разность хода от элемента  $dx_s dy_s$  до точки наблюдения

$$\Delta l_{\Sigma}(x, x_s, y_s) = (\sqrt{r_{s1}^2 + y_s^2} - \sqrt{r_s^2 + y_s^2}) + (r_1 - r_2)$$

при выполнении условия  $(b_s/L_s)^3 \ll \lambda/d$ , дополняющего систему (11.23), сводится к прежнему нулевому приближению. Тогда все последующие шаги являются повторением прежних.

Итак, повторим еще раз вкратце результаты, к которым мы пришли. Немонохроматичность источника определяет критический размер — продольную длину когерентности  $l_{\parallel}$ , который ограничивает разность хода для достижения приемлемых значений видности полос  $V > 1/2$  при использовании точечного источника.

Протяженность источника создает дополнительный механизм размывания интерференционных полос и характеризуется другим критическим размером  $l_{\perp}$ , называемым поперечным размером когерентности волнового поля, создаваемого протяженным квазимонохроматическим источником. Размер  $l_{\perp}$  ограничивает допустимое расстояние между отверстиями в схеме Юнга. При  $d \leq l_{\perp}$  в области экрана, удовлетворяющей условию  $(x/L)d \ll l_{\parallel}$ , имеется система интерференционных полос с видностью  $V_0 = |\text{sinc}((\pi/2)(d/l_{\perp}))|$ , не зависящей от  $x$ . При увеличении  $|x|$  видность полос начинает падать и при  $(x/L)d = l_{\parallel}$  достигает значения  $(1/2)V_0$ .

## 11.8. Корреляционная функция стационарного случайного волнового поля и ее роль в явлении интерференции

Мы увидели, что при освещении интерференционного прибора протяженным квазимонохроматическим источником интерференция наблюдается, если расстояние  $d$  между отверстиями меньше некоторого характерного размера. Этот размер мы уже назвали поперечным размером когерентности  $l_{\perp}$ , давая понять, что колебания электрического поля в отверстиях в случае  $d < l_{\perp}$  когерентны.

Вспомним, что понятие когерентности пока у нас имеется весьма грубое, только качественное. Мы говорили (§ 11.3.), что если разность

фаз двух случайных полей в точке наблюдения

$$E_1(t) = E_{10}e^{i\varphi_1(t)}e^{-i\omega t}, \quad E_2(t) = E_{20}e^{i\varphi_2(t)}e^{-i\omega t}$$

почти не меняется в течение промежутка времени  $\tau_0$ , т. е.

$$\delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \approx \text{const},$$

то поля называются когерентными, а если случайным образом меняется, то — некогерентными. А вопрос, возможны ли какие-либо промежуточные случаи, вовсе не обсуждался. Поэтому теперь перед нами встала задача: во-первых, уточнить само понятие когерентности случайных колебаний или волновых полей, введя *меру когерентности*, и, во-вторых, связать видность интерференционных полос на экране с *комплексной степенью когерентности* полей в отверстиях  $O_1, O_2$ , показанных на рис. 11.12.

Рассматриваемые волновые поля будем задавать в комплексном виде. Пусть поля в точках  $O_1, O_2$ , создаваемые заданным источником,

$$E_1(t) = \hat{u}_1(t)e^{-i\omega t}, \quad E_2(t) = \hat{u}_2(t)e^{-i\omega t}, \quad (11.26)$$

где  $\hat{u}_{1,2}(t) = |\hat{u}_{1,2}(t)| e^{i\varphi_{1,2}(t)}$  — комплексные амплитуды, «медленно» (в масштабе периода колебаний) меняющиеся со временем, являющиеся *стационарными случайными функциями*. Электрическое поле в точке наблюдения  $P$  складывается из полей, приходящих с волной из отверстий  $O_1, O_2$ :

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{\alpha}{r} [E_1(t - \frac{r_1}{c}) + E_2(t - \frac{r_2}{c})] = \\ &= \frac{\alpha}{r} [\hat{u}_1(t - \frac{r_1}{c})e^{-i\omega(t-r_1/c)} + \hat{u}_2(t - \frac{r_2}{c})e^{-i\omega(t-r_2/c)}], \end{aligned}$$

т. е.

$$E_p(t) = \hat{E}_p(t)e^{-i\omega t}, \quad \hat{E}_p(t) = \frac{\alpha}{r} [\hat{u}_1(t - \frac{r_1}{c})e^{ikr_1} + \hat{u}_2(t - \frac{r_2}{c})e^{ikr_2}]. \quad (11.27)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\alpha$  мы приняли одинаковым для обеих волн, считая отверстия одинаковыми по площади. В знаменателе вместо  $r_1, r_2$  написали общее  $r$ , имея в виду, что учет малой разности хода  $r_1 - r_2$  здесь смысла не имеет; понятно, что в качестве этого постоянного  $r$  выступает  $r = L$  (расстояние между экранами). Отсюда интенсивность  $I(P)$  в точке наблюдения, по определению равная

$$\langle E_p^2(t) \rangle = \langle \overline{E_p^2(t)} \rangle = \frac{1}{2} \langle |\hat{E}_p(t)|^2 \rangle,$$

согласно представлению (11.27) имеет вид (после удаления несущественного постоянного множителя  $(1/2)(\alpha/L)^2$ )

$$I(P) = \langle |\hat{u}_1(t - r_1/c)|^2 \rangle + \langle |\hat{u}_2(t - r_2/c)|^2 \rangle + 2\text{Re}[\langle \hat{u}_1(t - r_1/c)\hat{u}_2^*(t - r_2/c) \rangle e^{ik(r_1 - r_2)}]. \quad (11.28)$$

Смысл присутствующего здесь оператора усреднения для произвольной случайной функции определен соотношением (11.1). В рассматриваемом случае стационарных случайных полей результат усреднения первых двух слагаемых не зависит от времени и определяет интенсивности  $I_1(P), I_2(P)$  в точке  $P$ , создаваемые отверстиями  $O_1, O_2$  поодиночке:

$$I_1(P) = \langle |\hat{u}_1(t)|^2 \rangle, \quad I_2(P) = \langle |\hat{u}_2(t)|^2 \rangle.$$

Результат усреднения произведения из интерференционного члена выражения (11.28) не изменится от общего сдвига по времени, например, на величину  $r_1/c$ , в результате чего может быть преобразован:

$$\langle \hat{u}_1(t - (r_1/c))\hat{u}_2^*(t - (r_2/c)) \rangle = \langle \hat{u}_1(t)\hat{u}_2^*(t + \Delta t) \rangle, \quad \Delta t = (r_1 - r_2)/c.$$

Полученная здесь функция от переменной  $\Delta t$

$$\Gamma_{12}(\Delta t) = \langle \hat{u}_1(t)\hat{u}_2^*(t + \Delta t) \rangle$$

называется *функцией корреляции* случайных функций  $\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)$ , а будучи отнормирована делением на  $\sqrt{\langle |\hat{u}_1(t)|^2 \rangle \langle |\hat{u}_2(t)|^2 \rangle}$  будет их *комплексной степенью когерентности* (в данном случае — комплексной степенью когерентности амплитуд полей в отверстиях  $O_1, O_2$ ):

$$\gamma_{12}(\Delta t) = \frac{\langle \hat{u}_1(t)\hat{u}_2^*(t + \Delta t) \rangle}{\sqrt{\langle |\hat{u}_1(t)|^2 \rangle \langle |\hat{u}_2(t)|^2 \rangle}}. \quad (11.29)$$

Функция корреляции самих случайных полей (11.26) в отверстиях определяется как

$$\Gamma_{12}^{(0)} = \langle E_1(t)E_2^*(t + \Delta t) \rangle,$$

а их комплексная степень когерентности  $\gamma_{12}^{(0)}(\Delta t)$  выражается через  $\gamma_{12}(\Delta t)$  соотношением

$$\gamma_{12}^{(0)}(\Delta t) = \gamma_{12}(\Delta t)e^{ik(r_1 - r_2)}.$$

## 11.8. Корреляционная функция случайного волнового поля 169

Заметим здесь, что часто приходится рассматривать случай  $E_1(t) \equiv E_2(t)$ , как, например, в примере точечного источника  $S$  и симметричных отверстий  $O_1, O_2$  из рис. 11.7. В этом случае корреляционная функция называется автокорреляционной и обозначается через  $\Gamma(\Delta t)$  без индексов, а степень когерентности —  $\gamma(\Delta t)$ .

Функции  $\gamma_{12}(\Delta t)$  и  $\gamma_{12}^{(0)}(\Delta t)$  служат мерой когерентности случайных волновых полей в точках  $O_1, O_2$  и представляют, таким образом, решение первой части задачи данного параграфа. Теперь нетрудно заметить, что интерференционный член в сумме (11.28) выражается через функцию  $\gamma_{12}(\Delta t)$ , т. к.

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_1(t - (r_1/c))\hat{u}_2^*(t - (r_2/c)) \rangle &= \langle \hat{u}_1(t)\hat{u}_2^*(t + \Delta t) \rangle = \\ &= 2\gamma_{12}(\Delta t)\sqrt{\frac{\langle |\hat{u}_1(t)|^2 \rangle \langle |\hat{u}_2(t)|^2 \rangle}{2}} = 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\gamma_{12}(\Delta t). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (11.28) приобретает стандартный вид

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\Delta t)e^{ik(r_1-r_2)}],$$

а если учесть, что при одинаковых отверстиях прибора Юнга практически всегда справедливо равенство  $I_1(P) = I_2(P) (= I_0(P))$ , то

$$I(P) = 2I_0(P)\{1 + \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\Delta t)e^{ik(r_1-r_2)}]\}, \quad \Delta t = (r_1 - r_2)/c. \quad (11.30)$$

Эта формула обобщает результаты, ранее полученные для частных случаев точечного квазимонохроматического источника с идеализированной формой спектральной линии (формула (11.18)) и протяженного квазимонохроматического источника (см. (11.24)), которые здесь воспроизведем в таком виде:

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2c}\Delta l(x)\right) \cos k\Delta l(x) \right), \quad (18)$$

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi da_s}{\lambda L_s}\right) \cos k\Delta l(x) \right]. \quad (24)$$

Таким образом, в общем случае интерференционный член в формуле для суммарной интенсивности (11.30) определяется реальной частью произведения  $\gamma_{12}^0(\Delta t) = \gamma_{12}(\Delta t)\exp(ik(r_1 - r_2))$ . (Заметим, что в частном случае точечного источника, симметричного относительно отверстий  $O_1, O_2$ , в формуле (11.30)  $\gamma_{12}(\Delta t)$  заменяется на  $\gamma(\Delta t)$ .) Наличие последнего быстроосциллирующего экспоненциального множителя,

аналогичного  $\cos k\Delta l$ , создает интерференционные полосы — изменение разности хода на  $\lambda/2$  обеспечивает переход от точки максимума к минимуму. При таких перемещениях, которым соответствует изменение аргумента  $\gamma_{12}(\Delta t)$  всего на малую величину  $\lambda/2c$ , значение  $|\gamma_{12}(\Delta t)|$  практически не меняется. Следовательно,  $I_{max} = 2I_0(1 + |\gamma_{12}(\Delta t)|)$ ,  $I_{min} = 2I_0(1 - |\gamma_{12}(\Delta t)|)$  и

$$V(\Delta t) = |\gamma_{12}(\Delta t)|. \quad (11.31)$$

То есть видность интерференционных полос вблизи точки  $P$  экрана равна модулю комплексной степени когерентности полей в двух точках  $O_1, O_2$  (в отверстиях), вычисленной со сдвигом по времени на  $\Delta t = (r_1 - r_2)/c$ . Этот результат представляет собой решение второй части сформулированной в начале параграфа задачи.

Таким образом, как мы выяснили, корреляционные свойства случайного волнового поля вблизи отверстий схемы Юнга полностью определяют интерференционную картину. Наоборот, если известны параметры интерференционной картины, то по ним с помощью формул (11.30), (11.31) можно судить о корреляционных свойствах соответствующего волнового поля. Обратимся с этой целью к результатам (11.18), (11.24), полученным для частных случаев. Первый из них относится к волновому полю, создаваемому точечным источником с идеализированным контуром спектральной линии в виде прямоугольной ступеньки с шириной  $\Delta\omega$ . Из сравнения формул (11.18) и (11.30) имеем

$$\text{Re}[\gamma(\Delta t)e^{ik\Delta l}] = \text{sinc}((\Delta\omega/2c)\Delta l(x)) \cos k\Delta l(x),$$

$$\text{т. е. } \gamma(\Delta t) = \text{sinc}((\Delta\omega/2c)\Delta l(x)),$$

а заменив  $\Delta l/c$  в аргументе функции *sinc* на  $\Delta t$ , получаем

$$\gamma(\Delta t) = \text{sinc}(\Delta\omega\Delta t/2).$$

Время когерентности  $\tau$  данного случайного поля, определяемое условием  $\gamma(\Delta t) = 1/2$ , достаточно хорошо совпадает с оценочным значением  $\pi/\Delta\omega$  (т. к.  $\text{sinc}(\pi/2) \approx 1/2$ ).

Теперь обратимся к формуле (11.24), относящейся к области экрана, для которой разности хода  $\Delta l = r_1 - r_2$  малы по сравнению с продольной длиной когерентности  $l_{\parallel} = c\tau$  волн, излучаемых отдельными точками протяженного источника. В этом предельном случае  $\Delta l/c \ll \tau$  распределение интенсивности и видность интерференционных полос определяются из формул (11.30) и (11.31) после замены в них функции  $\gamma_{12}(\Delta t)$

## 11.8. Корреляционная функция случайного волнового поля 171

на величину  $\gamma_{12}(0)$ . То есть  $I(P)$  и  $V$  в рассматриваемом случае зависят от комплексной степени когерентности полей  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$  в двух точках  $O_1, O_2$ , разнесенных на некоторое расстояние поперек распространения волны. Сами эти поля (11.26) при фиксированном источнике зависят от расположения отверстий  $O_1, O_2$  относительно источника. Если одно из них (например,  $O_1$ ) закреплено, то поле  $E_2(t)$  в другом отверстии будет зависеть от расстояния между отверстиями и, следовательно, интересующая нас величина  $\gamma_{12}(0)$  будет функцией от параметра  $d$ . Как видно из определения (11.29) функции  $\gamma_{12}(\Delta t)$ , если расстояние  $d$  стремится к нулю, то  $\gamma_{12}(0)$  стремится к единице, т. к. тогда случайные функции  $\hat{u}_1(t)$ ,  $\hat{u}_2(t)$  становятся тождественными. Когда же при некотором минимальном расстоянии  $d = d_*$   $|\gamma_{12}(0)|$  спадает до значения  $\gamma_{12}(0) = 1/2$ , то это  $d_*$  есть та величина, которая раньше была названа поперечным размером когерентности  $l_{\perp}$  рассматриваемого волнового поля. Для конкретного протяженного источника в виде равномерно светящегося прямоугольника из сравнения формул (11.24) и (11.31) имеем

$$\gamma_{12}(0) = \text{sinc}\left(\frac{\pi d a_s}{\lambda L_s}\right).$$

Следовательно, искомое значение  $d_*$ , определяемое из условия  $\gamma_{12}(0) = 1/2$ , близко к величине (11.20).

*Пример.* Вычислить автокорреляционную функцию и комплексную степень когерентности для случайного поля

$$E(t) = E_0 e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega_0 t}, \quad (*)$$

задаваемого в виде последовательности цугов волн постоянной амплитуды  $E_0$  и длительности  $T$ . Случайный характер поля обусловлен функцией  $\varphi(t)$  — постоянной в пределах цуга, с равной вероятностью принимающей любое случайное значение из промежутка  $(-\pi, \pi)$ .

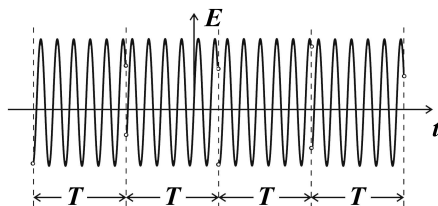


Рис. 11.13

Одна из возможных реализаций вещественной части функции  $E(t)$  представлена на рис. 11.13. Здесь переход от одного цуга к очередному происходит в моменты времени  $kT$ , т. е.  $\varphi(t) = \varphi_k$  на интервале  $kT < t < (k+1)T$ . Тогда искомую автокорреляционную функцию  $\Gamma^{(0)}(\Delta t) = \langle E(t)E^*(t+\Delta t) \rangle$  можно найти как результат усреднения за время  $\tau_0 = NT$ , содержащее  $N \gg 1$  целых цугов волн, в виде

$$\begin{aligned}\Gamma^{(0)}(\Delta t) &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} E(t)E^*(t+\Delta t)dt = E_0^2 e^{i\omega_0\Delta t} \frac{1}{NT} \int_0^{NT} e^{i\varphi(t)} e^{-i\varphi(t+\Delta t)} dt = \\ &= E_0^2 e^{i\omega_0\Delta t} \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{i\varphi(t)} e^{-i\varphi(t+\Delta t)} dt.\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла под знаком суммы заметим, что на отрезке интегрирования  $kT < t < (k+1)T$  функция  $\varphi(t)$  имеет постоянное значение  $\varphi_k$ , а  $\varphi(t+\Delta t)$  представляет ступенчатую функцию. Для положительных  $\Delta t < T$  на части отрезка  $kT < t < (k+1)T - \Delta t$  функция  $\varphi(t+\Delta t)$  сохраняет значение  $\varphi_k$ , а на оставшемся отрезке  $(k+1)T - \Delta t < t < (k+1)T$  принимает значение  $\varphi_{k+1}$ , не зависящее от  $\varphi_k$ . Тогда интеграл по рассматриваемому  $k$ -му цугу принимает значение  $(T - \Delta t) + \Delta t \exp[i(\varphi_k - \varphi_{k+1})]$ , а сумма по всем  $N$  цугам дает

$$N(T - \Delta t) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \exp[i(\varphi_k - \varphi_{k+1})].$$

После деления на  $NT$  и устремления  $N$  к бесконечности это выражение сводится к  $(1 - \Delta t/T)$ , поскольку из-за случайного характера показателя экспонент  $i(\varphi_k - \varphi_{k+1})$  добавочный член исчезает. Таким образом, для значений аргумента в пределах  $0 < \Delta t < T$  имеем

$$\Gamma^{(0)}(\Delta t) = E_0^2 e^{i\omega_0\Delta t} (1 - (\Delta t/T)), \quad \gamma^{(0)}(\Delta t) = e^{i\omega_0\Delta t} (1 - (\Delta t/T)),$$

а при  $\Delta t > T$  из аналогичных рассуждений легко получается

$$\Gamma^{(0)}(\Delta t > T) = 0.$$

Полученная функция  $|\gamma^{(0)}(\Delta t)|$  представлена на рис. 11.14, откуда видно, что время когерентности рассматриваемого случайного процесса в виде последовательности цугов волн составляет половину длительности цуга.



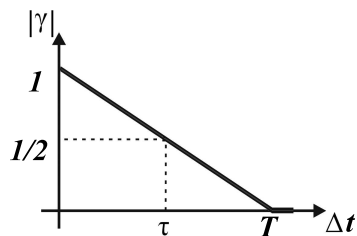


Рис. 11.14

То есть видность интерференционных полос в схеме Юнга при освещении точечным источником, излучающим подобные цуги волн, превышает значение  $V = 1/2$  в тех областях экрана, где разность хода  $\Delta l < l_{\parallel} = cT/2$ .

*Дополнение к примеру.* Для вещественной части случайного поля (\* ) рассматриваемого примера

$$\text{Re}E(t) = E_0 \cos[\varphi(t) - \omega_0 t] \quad (**)$$

найдем статистический спектр, представляющий собой, как следует из § 8.5., фурье-образ автокорреляционной функции случайного поля (\*\*), которую обозначим символом  $\tilde{\Gamma}^{(0)}(\Delta t)$ .

Для функции  $\tilde{\Gamma}^{(0)}(\Delta t)$  воспользуемся результатом

$$\tilde{\Gamma}^{(0)}(\Delta t) = (1/2)\text{Re} \Gamma^{(0)}(\Delta t),$$

получающимся из достаточно громоздких вычислений, здесь не приведенных (изящного доказательства на данный момент автор не имеет). Отсюда

$$\tilde{\Gamma}^{(0)}(\Delta t) = \begin{cases} (1/2)E_0^2 \cos(\omega_0 \Delta t) \cdot (1 - |\Delta t|/T) & \text{при } |\Delta t| \leq T, \\ 0 & \text{при } |\Delta t| \geq T, \end{cases}$$

а интересующий нас фурье-образ вычисляется просто и приводит к результату

$$\tilde{\Gamma}^{(0)}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 T}{\sqrt{2\pi}} \{ \text{sinc}^2[(\omega - \omega_0)T/2] + \text{sinc}^2[(\omega + \omega_0)T/2] \},$$

совпадающему со спектром модулированного прямоугольного сигнала длительности  $T$  с несущей частотой  $\omega_0$ . Здесь мы еще раз увидели, что

случайный процесс, продолжающийся как бы бесконечно, фактически характеризуется спектром одного волнового цуга. Раньше (в § 11.4) подобный результат был получен из другого подхода к определению спектра — через спектр отрезка реализации случайного процесса.

### 11.9. Апертура интерференции и условие применимости протяженного источника

До сих пор явление интерференции мы изучали, опираясь на схему Юнга, которая обладает одним характерным свойством. В ней каждая из двух интерферирующих волн на своем пути от источника до точки наблюдения обязательно проходит через свою строго фиксированную точку пространства (через свое отверстие). Эти две точки не зависят ни от положения источника, ни от точки наблюдения, что существенно облегчает анализ изучаемого явления. Естественно, не все полученные в этих условиях результаты пригодны для применения в других интерференционных схемах, не обладающих подобным свойством (например, к интерференции на тонких пленках). Условие (11.21), определяющее возможность использования протяженного источника через  $d$  — расстояние между отверстиями, относится к их числу. Оно явно нуждается в ином представлении, чтобы им можно было воспользоваться в других случаях. Для этого рассматриваемое условие преобразуем, выразив  $d$  через так называемую апертуру интерференции  $2\omega$  — угол, под которым два интерферирующих луча уходят от источника, как показано на рис. 11.15.

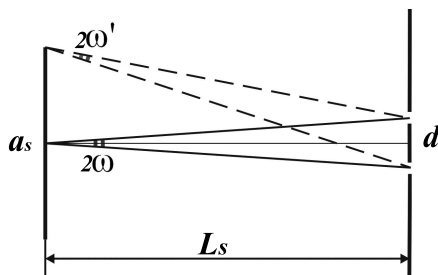


Рис. 11.15

(Здесь этот угол изображен дважды; один раз как угол  $2\omega$  между лучами, исходящими от средней точки источника, и второй ( $2\omega'$ ) — от крайней точки. При условии  $a_s \ll L_s$  эти углы практически одинаковы:  $2\omega' = 2\omega[1 - (a_s/(2L_s))^2]$ , что позволяет говорить о единой апертуре интерференции.) Таким образом, для схемы Юнга справедливо равенство  $d = 2\omega L_s$ , и, воспользовавшись им, условие (11.21) с учетом (11.20) можно переписать в виде

$$\omega a_s \leq \lambda/4. \quad (11.32)$$

Конечно, применительно к схеме Юнга подобное преобразование не приносит пользы. Но полученный здесь результат (11.32), опирающийся на понятие «апертура интерференции», и его обобщение

$$\omega a_{s\perp} \leq \lambda/4 \quad (11.33)$$

для случая, когда интерферирующие лучи от протяженного источника уходят как на рис. 11.16, оказываются применимыми к *любым другим интерференционным схемам*. Здесь мы не будем предпринимать попытку доказать справедливость этого утверждения. Ограничимся тем, что ниже, на примере интерференции на тонкой пленке, независимым способом получим условие применимости протяженного источника и убедимся, что оно тождественно условиям (11.32), (11.33).

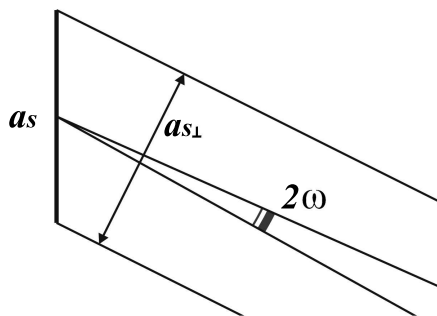


Рис. 11.16

### 11.10. Интерференция на тонкой пленке. Локализация интерференционных полос

Как было выяснено в предыдущих разделах, при использовании точечных источников схема Юнга создает резкие интерференционные картины, которые можно наблюдать при любом расположении экрана, согласующемся с требованием  $\Delta l < l_{\parallel}$ . То есть в этом случае интерференционные полосы не имеют определенной локализации и могут считаться *нелокализованными*. При этом, естественно, вопрос о локализации полос интерференции не возникает. Но для наблюдения интерференции схема Юнга предъявляет слишком жесткие требования к размеру источника, которые зачастую не могут выполняться.

Особенно часто нам приходится иметь дело с протяженным источником при явлениях интерференции, наблюдаемых в естественных условиях, когда источником света служит участок неба, т. е. рассеянный дневной свет. Наиболее часто встречающийся и весьма важный случай подобного рода имеет место при освещении тонких прозрачных пленок, когда необходимое для возникновения двух когерентных пучков расщепление световой волны происходит вследствие отражения света двумя поверхностями пленки.

В этих случаях, как показывает опыт, видность интерференционных полос максимальна только в определенных областях пространства. Такие полосы принято называть *локализованными*. Поэтому цель данного параграфа — из рассмотрения интерференции на тонких пленках получить примеры и понять причину локализации интерференционных полос. (Понятно, конечно, что при освещении тонкой пленки искусственным точечным источником полосы не локализуются.)

Когда говорится об интерференции на тонкой пленке, подразумевается, что интерферируют между собой два пучка света: отраженный от верхней поверхности пленки (т. е. поверхности со стороны падающего света) и *однократно* отраженный от нижней. (Как мы убедились в § 7.9., при малых значениях коэффициента отражения на границах раздела многократными отражениями действительно можно пренебречь и, что важно, интенсивности двух интерферирующих пучков практически одинаковы.)

Начнем рассмотрение со случая пленки с плоскопараллельными поверхностями. В этом случае пленка ничем не отличается от плоской пластинки, и поэтому мы будем пользоваться тем или другим названи-

ем, соотносясь только с ситуацией.

**1. Интерференция на плоскопараллельной пластинке. Локализация полос на бесконечности.** При интерференции света, отраженного двумя параллельными плоскостями, наиболее интересен случай, когда точка наблюдения  $P$  находится на бесконечности, т. е. наблюдение ведется либо глазом, аккомодированным на бесконечность, либо на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы. В этом случае говорят, что наблюдаются интерференционные полосы, локализованные на бесконечности. А интересен этот случай тем, что протяженность источника (даже все светящееся небо!) не создает помех для наблюдения интерференции.

Дело в том, что оба интерферирующих луча в этом случае уходят от пластинки параллельно друг другу и, следовательно, порождаются одним падающим от источника  $S$  лучом, как показано на рис. 11.17.

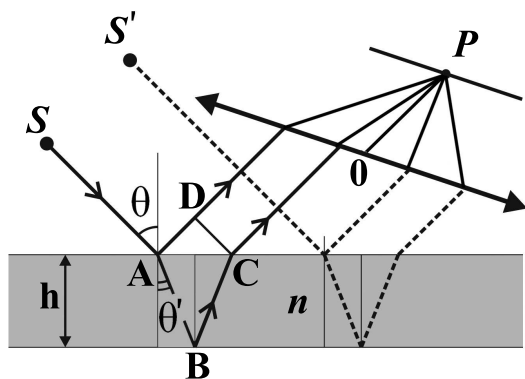


Рис. 11.17

В точку  $P$  фокальной плоскости они приходят с той же оптической разностью хода, что и на линии  $CD$ :

$$\Delta l = n(AB + BC) - AD.$$

Так как  $AB = BC = 2h / \cos \theta'$ ,  $AD = 2h \operatorname{tg} \theta' \sin \theta$  ( $h$  — толщина пластинки,  $\theta$ ,  $\theta'$  — углы падения и преломления;  $\sin \theta = n \sin \theta'$ ), то для разности хода получается результат, который можно представить в виде двух эквивалентных выражений

$$\Delta l = 2nh \cos \theta' + \frac{\lambda_0}{2} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (11.34)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Слагаемое  $\lambda_0/2$  в этих выражениях отвечает за «потерю полуволны», которая при отражении от двух сторон плоской пластинки *суммарно* имеет место как для  $TE$ , так и для  $TM$  — волн, в чем можно убедиться на основе § 7.9. От любого другого источника  $S'$ , находящегося в данной плоскости падения, луч, падающий под углом  $\theta$ , порождает другую пару отраженных лучей, показанных пунктиром, которые в точку  $P$  приходят с той же разностью хода (11.34). Следовательно, наличие второй пары не может испортить интерференционную картину, созданную первым источником  $S$ . Более того, все лучи, падающие под одним углом  $\theta$ , принадлежащие разным, но параллельным между собой плоскостям падения, после двух отражений от пластины приходят в одну и ту же точку фокальной плоскости с одинаковой разностью фаз (11.34). (Вспомним, что любой параллельный пучок света, падающий на собирающую линзу, в ее фокальной плоскости собирается в одной точке. Это точка пересечения луча, проходящего через центр линзы параллельно пучку, с фокальной плоскостью.) Понятно, что лучи с углом падения  $\theta$  из другой системы параллельных плоскостей падения (рис. 11.18(б)), имея ту же разность хода, соберутся в другой точке фокальной плоскости. Следовательно, в фокальной плоскости линзы создаются линии, представляющие собой геометрическое место точек, в которых все пары отраженных лучей накладываются с одним значением оптической разности хода (11.34), соответствующей фиксированному значению угла падения. Поэтому эти линии называются *линиями* (или *полосами*) *равного наклона*. Как мы здесь убедились, при наблюдении интерференции в режиме линий равного наклона ограничения на протяженность источника не возникают. А формально этот результат непосредственно следует из условия (11.32), поскольку апертура интерференции в рассматриваемом случае равна нулю.

Из соотношения (11.34) следует, что светлым полосам соответствуют углы падения, удовлетворяющие условиям  $2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \lambda_0/2 = m\lambda_0$ ,  $m$  — порядок интерференции. В простейшем случае, когда ось линзы перпендикулярна плоскости пластинки, интерференционные полосы представляют собой концентрические кольца с центром в фокусе.

В качестве более сложного примера, позволяющего проиллюстрировать приведенные выше общие рассуждения, рассмотрим случай, когда интерференционные полосы наблюдаются в плоскости, перпендикулярной пластинке.

Итак, ось симметрии линзы параллельна поверхности пластины. Вве-

дем декартову систему координат с началом в центре линзы (рис. 11.18). Тогда линия равного наклона, соответствующая углу падения  $\theta_0$ , состоит из точек пересечения лучей, исходящих из начала координат и задаваемых сферическими углами  $\theta_0, \varphi$ , с фокальной плоскостью  $x = f$ . (Для объяснения этого утверждения приведен рис. 11.18,б, представляющий собой проекцию рассматриваемой системы на плоскость  $(x, y)$ . Здесь указаны две системы плоскостей падения со стрелками, символизирующими проекции лучей, идущих к линзе. Лучи в плоскости  $(x, z)$  изображены на рис. 11.18,а, а лучи, проходящие в плоскости  $\varphi = const$ , читателю предлагается мысленно достроить.)

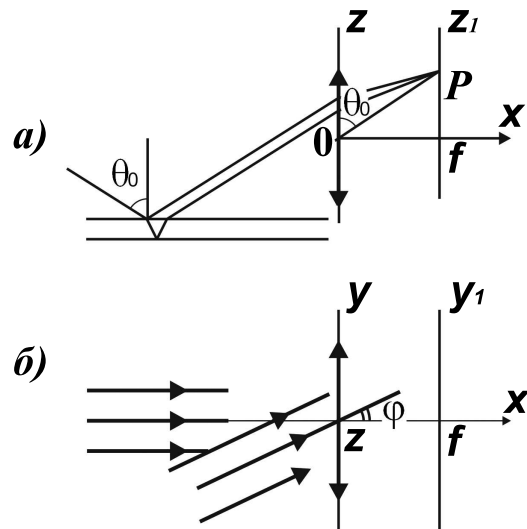


Рис. 11.18

Названный луч имеет декартовы координаты  $x = r \sin \theta_0 \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta_0 \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta_0$ , где  $r$  — параметр. Пересечение луча с фокальной плоскостью  $x = f$ , т. е. соотношение  $r \sin \theta_0 \cos \varphi = f$ , определяет значение параметра точки пересечения

$$r_* = \frac{f}{\sin \theta_0 \cos \varphi}.$$

Следовательно, искомая кривая равного наклона в параметрическом

виде определяется уравнениями

$$z_1 = r_* \cos \theta_0 = f \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\cos \varphi}, \quad y_1 = r_* \sin \theta_0 \sin \varphi = f \operatorname{tg} \varphi$$

(для координат в фокальной плоскости использованы  $z_1$ ,  $y_1$ ), что после исключения параметра  $\varphi$  легко приводится к уравнению гиперболы

$$\frac{z_1^2}{f^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0} - \frac{y_1^2}{f^2} = 1.$$

При  $y = 0$  вершина гиперболы имеет координату  $z_1^{(0)} = f \operatorname{ctg} \theta_0$ , просматривающуюся на рис. 11.18,а.

Обратимся к ограничению на толщину пленки, допускающему наблюдение интерференционных полос от белого света. Здесь, как уже упоминалось в конце § 11.6, разброс длин волн  $\Delta\lambda$  почти совпадает со средней длиной волны  $\bar{\lambda}$  видимого участка. При этом максимальный порядок интерференции  $m_{\max} \sim 1$ , и интерференционные полосы, казалось бы, наблюдаться не должны. Действительно, приемник излучения, обладающий примерно одинаковой чувствительностью в различных участках спектра, например, термоэлемент, покажет при перемещении в поле зрения поперек полос почти равномерное распределение интенсивности. Но глаз представляет собой селективный приемник с сильно изменяющейся чувствительностью в зависимости от длины волны, что дает некоторым длинам волн преимущество перед другими. Визуальное наблюдение полос в белом свете облегчается и благодаря способности нашего зрения различать цвет, а не только интенсивность света. Поэтому в белом свете глаз различает около десятка окрашенных интерференционных полос. С учетом этого обстоятельства можно оценить максимальную толщину пленки, при которой возможно визуальное наблюдение интерференции в белом свете. Принимая  $m_{\max} \approx 10$ , для максимально допустимой разности хода получаем  $\sim \bar{\lambda}$  (где  $\bar{\lambda} \approx 0,5$  мкм). При этом максимальная толщина примерно вдвое меньше:  $h_{\max} \approx 5 \bar{\lambda} = 2$  мкм.

**2. Интерференция на плоскопараллельной пластинке. Опыт Поля.** Теперь обратимся к исследованию интерференционных полос, локализованных на экране, установленном на конечном расстоянии от пластинки. Схема интерферирующих лучей для этого случая (без наблюдения относительных масштабов) изображена на рис. 11.19. Здесь интерференционные полосы представляют собой концентрические коль-



па с центром на перпендикуляре к пластинке, проходящем через источник  $S$ .

Из опыта известно, что допустимые размеры источника при этом таковы, что позволяют использовать ртутную лампу непосредственно (т. е. без вспомогательного экрана с малым отверстием) для демонстрационного опыта и создать яркую интерференционную картину с помощью листочка слюды толщины  $0,03 - 0,05$  мм прямо на потолке аудитории.

Приступим к оценкам. В качестве первого шага определим зависимость  $\delta\theta(\theta_0)$ , где  $\delta\theta$  — угол, показанный на рис. 11.19, являющийся фактически апертурой интерференции,  $\theta_0$  — угол падения луча, после отражения от верхней поверхности попадающего в точку наблюдения  $P$  на экране.

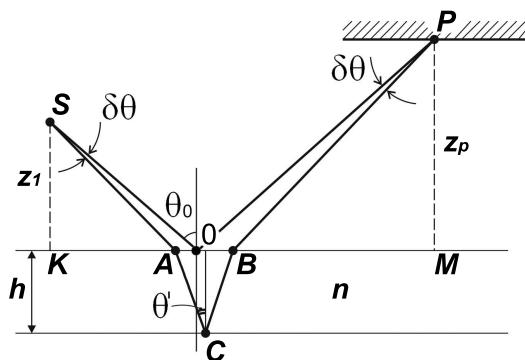


Рис. 11.19

Для этого обратимся к геометрическому соотношению

$$(z_1 + z_p) \operatorname{tg}(\theta_0 - \delta\theta) + 2h \operatorname{tg} \theta' = (z_1 + z_p) \operatorname{tg} \theta_0, \quad (11.35)$$

левая часть которого есть отрезок  $KM$ , представленный в виде суммы отрезков  $KA$ ,  $AB$ ,  $BM$ , а правая часть есть сумма  $KO + OM$  (все обозначения на рис. 11.19). Из равенства  $\sin(\theta_0 - \delta\theta) = n \sin \theta'$  для  $\operatorname{tg} \theta'$  имеем выражение

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin(\theta_0 - \delta\theta)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_0 - \delta\theta)}},$$

после подстановки которого в соотношение (11.35) следует

$$\operatorname{tg}(\theta_0 - \delta\theta) - \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2h}{z_1 + z_p} \frac{\sin(\theta_0 - \delta\theta)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_0 - \delta\theta)}}.$$

Отсюда для тонкой пленки, удовлетворяющей условию

$$\epsilon = \frac{2h}{z_1 + z_p} \ll 1,$$

в первом приближении по этому малому параметру и при  $\sin \theta_0 \neq 0$  получаем

$$\delta\theta = \frac{2h}{z_1 + z_p} \frac{\sin \theta_0 \cos^2 \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_0 - \delta\theta)}}. \quad (11.36)$$

Второй шаг, имеющий самостоятельное значение для определения конфигурации интерференционных колец, связан с вычислением оптической разности хода  $\Delta_p = (SA + 2nAC + BP) - (SO + OP)$  от источника  $S$  до точки наблюдения  $P$ . Нет необходимости приводить здесь детали достаточно громоздких вычислений, т. к. ответ в виде

$$\Delta_p(\theta_0) = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \{1 + O(\epsilon)\}, \quad (11.37)$$

где нулевое приближение совпадает с результатом (11.34), почти очевидно. Заметим для последующего, что данная формула справедлива и в случае  $z_p = 0$ , когда точка  $P$  находится на поверхности пластинки.

И, наконец, последний шаг — оценка критического размера протяженного источника, допускаемого данным методом наблюдения интерференционных полос. Логика рассуждений здесь та же, что и в § 11.7. при решении соответствующей задачи для схемы Юнга. Необходимо найти положение другого источника  $S_1$  (рис. 11.20), от которого интерферирующие лучи в точку наблюдения  $P$  приходят с разностью хода  $\Delta_p(\theta_1)$ , отличающейся от  $\Delta_p(\theta_0)$  на  $\lambda/2$ .

Иными словами необходимо, чтобы разность разностей хода достигала значения  $\lambda/2$ . Тогда расстояние между источниками  $S_1$  и  $S$  будет искомым критическим размером  $a_*$ .

Таким образом, считая  $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta_0$  ( $\Delta\theta_0$  не спутать с  $\delta\theta$ ) и  $\Delta_p(\theta_1) = \Delta_p(\theta_0 + \Delta\theta_0) = \Delta_p(\theta_0) + (d\Delta_p/d\theta_0)\Delta\theta_0$ , для определения допустимого отклонения угла падения имеем условие

$$\left| \frac{d\Delta_p}{d\theta_0} \Delta\theta_0 \right| = \frac{\lambda}{2},$$

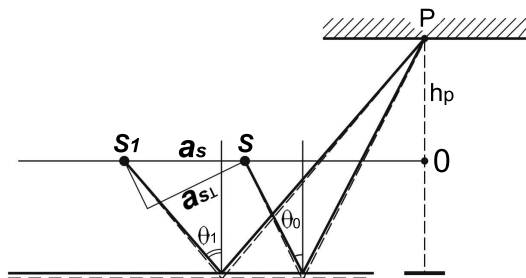


Рис. 11.20

что с использованием результата (11.37) дает

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{4h} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0 \cos \theta_0}$$

(окрестность точки  $\theta_0 = 0$  интереса не представляет и специально не исследуется). Положения точек  $S$ ,  $S_1$  задаются отрезками  $OS = (z_1 + z_p) \operatorname{tg} \theta_0$ ,  $OS_1 = (z_1 + z_p) \operatorname{tg}(\theta_0 + \Delta\theta_0)$  (см. рис. 11.20), а допустимое расстояние между ними  $a_s \leq (z_1 + z_p)[\operatorname{tg}(\theta_0 + \Delta\theta_0) - \operatorname{tg} \theta_0]$  с учетом найденного  $\Delta\theta_0$  будет

$$a_s \leq (z_1 + z_p) \frac{\lambda}{4h} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0 \cos^3 \theta_0} = a_*. \quad (11.38)$$

Отсюда видно, что чем выше «потолок», тем больше допустимый размер источника. При  $z_p \rightarrow \infty$  имеем  $a_* \rightarrow \infty$ , подтверждая прежний вывод о локализованных на бесконечности интерференционных полосах.

С введением понятия апертура интерференции (в данном случае это угол  $\delta\theta$  (11.36)) условие (11.38) можно переписать в виде

$$a_s \cos \theta_0 \delta\theta \leq \lambda/2,$$

в точности совпадающем с условием (11.33).

**3. Интерференционные полосы, локализованные на поверхности пленки.** Для тонкой пленки, поверхности которой не обязаны быть параллельными и вообще плоскими, можно наблюдать интерференционные полосы, локализованные на отражающей поверхности. Оказывается, что в этом случае значительная видность интерференционной картины имеет место лишь в тонком слое, практически совпадающем с

поверхностью пленки, несмотря на то, что отраженные световые пучки перекрываются в значительном объеме пространства, примыкающем к пленке. Именно эти полосы, локализованные на поверхности, составляют явление, известное под названием *цветов тонких пленок*, легко наблюдаемых на мыльных пленках (мыльных пузырях), на тончайших пленках бензина или машинного масла, плавающих на поверхности воды, и во многих других аналогичных случаях.

Для анализа явления вернемся к п. 2, где мы проследили за парой лучей, исходящих из точечного источника  $S$ , которые после отражения от двух сторон тонкой плоскопараллельной пластинки пришли в некоторую точку  $P$  с оптической разностью хода (11.37), которую в достаточном для нас приближении можно принять равной

$$\Delta_p = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = 2hn \cos \theta'.$$

Более того, эта формула пригодна и в том случае, когда плоские поверхности пленки непараллельны между собой, если угол между ними достаточно мал. При этом под  $h$  здесь следует понимать толщину пленки в том месте, где падающий под углом  $\theta$  луч встречается с поверхностью.

В общем случае для данной точки  $P$  обе величины  $h$  и  $\theta$  зависят от положения  $S$ , и даже при небольшом увеличении размеров источника область значений  $\Delta_p$  становится столь большой, что полосы исчезают. Тем не менее, существует специальный случай, когда  $P$  находится в пленке, а наблюдение ведется с микроскопом, сфокусированным на пленку, или сам глаз аккомодируется на нее. Тогда  $h$  практически одинаково для всех пар лучей от протяженного источника, приходящих в точку  $P'$ , сопряженную с  $P$  (рис. 11.21). Так как оптические длины всех лучей между сопряженными точками одинаковы, то различие величин  $\Delta_p$  в точке  $P'$  вызывается главным образом различием значений  $\cos \theta'$ . Если интервал изменений  $\cos \theta'$  достаточно мал, то интервал величин  $\Delta_p$  в точке  $P'$  много меньше  $\lambda$ , даже с источником значительных размеров, и полосы отчетливо видны. Очевидно, что они локализованы в пленке. Практически условие малости интервала изменений  $\cos \theta'$  можно выполнить при наблюдении в направлении, близком к нормальному, или при ограничении входного зрачка, хотя зрачок невооруженного глаза и сам по себе может быть достаточно мал. С учетом оговоренной выше (11.34) потери полуволны находим, что максимумы интенсивности в  $P$  находятся при

$$2hn \overline{\cos \theta'} \pm \lambda/2 = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.39)$$

где  $\overline{\cos \theta'}$  — среднее значение  $\cos \theta'$  для точек источника, от которых свет доходит в  $P'$ . Величина  $nh$ , присутствующая в этих соотношениях, представляет собой оптическую толщину пленки в  $P$ , и если наше приближение остается в силе, интерференция в  $P$  не зависит от толщины пленки в других местах.

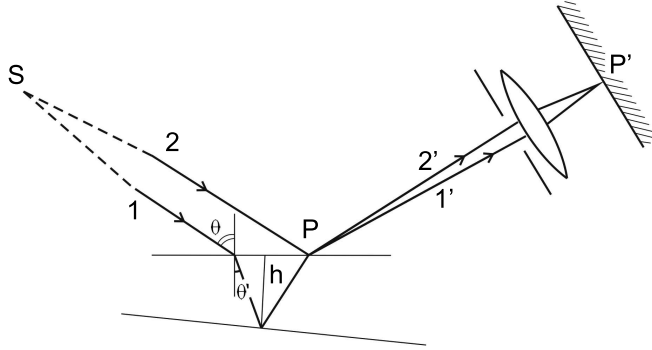


Рис. 11.21

Отсюда следует, что соотношение (11.39) остается справедливым даже при неплоских поверхностях пленки, при условии что угол между ними остается малым. Тогда, если  $\overline{\cos \theta'}$  достаточно постоянен, интерференционные полосы соответствуют совокупности мест пленки, где оптические толщины одинаковы. По этой причине такие полосы называют *полосами равной толщины*, причем, как следует из соотношения (11.39), каждой толщине соответствует свой «цвет», если интерференция наблюдается в белом свете.

**4. Кольца Ньютона.** В качестве примера полос равной толщины рассмотрим случай интерференции в тонком воздушном слое, известный под именем *колец Ньютона*. Эта картина наблюдается, когда выпуклая поверхность линзы малой кривизны соприкасается в некоторой точке с плоской поверхностью стеклянной пластинки, так что остающаяся между ними воздушная прослойка постепенно утолщается от точки соприкосновения к краям (рис. 11.22). Если на систему приблизительно по нормали к поверхности пластинки падает пучок квазимонохроматического света, то световые волны, *отраженные* от верхней и нижней границ воздушной прослойки, будут интерферировать между собой. При этом получается следующая картина: в точке соприкосновения наблюдается черное пятно, окруженное рядом концентрических светлых

и черных полос убывающей ширины.

Пусть  $R$  — радиус кривизны поверхности линзы. Тогда толщина воздушного зазора на расстоянии  $r$  от оси симметрии

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right) \approx \frac{r^2}{2R}.$$

При нормальном падении оптическая разность хода двух отраженных волн будет

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

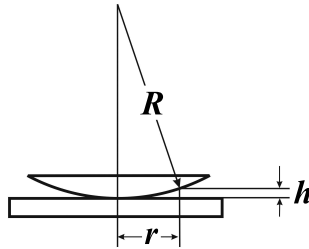


Рис. 11.22

Для квазимонохроматической (одноцветной) волны радиусы темных колец определяются условием

$$\Delta = m\lambda + (\lambda/2).$$

Приравнявая два последних выражения, для радиусов темных колец получаем

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad m = 0, 1, 2 \dots,$$

где  $m = 0$  соответствует центральному черному пятну.

Если падающий цвет — немонахроматический, то разным  $\lambda$  соответствуют разные  $r_m$ , т. е. вместо черных и светлых полос мы получаем систему цветных колец. Последовательность цветов этих колец вполне определена и известна как *цвета Ньютона*, но обсуждение этого вопроса выходит за пределы данного курса. Заметим только, что последовательность цветов Ньютона совершенно не похожа на последовательности «радужных цветов».

## Глава 12

# ДИФРАКЦИЯ

### 12.1. Введение

В самом грубом приближении явление дифракции можно охарактеризовать как *огибание волной препятствия*, имеющее место в волнах любой физической природы. Явление легко наблюдается, когда размеры препятствия соизмеримы с длиной волны. Поэтому, к примеру, мы имеем возможность слышать звуки, идущие от источника, находящегося за углом. А в случае световых волн для наблюдения дифракции требуются специфические условия, обусловленные чрезмерной малостью длин волн по сравнению с привычными размерами.

Заметим, что *в принципиальном плане* любая задача дифракции электромагнитной волны заключается в следующем. На пути распространения заданной волны, например, плоской монохроматической волны, имеется препятствие в виде некоторого тела или в виде экрана с открытой частью, которую мы всегда будем называть отверстием. Требуется найти электромагнитную волну, рассеянную препятствием.

В *точной формулировке* подобная задача относится к так называемой *физической теории дифракции* и сводится к построению решения уравнений Максвелла во всем пространстве, удовлетворяющего граничным условиям на поверхности препятствия и условиям на бесконечности. Понятно, что под действием поля падающей волны в материале препятствия возбуждаются токи и заряды, являющиеся источником рассеянных волн. В математической постановке их влияние учитыва-

ются материальными уравнениями для области препятствия и граничными условиями, которые, таким образом, зависят от материала препятствия. В такой постановке задачи дифракции чрезвычайно сложны и относятся, скорее, к области математики и в нашем курсе вовсе не рассматриваются<sup>1</sup>.

Для дифракции световых волн используется существенно более простая приближенная теория, разработанная усилиями выдающихся ученых от Гюйгенса и Френеля до Кирхгофа, Гельмгольца и Зоммерфельда. Относительная простота этой теории (обычно ее называют теорией Кирхгофа–Гельмгольца) основана на нескольких упрощающих моментах. Во-первых, это скалярная теория, в которой вместо векторных полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  фигурирует некоторая скалярная функция, удовлетворяющая волновому уравнению. Для случая монохроматических волн это будет комплексная функция координат пространства (обозначим ее для дальнейшего  $\hat{E}(x, y, z)$ ), удовлетворяющая уравнению Гельмгольца  $\Delta \hat{E} + (\omega^2/c^2)\hat{E} = 0$ . (Заметим, что, несмотря на «подсказку» со стороны такого обозначения, функцию  $\hat{E}$  нельзя рассматривать как амплитуду какой-либо определенной компоненты электрического поля в волне. Это просто «амплитуда поля в дифрагированной волне», причем квадрат модуля  $|\hat{E}(x, y, z)|^2$  в каждой точке принимается за интенсивность волны.)

Второе упрощающее обстоятельство связано с возможностью рационального выбора области определения искомой функции  $\hat{E}(x, y, z)$ . Как уже отмечалось выше, в физической теории дифракции областью определения искомых полей является все пространство вместе с находящимися в нем рассеивающими телами с их границами раздела. При тех условиях, для которых применима теория Кирхгофа–Гельмгольца, когда размеры препятствия намного больше длины волны и распространение волны характеризуется слабым отклонением от законов геометрической оптики, главный интерес представляет дифрагированная волна в области за препятствием. Область за препятствием в виде свободного полупространства  $z > 0$  (как схематически показано на рис. 12.1) принимается в рассматриваемой теории за область определения функции  $\hat{E}(x, y, z)$ . Найденная Кирхгофом возможность сформулировать приближенные граничные условия для функции  $\hat{E}(x, y, z)$  на границе  $z = 0$  этой области позволяет замкнуть математическую постановку зада-

<sup>1</sup>Самые известные точные решения задач физической теории дифракции — задача Зоммерфельда дифракции на полуплоскости и задача Ми дифракции на металлическом шаре, имеются в фундаментальном труде: Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.



чи и построить ее решение, завершая тем самым построение теории Кирхгофа–Гельмгольца. Несмотря на принятые упрощения, выводы теории хорошо согласуются с результатами оптических экспериментов, и поэтому данная теория является основным средством исследования дифракции в области световых волн.

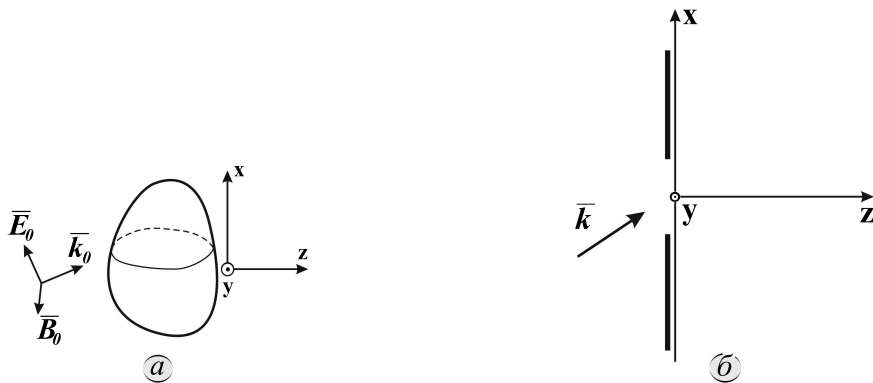


Рис. 12.1

## 12.2. Математическая постановка задачи дифракции и приближенные граничные условия Кирхгофа

Таким образом, задача дифракции в теории Кирхгофа–Гельмгольца сводится к определению в полупространстве  $z > 0$  некоторой функции  $\hat{E}(x, y, z)$ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\Delta \hat{E} + (\omega^2/c^2) \hat{E} = 0, \quad (12.1)$$

граничному условию

$$\hat{E}|_{z=0} = \tilde{E}(x, y) \quad (12.2)$$

и дополнительному так называемому

$$\text{условию излучения}, \quad (12.3)$$

сводящемуся к требованию, чтобы в состав решения входили волны только *уходящие* от плоскости  $z = 0$  на бесконечность вправо, но не было волн, *приходящих* из бесконечности влево.

Граничное условие (12.2), формулируемое для границы  $z = 0$ , непосредственно примыкающей к препятствию в виде объемного тела или поглощающего экрана с отверстием (рис. 12.1), составляет нетривиальный момент рассматриваемой теории. Согласно Кирхгофу в качестве граничных значений искомой функции на этой границе принимаются значения, получаемые с использованием законов геометрической оптики. То есть граничная функция (12.2) задается в виде ступенчатой функции

$$\tilde{E}(x, y) = \begin{cases} \hat{E}_0(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Sigma, \\ 0 & \text{в области геометрической тени,} \end{cases} \quad (12.4)$$

где  $\Sigma$  обозначает отверстие (открытую часть плоскости  $z = 0$ ), а  $\hat{E}_0(x, y)$  — амплитуда падающей волны в точках отверстия, взятая без учета препятствия. Функция (12.4) соответствует случаю непрозрачного препятствия, за которым существует область тени. Часто приходится рассматривать препятствия из прозрачных сред (стекло). Граничная функция за таким препятствием только фазой отличается от амплитуды падающей волны, причем дополнительный набег фазы  $\psi(x, y)$  рассчитывается в приближении геометрической оптики. Таким образом, граничная функция  $\tilde{E}(x, y)$  в более общем случае может состоять из следующих ступенек:

$$\begin{aligned} \hat{E}_0(x, y) & \text{ — в открытой части плоскости } z = 0, \\ \hat{E}_0(x, y)e^{i\psi(x, y)} & \text{ — в области за прозрачным препятствием,} \\ 0 & \text{ — в области геометрической тени.} \end{aligned}$$

*Пример 1.* Определить граничную функцию для случая дифракции на тонкой плосковыпуклой линзе, совмещенной с отверстием радиуса  $r_0$  в непрозрачном экране, как показано на рис. 12.2. Параметры линзы:  $n$  — показатель преломления,  $R_*$  — радиус кривизны поверхности, причем  $R_* \gg r_0$ . Световая волна  $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$  падает на экран по нормали.

При вычислении набег фазы смещением луча в радиальном направлении после преломления на поверхности линзы можно пренебречь. Тогда суммарная оптическая длина пути в слое толщины  $\Delta_0$  между двумя фиктивными плоскостями (рис. 12.3) равна  $n\Delta(r) + (\Delta_0 - \Delta(r)) =$

$= \Delta_0 + (n - 1)\Delta(r)$ , где  $\Delta(r)$  — толщина линзы в месте прохождения луча. Отсюда видно, что дополнительная разность хода, приобретенная в рассматриваемом слое из-за присутствия стекла, равна  $(n - 1)\Delta(r)$ .

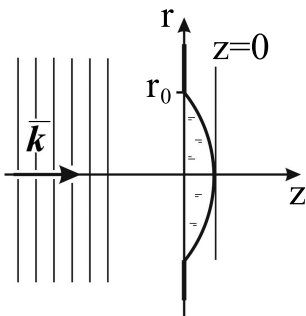


Рис. 12.2

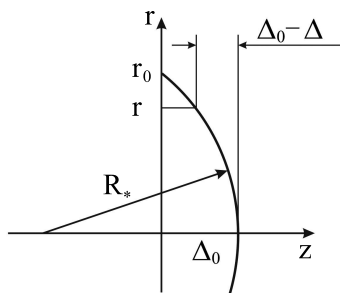


Рис. 12.3

Из рис. 12.3 имеем  $\Delta_0 - \Delta(r) = R_* - \sqrt{R_*^2 - r^2} \simeq r^2/2R_*$ . Следовательно,

$$\Delta(r) = \Delta_0 - \frac{r^2}{2R_*} \quad (\Delta_0 = \frac{r_0^2}{2R_*}),$$

и искомая граничная функция имеет вид

$$\tilde{E}(r) = \begin{cases} E_0 e^{ik(n-1)\Delta_0} e^{-ik(n-1)r^2/2R_*} & \text{при } r \leq r_0 \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (12.5)$$

Таким образом, переменная часть набега фазы, обусловленная присутствием линзы, пропорциональна  $r^2$ . Именно благодаря этому обстоятельству плоская волна, падающая на линзу, после нее переходит в сходящуюся сферическую волну. Ниже в § 12.5 результатом (12.5) мы воспользуемся для определения интенсивности волны в фокусе линзы.

В заключение отметим интересную особенность теории Кирхгофа-Гельмгольца. Здесь граничные условия задачи формулируются с привлечением геометрической оптики на ближних путях от препятствия до точек плоскости  $z = 0$ , а получающееся решение правильно описывает поведение волны за препятствием, отличающееся от требований геометрической оптики.

### 12.3. Решение задачи дифракции методом разложения на плоские волны

Искомую функцию представим в виде суперпозиции плоских монохроматических волн

$$\hat{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x, k_y) e^{i[k_x x + k_y y + \sqrt{\omega^2/c^2 - (k_x^2 + k_y^2)} z]} dk_x dk_y \quad (12.6)$$

с волновыми векторами, имеющими длину  $|k| = \omega/c$  и положительную  $z$ -компоненту. При этом представление (12.6) удовлетворяет уравнению (12.1) и требованию (12.3). А условие (12.2) на границе  $z = 0$  приводит к равенству

$$\tilde{E}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y,$$

откуда следует, что  $E(k_x, k_y) \doteq \tilde{E}(x, y)$ , т. е. спектральный состав  $E(k_x, k_y)$  входящих в решение (12.6) волн совпадает с фурье-образом граничной функции  $\tilde{E}(x, y)$ , задаваемой в виде (12.4).

Физическую интерпретацию полученного решения нам легче будет понять при рассмотрении дифракции Фраунгофера. А пока отметим лишь, что набор волн, составляющих решение (12.6), характеризуется определенным разбросом волновых векторов. Например, если рассматривается дифракция на экране с отверстием (рис. 12.4), имеющим характерные размеры  $a$  и  $b$  по направлениям  $x, y$  соответственно, то протяженность ступенчатой функции  $\tilde{E}(x, y)$  (12.4) определяется этими размерами. Тогда, как следует из соотношения неопределенности (8.19), разброс волновых чисел  $\Delta k_x, \Delta k_y$  характеризуется порядками величин

$$\Delta k_x \sim \pi/a, \quad \Delta k_y \sim \pi/b.$$

Параметры  $\Delta k_x, \Delta k_y$  определяют углы дифракции

$$\Delta \theta_x = \frac{\Delta k_x}{k} \sim \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta \theta_y = \frac{\Delta k_y}{k} \sim \frac{\lambda}{b}, \quad (12.7)$$

которые прошедшая через отверстие в экране волна приобретает соответственно в плоскости  $(x, z)$  и  $(y, z)$ , как схематически представлено на рис. 12.4 для плоскости  $(x, z)$ .

Высказанное утверждение, правильное по существу, трудно назвать доказательным, поскольку совсем не очевидно, что результат наложения безгранично протяженных плоских монохроматических волн с волновыми векторами, имеющими определенный разброс по направлениям, представляет собой волновое поле, занимающее такой ограниченный объем пространства в узком телесном угле с характерными размерами  $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y$ .

В дальнейшем, при изучении дифракции в приближении Фраунгофера, мы получим возможность прочувствовать характерные свойства дифрагированной волны и увидеть, что угол дифракции действительно характеризуется оценками (12.7). А пока полезно непосредственно из интеграла (12.6) увидеть одно важное *свойство дифрагированной волны*. Заключается оно в том, что на больших расстояниях от экрана с отверстием амплитуда волны в любой точке  $P$  полупространства  $z > 0$  фактически определяется значением функции  $E(k_x, k_y)$  только в одной фиксированной точке  $k_x^{(p)} = k \sin \theta_x^{(p)}, k_y^{(p)} = k \sin \theta_y^{(p)}$ , где  $\theta_x^{(p)}, \theta_y^{(p)}$  — угловые координаты точки  $P$  (т. е.  $x_p = z_p \operatorname{tg} \theta_x^{(p)}, y_p = z_p \operatorname{tg} \theta_y^{(p)}$ ). Отсюда следует, что при углах, превышающих значения (12.7), амплитуда волны действительно пренебрежимо мала, чем подтверждается высказанное утверждение об углах дифракции.

Для доказательства названного свойства дифрагированной волны достаточно воспользоваться методом стационарной фазы для оценки интеграла (12.6), показав, что точками стационарной фазы подынтегральной функции являются приведенные выше значения  $k_x, k_y$ . Ограничимся для простоты случаем дифракции на щели, параллельной оси  $y$ , как показано на рис. 12.5.

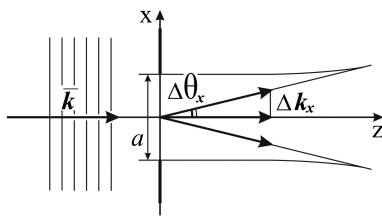


Рис. 12.4

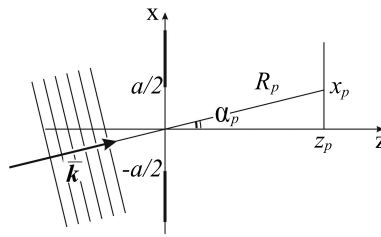


Рис. 12.5

При этом результат дифракции выражается одномерным интегралом

$$\hat{E}(x_p, y_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x) e^{i(k_x x_p + \sqrt{k^2 - k_x^2} z_p)} dk_x \quad (12.8)$$

(аналог решения (12.6)), где  $E(k_x) \doteq \tilde{E}(x)$ . (В конкретном примере нормально падающей волны  $E_0 \exp i(kz - \omega t)$  граничная функция  $\tilde{E}(x) = E_0$  при  $|x| < a/2$ ,  $\tilde{E}(x) = 0$  при  $|x| > a/2$ , и  $E(k_x) = (E_0 a / \sqrt{2\pi}) (\sin k_x a/2) / (k_x a/2)$ . Но мы рассматриваем общий случай.)

Как уже отмечалось, из решения (12.8) вовсе не видно, что амплитуда искомого поля в точке  $P$  определяется фурье-компонентой  $E(k_x)$  при каком-то определенном значении  $k_x$ ; наоборот, представляется, что весь спектр  $E(k_x)$  вносит вклад в  $\hat{E}(x_p, z_p)$ . Для точек  $P$ , расположенных недалеко от щели, действительно, так все и происходит. Но нетрудно показать, что если  $kz_p \gg 1$ , то амплитуда поля  $\hat{E}_p$  зависит только от значения  $E(k_x)|_{k_x = k \sin \alpha_p}$ , где  $\alpha_p$  — угловая координата точки  $P$  (рис. 12.5). Для этого решение (12.8) видоизменим, выделив в экспоненте безразмерный множитель  $kz_p \gg 1$  и введя вспомогательные обозначения

$$\chi = k_x/k, \quad \varphi(\chi) = \chi \operatorname{tg} \alpha_p + \sqrt{1 - \chi^2}.$$

В результате будем иметь интеграл

$$E(\alpha_p, z_p) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x) e^{ikz_p \varphi(\chi)} d\chi,$$

только обозначениями отличающийся от (9.25). Стационарная точка  $\chi$  как решение уравнения  $\varphi'(\chi_*) = 0$  имеет значение  $\chi_* = \sin \alpha_p$ , а при  $\chi = \chi_*$ , как легко проверить,

$$\varphi(\chi_*) = \frac{1}{\cos \alpha_p}, \quad \varphi''(\chi_*) = -\frac{1}{\cos^3(\alpha_p)}.$$

Таким образом, стационарной точке соответствует значение

$$k_x^* = k\chi_* = k \sin \alpha_p,$$

а главный член асимптотического разложения интеграла определяется

формулой (9.30), и для решения (12.8) имеем

$$\begin{aligned}\hat{E}(\alpha_p, z_p) &\sim k \frac{E(k_x^*)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[i\left(\frac{kz_p}{\cos \alpha_p} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sqrt{2\pi \cos^3 \alpha_p} \frac{1}{\sqrt{kz_p}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{i\lambda R_p}} e^{ikR_p} \cos \alpha_p E(k_x) \Big|_{k_x = k \sin \alpha_p},\end{aligned}\quad (12.9)$$

где  $R_p = z_p / \cos \alpha_p$  — расстояние от начала координат до точки  $P$  (рис. 12.5).

Данный результат мы повторим при рассмотрении дифракции Фраунгофера на щели и прокомментируем влияние угла наклона на дифракционную картину.

## 12.4. Принцип Гюйгенса-Френеля. Интеграл Кирхгофа

1. Математически строго решение задачи дифракции в постановке (12.1)–(12.4) можно представить и в виде суперпозиции сферических волн, исходящих из точек открытой части плоскости  $z = 0$ . Для произвольной точки  $P(x_p, y_p, z_p)$ , расположенной в правом полупространстве (рис. 12.6), при выполнении дополнительного условия

$$z_p \gg \lambda \quad (12.10)$$

искомое решение может быть приведено к интегралу

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta \, dx dy, \quad (12.11)$$

который называется интегралом Кирхгофа и представляет собой математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля<sup>2</sup>. Здесь интегрирование ведется по плоскости  $z = 0$ , функция  $\tilde{E}(x, y)$  задана приближенными граничными условиями Кирхгофа,  $R$  — расстояние от элементарной площадки до точки наблюдения,  $\theta$  — угол между нормалью к экрану, проведенной в точке с координатами  $(x, y)$ , и прямой, соединяющей эту точку экрана с точкой наблюдения  $P(x_p, y_p, z_p)$ . (Это угол между

<sup>2</sup>Доказательство приведено в § 12.6.

прямыми, не лежащими в плоскости рис. 12.6, поэтому его изображение на этом рисунке является лишь символом.)

Таким образом, амплитуда поля в точке  $P$  складывается из сферических волн  $e^{ikR}/R$ , как бы исходящих из элементарных площадок  $dxdy$ . Но в отличие от реального источника, мощность фиктивного источника, приписываемого элементарной площадке  $dxdy$ , благодаря множителю  $\cos \theta$  зависит от положения точки наблюдения.

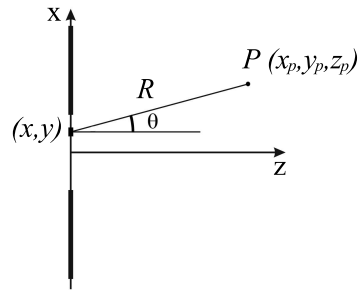


Рис. 12.6

**2.** Простейший случай применения интеграла Кирхгофа продемонстрируем на примере волны, падающей по нормали на непроницаемый экран с круглым отверстием, когда точка наблюдения располагается на оси симметрии (рис. 12.7).

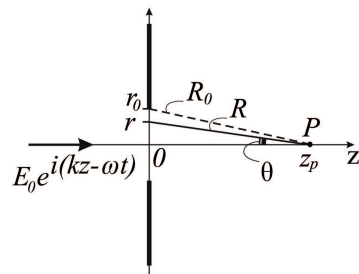


Рис. 12.7

Здесь граничная функция  $\tilde{E}$ , задаваемая в плоскости  $z = 0$  непосред-



ственно за экраном, отлична от нуля только в пределах отверстия, т. е.

$$\tilde{E} = \begin{cases} E_0 & \text{при } r \leq r_0, \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Начнем рассмотрение со случая малого отверстия

$$r_0 \ll z_p,$$

когда входящий в интеграл (12.11) множитель  $\cos \theta \simeq 1$  и искомая амплитуда

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i} E_0 \int_0^{r_0} \frac{e^{ikR}}{R} 2\pi r dr.$$

Поскольку переменные  $R, r$  связаны соотношением  $R^2 = z_p^2 + r^2$ , откуда  $RdR = r dr$ , в последнем интеграле удобно перейти к новой независимой переменной  $R$  и получить

$$\hat{E}_p = \frac{k}{i} E_0 \int_{z_p}^{R_0} e^{ikR} dR,$$

где  $R_0$  — расстояние от края отверстия до точки  $P$  (рис. 12.7). Этот интеграл еще раз перепишем, введя переменную

$$x = R - z_p,$$

имеющую смысл разности хода между лучом, идущим из точки на окружности радиуса  $r$ , и лучом из центра отверстия до точки  $P$ . В результате амплитуду поля в точке  $P$  приведем к характерному виду

$$\hat{E}_p = E_0 e^{ikz_p} \frac{k}{i} \int_0^{x_0} e^{ikx} dx, \quad x_0 = R_0 - z_p, \quad (12.12)$$

где  $E_0 e^{ikz_p}$  описывает поле в отсутствие экрана, а интеграл вместе с множителем  $k/i$ , следовательно, отвечает за влияние экрана с отверстием. Хотя рассматриваемый интеграл вычисляется элементарно, читателю рекомендуется убедиться, что

$$\int_0^{x_0} e^{ikx} dx = \frac{2}{k} \sin(kx_0/2) e^{ikx_0/2}$$

и, следовательно,

$$\hat{E}_p = -2iE_0 \sin(kx_0/2) e^{ik(z_p+x_0/2)}. \quad (12.13)$$

**3.** Анализ результата, как это ни покажется странным, интересно проводить не на основе окончательного выражения (12.13), а используя для этого соотношение (12.12), поскольку содержащийся в нем нераскрытый интеграл

$$s(x_0) = \int_0^{x_0} e^{ikx} dx$$

позволяет получить *наглядное представление* о характере его зависимости от разности хода  $x_0$  в виде векторной диаграммы. С этой целью интеграл изобразим как вектор в комплексной плоскости, представив его в виде предела интегральной суммы

$$\int_0^{x_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N, \quad \Sigma_N = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x e^{ikn\Delta x}, \quad \Delta x = x_0/N. \quad (12.14)$$

Каждый член суммы имеет модуль  $\Delta x$ , а аргумент каждого последующего увеличивается на одно и то же значение  $k\Delta x$ . Значит, последовательные члены интегральной суммы представляют собой стороны правильной ломанной, проведенной в комплексной плоскости  $\Sigma_N$ ; общая длина ломанной равна  $x_0$ , а вектор, соединяющий начало и конец ломанной — интегральная сумма (рис. 12.8, построенный для  $N = 8$ ). В пределе  $N \rightarrow \infty$  вместо ломанной получаем дугу окружности радиуса  $1/k$ , причем вектор, совпадающий с хордой, стягивающей дугу определенной длины  $x_0$ , теперь изображает комплексное число  $s(x_0)$  (рис. 12.9)<sup>3</sup>. При увеличении  $x_0$  конец вектора скользит по окружности, вращаясь против часовой стрелки, и может совершить не один оборот, если разность хода превышает длину окружности  $2\pi/k = \lambda$ . Таким образом, вектор, соединяющий начало координат комплексной плоскости  $s$  с точкой на окружности радиуса  $1/k$ , задаваемой длиной дуги  $x_0$ , представляет собой графическое изображение (*векторную диаграмму*) интеграла  $s(x_0)$ . Отсюда видно, что  $s(x_0)$  — периодическая комплексная функция с периодом  $\lambda$ , и она характерна тем, что при выделенных

<sup>3</sup>Как видно из рис. 12.9, дуга  $x_0$  опирается на угол  $kx_0$  (т. к. последний элемент дуги есть комплексное число  $dx e^{ikx_0}$ ); следовательно, радиус окружности действительно равен  $1/k$ .

значениях разности хода

$$x_{0m} = m\lambda/2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.15)$$

принимает экстремальные по модулю значения 0 (при четных) и  $2i/k$  (при нечетных)  $m$ .

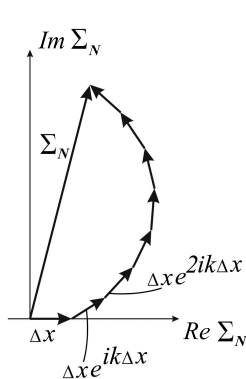


Рис. 12.8

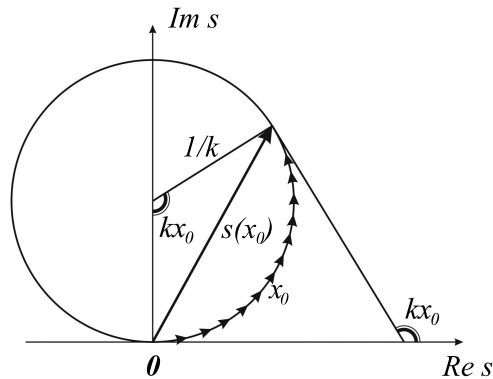


Рис. 12.9

Следовательно, при значениях (12.15) амплитуда поля  $\hat{E}_p$  и интенсивность волны  $I_p = |\hat{E}_p|^2$  в точке  $P$ , как следует из решения (12.12), принимают экстремальные значения

$$\hat{E}_{p \max} = 2E_0 e^{ikz_p}, \quad I_{p \max} = 4I_0,$$

$$E_{p \min} = 0, \quad I_{p \min} = 0,$$

естественно согласующиеся с результатом (12.13) непосредственного интегрирования.

А интенсивность  $I_p = |\hat{E}_p|^2 = 4I_0 \sin^2 kx_0/2$ , как периодическая функция  $x_0$  с периодом  $\lambda$ , представлена на рис. 12.10.

4. Параграф завершим рассмотрением случая немалых отверстий, когда предположение  $\cos \theta = 1$  несправедливо и интеграл Кирхгофа с учетом  $\cos \theta = z_p/(z_p + x)$  принимает вид

$$\hat{E}_p = E_0 e^{ikz_p} \frac{k}{i} \int_0^{x_0} \frac{z_p}{z_p + x} e^{ikx} dx. \quad (12.16)$$

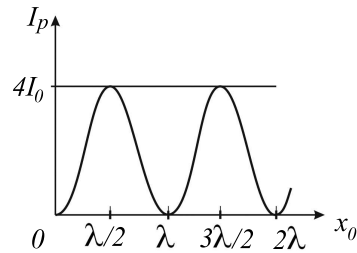


Рис. 12.10

Воспользуемся им для вычисления амплитуды в точке  $P$ , когда  $r_0 \rightarrow \infty$ , т. е. фактически при отсутствии экрана, чтобы убедиться, что интеграл Кирхгофа при этом приводит к необходимому результату  $E_0 e^{ikz_p}$ . (Напомним, что взятый без учета множителя  $\cos \theta$  интеграл (12.12) не стремится к определенному пределу при  $r_0 \rightarrow \infty$ .) Интеграл (12.16) отличается от (12.12) только множителем  $u(x) = z_p/(z_p + x)$ , очень медленно (в масштабах длины волны) спадающим по мере роста  $x$ . Поэтому интуитивно почти очевидно, что векторная диаграмма интеграла из (12.16)

$$s_1(x_0) = \int_0^{x_0} u(x) e^{ikx} dx$$

представляет собой пологую спираль с центром в точке  $i/k$ , грубо схематично представленную на рис. 12.11, а интересующее нас значение  $s_1(\infty)$  равно  $i/k$ .

Методом интегрирования по частям для рассматриваемой величины легко получается асимптотическое представление

$$s_1(\infty) = \frac{i}{k} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kz_p}\right) \right],$$

подтверждая тем самым справедливость высказанного предположения при условии  $kz_p \gg 1$ , являющимся условием (12.10) применимости интеграла Кирхгофа.

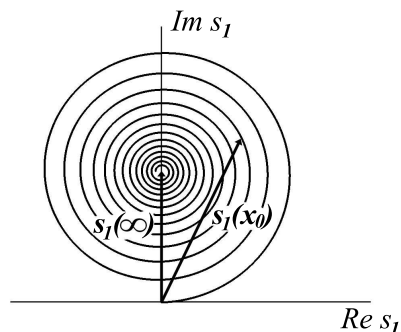


Рис. 12.11

## 12.5. Зоны Френеля. Зонная пластинка

Полученные в предыдущем параграфе результаты, связанные с выделенными значениями (12.15) разности хода  $x_0$  прокомментируем здесь, введя понятие *зоны Френеля*. Для этого заметим, что при фиксированном значении  $z_p$  разность хода  $x_0 = R_0 - z_p$  однозначно определяется радиусом отверстия  $r_0$ . Поскольку при  $z_p \gg r_0$  для величины  $x_0$  справедливо приближение

$$x_0 = r_0^2/2z_p,$$

выделенным значениям разности хода (12.15) соответствует набор характерных значений радиуса отверстия

$$r_{0m} = \sqrt{m\lambda z_p}, \quad (12.17)$$

при которых интенсивность в точке  $P$  имеет экстремальные значения. (Напоминаем, что соотношение (12.17) относится к случаю, когда экран с отверстием освещается нормально падающей плоской волной.)

Кольцевые области, заключенные между соседними окружностями радиусов  $r_{0m}$ , являются зонами Френеля, причем первая зона — это круг радиуса  $r_{01} = \sqrt{\lambda z_p}$ , вторая и последующие зоны занимают области соответственно  $r_{01} < r < r_{02}$  и  $r_{0,m-1} < r < r_{0m}$  ( $m \geq 3$ ). Заметим, что площади всех зон

$$\pi(r_{0m}^2 - r_{0,m-1}^2) = \pi\lambda z_p$$

одинаковы, а переход от радиуса  $r_{0,m-1}$  к  $r_{0m}$  связан с увеличением разности хода  $x_0$  на постоянную (не зависящую от номера  $m$ ) величину

$$R_{0m} - R_{0,m-1} = \lambda/2;$$

смысл обозначений объясняет рис. 12.12.

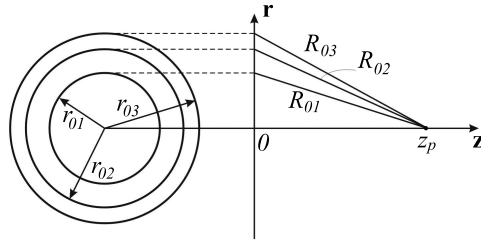


Рис. 12.12

Фактически именно последнее условие является определением зоны Френеля как области, в пределах которой разности хода достигают, но не превышают половины длины волны. А формулы типа (12.17), определяющие радиусы зон Френеля, в каждом конкретном случае получают свои. (Сказанное дополнительно иллюстрирует пример 2, приведенный в конце параграфа.)

Таким образом, если радиус отверстия равен  $r_{01}$ , при котором разность хода  $x_0$  имеет значение  $\lambda/2$  (и интеграл  $s(x_0) = \int_0^{x_0} e^{ikx} dx$  равен  $2i/k$ ), это означает, что отверстие занимает одну первую зону Френеля. При этом интенсивность в точке  $P$  максимальна и равна  $I_p = 4I_0$ . Если наряду с первой зоной открыть еще и вторую, т. е. радиус отверстия увеличить в  $\sqrt{2}$  раз и разность хода довести до значения  $\lambda$ , интенсивность в точке наблюдения упадет до нуля. При дальнейшем увеличении  $r_0$  процесс возрастания и спада интенсивности продолжится, что наглядно видно из векторной диаграммы интеграла  $s(x_0)$ , причем максимальная интенсивность будет в четыре раза превышать интенсивность падающего на экран света.

Интенсивность в точке  $P$  можно увеличить во много раз, если изготовить экран, который, кроме первой зоны открывает третью, пятую и другие нечетные зоны Френеля, как схематически показано на рис. 12.13. Можно, наоборот, открывать одни четные зоны Френеля. Такой экран называется зонной пластинкой; если он содержит  $N$  зон, из кото-

рых  $N/2$  открыты, интенсивность света в точке  $P$  будет

$$I_p = 4I_0(N/2)^2,$$

т. к. поля, приходящие из открытых зон, складываются, причем все они одинаковы и равны  $2E_0e^{ikz_p}$  (при открытых нечетных зонах) или  $-2E_0e^{ikz_p}$  (при четных зонах).

Можно достичь еще большей яркости в точке  $P$  (в фокусе), если не задерживать волны, приходящие от четных зон в точку  $P$ , а сообщить им изменение фазы на  $\pi$ . Этого добиваются с помощью так называемой *фазовой зонной пластинки*, например, в виде стеклянного диска с толщиной, являющейся ступенчатой функцией радиуса, также схематически изображенного на рис. 12.13.

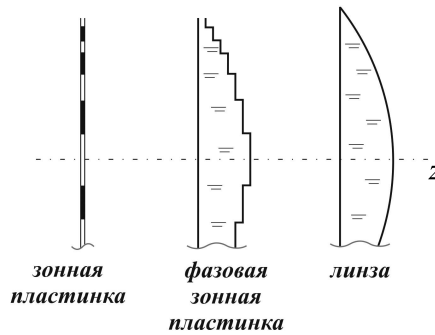


Рис. 12.13

В пределах каждой зоны толщина постоянна, а при переходе к соседней меняется на величину ступеньки  $\Delta$ , удовлетворяющую условию  $(n-1)\Delta = \lambda/2$ , создавая тем самым дополнительный оптический путь, равный половине длины волны. В этом случае интенсивность света в точке  $P$

$$I_p = 4I_0N^2$$

вчетверо больше, чем за простой зонной пластинкой.

Предельным случаем рассматриваемой фазовой пластинки можно считать собирающую линзу радиуса  $r_0 = \sqrt{N\lambda z_p}$ , содержащую  $N$  зон Френеля для точки наблюдения  $P$ . Если точка  $P$  совпадает с фокусом, волны от всех элементарных колец в плоскости за линзой приходят в фокус  $F$  с одинаковой фазой и создают максимально возможную ин-

тенсивность, равную

$$I_F = (\pi N)^2 I_0 = (\pi r_0^2 / (\lambda F))^2 I_0. \quad (12.18)$$

Для доказательства формулы (12.18) в качестве граничной функции  $\tilde{E}$  в интеграле Кирхгофа

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i} \int_0^{r_0} \tilde{E}(r) \frac{e^{ikR}}{R} 2\pi r dr$$

примем результат (12.5)

$$\tilde{E}(r) = E_0 e^{-ik(n-1)r^2/2R_*},$$

полученный для частного случая плосковыпуклой линзы (рис. 12.14) с радиусом кривизны поверхности  $R_*$  (постоянный фазовый множитель опускаем). Расстояние  $R$  в экспоненте  $e^{ikR}$  под интегралом заменим на  $z_p + r^2/2z_p$  и заметим, что при

$$z_p = \frac{R_*}{n-1}$$

(т. е. когда точка  $P$  является фокусом) суммарная фаза входящих в точку  $P$  волн действительно постоянна. При этом  $\hat{E}_p$  приобретает вид

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i} E_0 e^{ikz_p} \int_0^{r_0} \frac{2\pi r}{R} dr,$$

что после перехода к интегрированию по переменной  $R$  дает

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i} E_0 e^{ikz_p} 2\pi(R_0 - z_p).$$

Так как по условию задачи  $R_0 - z_p = N\lambda/2$ , отсюда следует требуемый результат

$$\hat{E}_F = -i\pi N E_0 e^{ikF}, \quad I_F = (\pi N)^2 I_0.$$

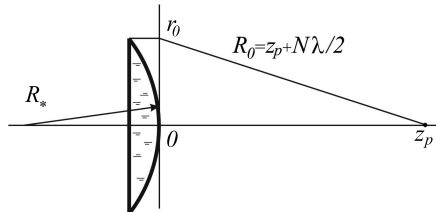


Рис. 12.14

В заключение отметим, что рассмотрение частного случая плосковыпуклой линзы не ограничивает общности полученного результата.



**Пример 2. Зоны Френеля для дифракции от точечного источника.** Геометрия задачи дана на рис. 12.15. Принято, что

$$r_0 \ll (a, b) \quad (1)$$

и справедливо приближение  $\cos \theta = 1$ .

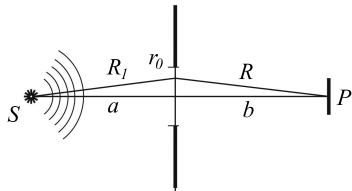


Рис. 12.15

В рассматриваемом случае граничная функция, отличная от нуля при  $0 < r < r_0$ , задается как амплитуда сферической волны

$$\tilde{E}(r) = \varphi_0 \frac{e^{ikR_1}}{R_1}, \quad \varphi_0 = \text{const},$$

где  $R_1$  — расстояние от источника до элементарного колечка в плоскости отверстия. При этом интеграл Кирхгофа для точки наблюдения  $P$  имеет вид

$$\hat{E}_P = \frac{k}{2\pi i} \varphi_0 \int_0^{r_0} \frac{e^{ik(R_1+R)}}{R_1 R} 2\pi r dr. \quad (2)$$

При условии (1) в качестве расстояний  $R_1, R$  можно принять приближения

$$R_1 = a + \frac{r^2}{2a}, \quad R = b + \frac{r^2}{2b}, \quad (3)$$

причем в знаменателе под интегралом достаточно ограничиться нулевыми приближениями. В результате получаем

$$\hat{E}_P = \frac{k}{i} \frac{\varphi_0}{ab} e^{ik(a+b)} \int_0^{r_0} e^{ik \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} r dr.$$

Как следует из равенств (3),

$$\frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = (R_1 + R) - (a + b) = x,$$

где  $x$  — суммарная разность хода лучей, проходящих через точку окружности радиуса  $r$  и через центр отверстия. Тогда

$$rdr = \frac{ab}{a+b} dx,$$

и для искомой величины получаем ответ

$$\hat{E}_p = \frac{\varphi_0}{a+b} e^{ik(a+b)} \frac{k}{i} \int_0^{x_0} e^{ikx} dx \quad (x_0 = \frac{r_0^2}{2} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})),$$

по структуре совпадающий с результатом (12.12). Следовательно, радиусы зон Френеля, определяемые требованием  $x_{0m} = m\lambda/2$ , в рассматриваемом случае выражаются формулой

$$r_{0m} = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}.$$

## 12.6. Вывод интеграла Кирхгофа

Решение задачи (12.1)—(12.3) в форме интеграла (12.11) имеет основополагающее значение в теории дифракции, поэтому данный параграф посвятим получению этого решения.

**1.** В качестве первого шага напомним интегральную теорему Грина

$$\int_V (\hat{G}\Delta\hat{E} - \hat{E}\Delta\hat{G})dv = \int_S (\hat{G}\frac{\partial\hat{E}}{\partial n} - \hat{E}\frac{\partial\hat{G}}{\partial n})ds, \quad (1)$$

записанную для некоторого объема  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к элементу поверхности. Функции  $\hat{E}, \hat{G}$  непрерывны со своими первыми и вторыми частными производными в объеме  $V$ , включая поверхность  $S$ .

**2.** Следующим шагом покажем, что, воспользовавшись соотношением (1), амплитуду волны  $\hat{E}$  в фиксированной точке  $P_0$  можно выразить через значения  $\hat{E}$  и  $\partial\hat{E}/\partial n$  на произвольной замкнутой поверхности  $S$ , окружающей точку  $P_0$  (см. ниже соотношение (5)). Для этого в качестве  $\hat{G}$  примем амплитуду сферической волны с центром в точке  $P_0$ , задаваемую соотношением

$$\hat{G} = e^{ikr}/r, \quad (2)$$

где  $r$  — расстояние от  $P_0$  до произвольной точки. Как следует из § 7.11., эта функция удовлетворяет тому же уравнению Гельмгольца

$$\Delta \hat{G} + k^2 \hat{G} = 0,$$

что и искомая амплитуда  $\hat{E}$ . Поскольку  $\hat{G}(r)$  обладает особенностью, точку  $P_0$  окружим сферой  $S_\epsilon$  бесконечно малого радиуса  $\epsilon$  и исключим из области  $V$  (рис. 12.16). К оставшемуся объему

$$V' = V - V_\epsilon,$$

ограниченному внешней границей, состоящей из двух частей  $S' = S + S_\epsilon$ , применим интегральную теорему (1). Так как обе функции  $\hat{E}$  и  $\hat{G}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца, подынтегральная функция левой части (1) при этом тождественно равна нулю и, следовательно,

$$\int_S (\hat{G} \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}) ds + \int_{S_\epsilon} (\hat{G} \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}) ds = 0. \quad (3)$$

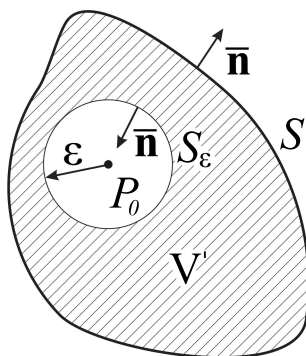


Рис. 12.16

Заметим, что производная  $\partial \hat{G} / \partial n$  в любой точке, принадлежащей границам  $S, S_\epsilon$ , определяется как

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial n} = (\text{grad } \hat{G} \cdot \mathbf{n}) = \frac{\partial \hat{G}}{\partial r} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) = (ik - \frac{1}{r}) \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}), \quad (4)$$

причем для точек границы  $S_\epsilon$

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) = -1.$$

Тогда для интеграла по поверхности  $S_\epsilon$ , входящего в равенство (3), по теореме о среднем имеем

$$\int_{S_\epsilon} (\hat{G} \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}) ds = 4\pi\epsilon^2 \left[ \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} \Big|_* + \hat{E} \Big|_* \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} (ik - \frac{1}{\epsilon}) \right],$$

где звездочкой отмечены средние значения соответствующих величин на сфере  $S_\epsilon$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  первое слагаемое из этой суммы обращается в нуль, а во втором содержится часть, стремящаяся к ненулевому значению, равному  $-4\pi\hat{E}_p$ , т. к. в силу непрерывности функции  $\hat{E}$  очевидно, что  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{E} \Big|_* = \hat{E}_p$ .

Таким образом, из соотношения (3) приходим к так называемой интегральной теореме Гельмгольца-Кирхгофа

$$\hat{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} \hat{G} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right] ds, \quad (5)$$

завершающей второй этап рассматриваемого вывода.

**3.** Применим полученную интегральную теорему (5) к задаче дифракции, представив точку  $P_0$  принадлежащей области  $z > 0$  за экраном (рис. 12.17).

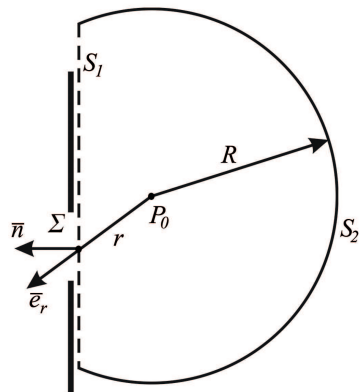


Рис. 12.17

В качестве замкнутой поверхности примем часть поверхности сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $P_0$  (поверхность  $S_2$ ), замкнув ее частью

плоскости, примыкающей к плоскости  $z = 0$  (поверхность  $S_1$ ). Следовательно,

$$\hat{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_2} \left[ \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} \hat{G} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right] ds, \quad (6)$$

где, напомним, функция  $\hat{G}$  определена соотношением (2).

Выясним условие, при котором вклад поверхности  $S_2$  в интеграл (6) стремится к нулю по мере увеличения  $R$ . Для этого заметим, что на поверхности  $S_2$

$$\hat{G} = e^{ikR}/R,$$

а производная  $\partial \hat{G}/\partial n$ , как следует из (4),

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial n} = \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \simeq ik \hat{G},$$

где последнее приближение справедливо вследствие  $R \gg \lambda$ . Рассматриваемый интеграл, таким образом, можно свести к следующему виду:

$$\int_{S_2} \left( \hat{G} \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - ik \hat{G} \hat{E} \right) ds = \frac{e^{ikR}}{R} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - ik \hat{E} \right) R^2 d\Omega,$$

где  $\Omega$  — телесный угол с вершиной в точке  $P_0$ , стягиваемый поверхностью  $S_2$ . Отсюда видно, что данная величина будет стремиться к нулю по мере стремления  $R$  к бесконечности при условии, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - ik \hat{E} \right) = 0 \quad (7)$$

равномерно во всем телесном угле. Это требование называется *условием Зоммерфельда для излучения*, а в выполнении этого условия мы убеждаемся из рассмотрения в качестве  $\hat{E}$  поля сферической волны, исходящей из точки плоскости  $S_1$  (см. *Пример 3*). При этом имеем в виду, что общее поле (12.11) состоит из набора таких волн.

Устранив интегрирование по поверхности  $S_2$ , поле  $\hat{E}$  в точке  $P_0$  теперь можем выразить через поле и его производную по нормали, взятые на бесконечной плоскости  $S_1$ , расположенной непосредственно за экраном:

$$\hat{E}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[ \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} \hat{G} - \hat{E} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right] ds. \quad (8)$$

Можно было бы думать, что эта формула дает искомое решение задачи дифракции. На самом деле выражение (8), требующее для определения  $\hat{E}(P_0)$  знания граничных значений не только искомой функции, но одновременно еще и ее нормальной производной, внутренне противоречиво и не может рассматриваться в качестве окончательного решения.

4. Следующий шаг, предложенный Зоммерфельдом, исключает необходимость одновременного наложения граничных условий на поле и его производную по нормали. Было замечено, что соотношение (8) остается справедливым и при другом выборе функции Грина  $\hat{G}$ , если только эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца и имеет ту же особенность в точке  $P_0$ , что и функция (2), а на поверхности  $S_1$  может быть произвольна. В частности, если в качестве  $\hat{G}$  принять функцию, обращающуюся в нуль на всей поверхности  $S_1$  (обозначим ее символом  $\hat{G}_1$ ), необходимость в наложении граничного условия на производную  $\partial\hat{E}/\partial n$  отпадает.

Легко заметить, что функция Грина, удовлетворяющая названному требованию, существует и может быть представлена в виде комбинации двух сферических волн. Центр первой из них находится в точке  $P_0$ , а для второй центром служит симметричная точка  $\tilde{P}_0$ , лежащая по другую сторону экрана (рис. 12.18). Здесь расстояния от соответствующих центров до произвольной точки в полупространстве  $z > 0$  обозначены символами  $r$  и  $\rho$ , так что

$$\hat{G}_1(P) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ik\rho}}{\rho}, \quad \text{причем } \hat{G}_1|_{S_1} \equiv 0.$$

Для производной  $\partial\hat{G}_1/\partial n$  в точках  $P_1$ , лежащих на границе  $S_1$  (рис. 12.19), согласно (4) имеем

$$\frac{\partial\hat{G}_1}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) - \left(ik - \frac{1}{\rho_{01}}\right) \frac{e^{ik\rho_{01}}}{\rho_{01}} (\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n}).$$

Так как для рассматриваемых точек

$$r_{01} = \rho_{01}, \quad (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) = -(\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n}),$$

из последнего выражения получаем

$$\frac{\partial\hat{G}_1}{\partial n} = 2\left(ik - \frac{1}{r_{01}}\right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}).$$

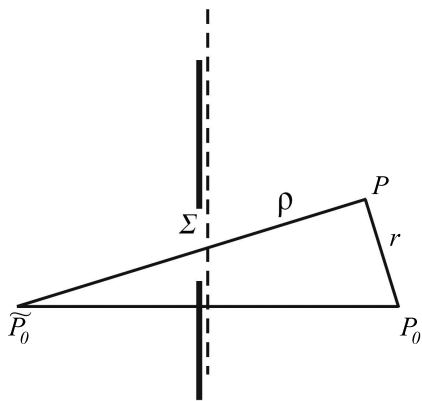


Рис. 12.18

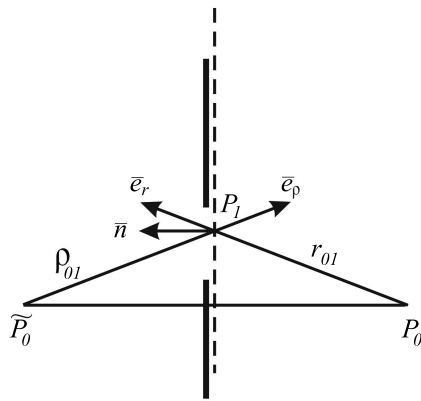


Рис. 12.19

При выполнении условия (12.10), эквивалентного  $r_{01} \gg \lambda$ , отсюда следует

$$\frac{\partial \hat{G}_1}{\partial n} = 2ik \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}),$$

что в совокупности с условием  $\hat{G}_1|_{S_1} \equiv 0$ , будучи подставленными в формулу (8), приводят к окончательному выражению для искомой величины

$$\hat{E}(P_0) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_1} \hat{E}(x, y) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (9)$$

Данный результат, полученный вследствие деятельности выдающихся ученых от Гюйгенса-Френеля до Кирхгофа-Гельмгольца и Рэля-Зоммерфельда, для краткости называют интегралом Кирхгофа. Кажущееся отличие формулы (9) от выражения (12.11), использовавшегося в § 12.4., обусловлено только обозначениями. После замены

$$\hat{E}(P_0) \rightarrow \hat{E}_p, \quad \hat{E}(x, y) \rightarrow \tilde{E}(x, y), \quad r_{01} \rightarrow R, \quad (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) \rightarrow \cos \theta$$

различия между ними исчезают.

*Пример 3.* Приняв в качестве  $\hat{E}$  поле сферической волны

$$\hat{E} = e^{ikR_1}/R_1$$

с центром в произвольной точке плоскости  $S_1$  на расстоянии  $a$  от центра сферы  $S_R$  (рис. 12.20), убедиться в справедливости условия Зоммерфельда (12.6).

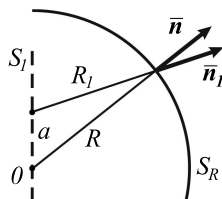


Рис. 12.20

*Решение.* Так как при  $R_1 \gg \lambda$   $d\hat{E}/dR_1 = ik e^{ikR_1}/R_1$  (см. (12.4)), для входящей в (12.6) производной по нормали к сфере  $S_R$  имеем:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial n} = \frac{d}{dR_1} \left( \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \right) (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n})$$

(единичные вектора  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}$  указаны на рис. 12.20). Тогда

$$R \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - ik \hat{E} \right) = ik \frac{e^{ikR_1}}{R_1} R (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} - 1).$$

Заменяв последний множитель тождественным выражением  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n})$  и мысленно дополнив рис. 12.20 изображением вектора  $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}$ , нетрудно увидеть оценки

$$|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}| \leq \frac{a}{R}, \quad |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n})| \leq |\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}| \frac{a}{2R}.$$

Отсюда  $|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n})| \leq a^2/2R^2$  и, следовательно,

$$\left| R \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial n} - ik \hat{E} \right) \right| \leq k \frac{R}{R_1} \frac{a^2}{2R^2} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty,$$

что требовалось получить.

Таким образом, амплитуда волны в произвольной точке за экраном, удовлетворяющей условию (12.10), действительно получается как результат наложения сферических волн с центрами, находящимися в «отверстии».



## 12.7. Интеграл Кирхгофа для цилиндрических волн

Имеется в виду ситуация, когда граничная функция  $\tilde{E}$  не зависит от одной из двух декартовых координат в плоскости экрана, например, от  $y$ . (Следовательно, падающая на экран волна обладает подобным свойством.) Кроме того, «отверстие» в экране представляет собой щель (или систему щелей), параллельную оси  $y$ . Тогда искомая амплитуда волны в правом полупространстве также не зависит от координаты  $y_p$  точки наблюдения. Поэтому, считая точку  $P$  лежащей в плоскости  $z = z_p$ , интеграл (12.11) представим в виде

$$\hat{E}(x_p, z_p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma} \tilde{E}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta dy dx. \quad (10)$$

Для вычисления внутреннего интеграла по переменной  $y$  воспользуемся методом стационарной фазы. Для этого обратим внимание, что при заданном  $x$  расстояние  $R$  от фиксированной точки  $P$  до элементарной площадки  $dx dy$  равно  $R_{\perp} \sqrt{1 + y^2/R_{\perp}^2}$ , где  $R_{\perp}$  является функцией только  $x$  (рис. 12.21). Угол  $\theta$  зависит как от  $x$ , так и от переменной интегрирования  $y$ , причем при  $y = 0$  принимает значение  $\theta_{\perp}$ , показанное на рисунке.

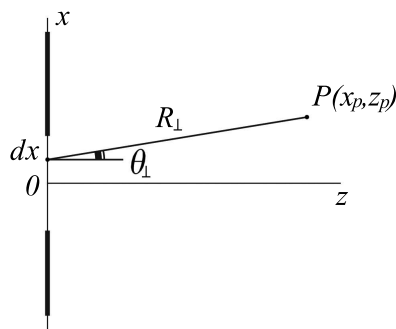


Рис. 12.21

Введя временное обозначение

$$\Omega(y) = \sqrt{1 + y^2/R_{\perp}^2},$$

рассматриваемый интеграл запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} \cos \theta e^{ikR_{\perp}\Omega(y)} dy.$$

Отсюда видно, что при  $kR_{\perp} \gg 1$  его значение определяется выражением (9.30), где стационарной точкой является  $y = 0$  (т. е.  $\Omega'(0) = 0$ ), причем  $\Omega''(0) = 1/R_{\perp}^2$ . Так как  $R|_{y=0} = R_{\perp}$ ,  $\cos \theta|_{y=0} = \cos \theta_{\perp}$ , внутренний интеграл из выражения (10) равен

$$\frac{1}{R_{\perp}} \cos \theta_{\perp} e^{ikR_{\perp}} e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi R_{\perp}^2} \frac{1}{\sqrt{kR_{\perp}}} = \sqrt{\frac{2\pi i}{kR_{\perp}}} e^{ikR_{\perp}} \cos \theta_{\perp}.$$

Следовательно, интеграл Кирхгофа для случая цилиндрических волн приобретает следующий окончательный вид

$$\hat{E}(x_p, z_p) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x) \frac{e^{ikR_{\perp}}}{\sqrt{R_{\perp}}} \cos \theta_{\perp} dx \quad (12.19)$$

и представляет собой суперпозицию цилиндрических волн  $e^{ikR_{\perp}}/\sqrt{R_{\perp}}$  с осями симметрии, расположенными в открытых частях плоскости экрана.

## 12.8. Приближения Френеля и Фраунгофера

После общей скалярной теории дифракции Кирхгофа-Гельмгольца перейдем к рассмотрению ряда приближений, которые позволяют свести расчет дифракционной картины к более простым математическим действиям. Снова обратимся к дифракции монохроматического света на бесконечном непрозрачном экране с отверстием  $\Sigma$  конечных размеров. Рассматривается плоский экран, с которым связана декартова система координат  $x, y$  (рис. 12.22). Предполагается, что область наблюдения представляет собой плоскость  $z = z_p = \text{const}$ .

Рассматриваемые приближения будут основываться на предположении, что расстояние  $z_p$  между отверстием и плоскостью наблюдения значительно превышает максимальный линейный размер отверстия  $\Sigma$ .

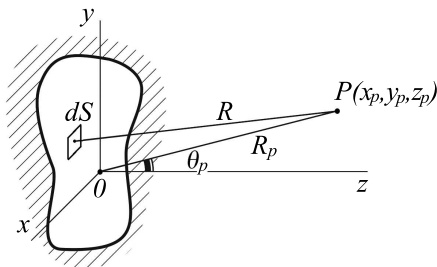


Рис. 12.22

Кроме того, будем предполагать, что в области наблюдения рассматривается только конечная область вблизи оси  $z$  и расстояние  $z_p$  много больше максимального размера этой области. С учетом этих допущений можно считать, что с точностью не хуже 5%

$$\cos \theta \simeq 1,$$

если угол  $\theta$  не превышает  $18^\circ$ . При этом величина  $R$  в знаменателе выражения (12.11) будет лишь незначительно отличаться от  $z_p$ , и этим отличием можно пренебречь. Заметим, что в экспоненте  $e^{ikR}$  замена  $R$  на  $z_p$  недопустима, так как возникающая при этом погрешность умножается на очень большое число  $k$  и фазовые погрешности становятся много больше  $2\pi$  рад.

**Приближение Френеля.** Дальнейшее упрощение можно получить, принимая некоторое приближение для  $R$  в экспоненте. Для аппроксимации

$$R = \sqrt{z_p^2 + (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2} = z_p \sqrt{1 + \left(\frac{x_p - x}{z_p}\right)^2 + \left(\frac{y_p - y}{z_p}\right)^2}$$

воспользуемся разложением квадратного корня

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots, \quad |b| < 1. \quad (12.20)$$

*Примем предположение*, что квадратный корень достаточно хорошо аппроксимируется первыми двумя членами этого разложения. Тогда

$$R \simeq z_p \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_p - x}{z_p}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_p - y}{z_p}\right)^2 \right]. \quad (12.21)$$

С учетом этого приближения, которое называется *приближением Френеля*, интеграл Кирхгофа (12.11) можно переписать в виде

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi iz_p} e^{ikz_p} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y) \exp\left\{i \frac{k}{2z_p} [(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]\right\} dx dy \quad (12.22)$$

или в виде

$$\hat{E}_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz_p}} e^{ikz_p} \int \tilde{E}(x) \exp\left\{i \frac{k}{2z_p} (x_p - x)^2\right\} dx \quad (12.23)$$

(для цилиндрических волн). Таким образом, когда расстояние  $z_p$  достаточно велико для того, чтобы выражение (12.21) можно было считать точным, говорят, что наблюдатель находится в области дифракции Френеля. При этом, естественно, остается вопрос о минимальном расстоянии  $z_p$ , когда приближение (12.22), (12.23) еще применимо.

В качестве *достаточного* условия применимости приближения Френеля можно потребовать, чтобы максимальное изменение фазы, обусловленное отброшенным третьим членом в разложении (12.20) квадратного корня, было много меньше 1 рад. Воспользовавшись для простоты выражением (12.23), названное условие запишем в виде  $k(x - x_p)_{max}^4 / 8z_p^3 \ll 1$ , что равносильно

$$z_p^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} (x - x_p)_{max}^4. \quad (12.24)$$

Однако это требование не является *необходимым*. Для справедливости приближения Френеля требуется только, чтобы члены более высокого порядка не изменяли величину интеграла

$$\int \tilde{E}(x) e^{ikR} dx.$$

Для этого необязательно, чтобы максимальные значения названного выше изменения фазы были много меньше 1 рад. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим близкое расстояние (обозначим  $z_p^*$ ) такое, на котором величина добавочной фазы достигает значения 1 рад. Пусть  $|x - x_p|_{max} = l_*$  (для рассматриваемых близких расстояний можно принять  $l_* = D$ , где  $D$  — характерный размер отверстия в экране); тогда для  $z_p^*$  из выражения (12.24) получаем значение

$$z_p^* \simeq D \left( \frac{D}{\lambda} \right)^{1/3}. \quad (12.25)$$

Для таких расстояний фаза в интеграле (12.22) или (12.23) меняется от минимального значения, равного нулю в точке  $x = x_p$ , до максимального значения

$$k \frac{D^2}{2z_p^*} = \pi \left( \frac{D}{\lambda} \right)^{2/3}, \quad (12.26)$$

которое значительно превышает единицу. (Например, при  $D/\lambda = 10^3$  равно  $\pi \cdot 10^2$ .) Поэтому если сюда прибавить добавочную фазу порядка единицы от неучитываемого в дифракции Френеля третьего члена разложения (12.20), то *на величину интеграла это не повлияет* (см. замечание в конце п. 3 § 12.10). Таким образом, условие (12.24) действительно не является необходимым для справедливости приближения Френеля. При достаточно больших  $D/\lambda$  даже на расстояниях (12.25) это приближение оказывается еще применимым.

**Приближение Фраунгофера.** Расчет дифракционной картины становится еще проще при более жестких ограничениях, чем в приближении Френеля. А именно, если принять, что расстояние  $z_p$  велико настолько, что выполняется условие Фраунгофера

$$\frac{D^2}{\lambda z_p} \ll 1, \quad (12.27)$$

где  $D$  — характерный размер отверстия в экране, фазовая функция под интегралом (12.22) существенно упрощается. Перепишем ее в виде произведения

$$\exp\left\{ik \frac{x^2 + y^2}{2z_p}\right\} \exp\left\{ik \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z_p}\right\} \exp\left\{-ik \frac{x_p x + y_p y}{z_p}\right\}$$

и заметим, что при выполнении условия (12.27) первый из сомножителей по всему отверстию приблизительно равен единице и, следовательно, не сказывается на величине интеграла. Второй сомножитель, являющийся константой относительно переменных интегрирования, может быть вынесен из-под интеграла, и под интегралом остается только последний из множителей. Таким образом, в области *дифракции Фраунгофера* поле в точке наблюдения

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i z_p} \exp(ikz_p) \exp\left\{ik \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z_p}\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y) \exp\left\{-ik \frac{x_p x + y_p y}{z_p}\right\} dx dy \quad (12.28)$$

представляет собой результат суперпозиции плоских монохроматических волн. Отсюда видно, что наблюдаемое распределение поля здесь определяется фурье-образом  $\tilde{E}(k_x, k_y) \doteq \tilde{E}(x, y)$  граничной функции в самом отверстии:

$$\hat{E}_p = \frac{k}{iz_p} \exp(ikz_p) \exp\left\{ik \frac{x_p^2 + y_p^2}{2z_p}\right\} \tilde{E}(k_x, k_y) \Big|_{k_x=kx_p/z_p, k_y=ky_p/z_p}. \quad (12.29)$$

(Заметим, что в случае одномерной задачи эта формула приобретает вид

$$\hat{E}_p = \sqrt{\frac{k}{iz_p}} \exp\left\{ik\left(z_p + \frac{x_p^2}{2z_p}\right)\right\} \tilde{E}(k_x) \Big|_{k_x=kx_p/z_p}, \quad (12.30)$$

непосредственно следующий из соответствующего результата (12.19).) Мы получили результат, в оговоренных условиях  $\cos \theta = 1$  совпадающий с главным членом асимптотического разложения интеграла (12.6) (см. § 12.3) для больших значений параметра  $kz_p$ . Но теперь мы имеем более определенное указание на область применимости данного результата. Это — область дифракции Фраунгофера, задаваемая условием (12.27)

$$z_p \gg \frac{D^2}{\lambda}, \quad \text{для которого} \quad kz_p \gg 2\pi \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2.$$

Отношение  $D^2/\lambda z_p$ , фигурирующее в условии (12.27), обычно называют параметром Френеля. Он характеризует число зон Френеля, проходящихся на отверстие в экране с характерным размером  $D$  (для наблюдателя на расстоянии  $z_p$  от экрана). Следовательно, условие (12.27) означает, что в области дифракции Фраунгофера отверстие мало по сравнению с первой зоной Френеля.

Для дифракции Френеля, начинающейся с расстояний порядка  $z_p^*$  (12.25), рассматриваемый параметр меняется от максимальных значений

$$\frac{D^2}{\lambda z_p^*} \simeq \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{2/3} \gg 1$$

до нуля на бесконечности. Но перед этим он становится  $\ll 1$  и дифракция Френеля переходит в дифракцию Фраунгофера.

## 12.9. Примеры дифракционных картин Фраунгофера

Первые два примера мы приведем для случая малого (или вовсе нулевого) угла падения, для которого справедливы результаты (12.29), (12.30). Затем эти формулы обобщим для произвольного угла падения и результат обобщения продемонстрируем на дополнительном примере.

**1. Дифракция на щели.** Для общности предположим, что плоская монохроматическая волна на экран со щелью ширины  $a$  падает под некоторым малым углом  $\alpha_0 \ll 1$ , как показано на рис. 12.5. При этом граничная функция, отличная от нуля в интервале  $|x| \leq a/2$ , равна

$$\tilde{E}(x) = E_0 e^{ik\alpha_0 x}, \quad (12.31)$$

а ее фурье-образ

$$\tilde{E}(k_x) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\alpha_0 x} e^{-ik_x x} dx = \frac{E_0 a}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}[(k_x - k\alpha_0)a/2]. \quad (12.32)$$

Амплитуда дифрагированной волны в точке наблюдения  $P$  с угловой координатой  $\alpha_p = x_p/z_p$  (см. рис. 12.5), определяемая соотношением (12.30), после отбрасывания несущественного фазового множителя приобретает вид

$$\hat{E}_p = \sqrt{\frac{k}{iz_p}} \frac{E_0 a}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}[k(\alpha_p - \alpha_0)a/2].$$

Отсюда интенсивность равна

$$I_p = I_p^0 \text{sinc}^2[k(\alpha_p - \alpha_0)a/2] \quad (12.33)$$

и имеет распределение с характерным углом дифракции  $\lambda/a$ , представленное на рис. 12.23. Максимальное значение интенсивности в центре дифракционной картины

$$I_p^0 = (a^2/\lambda z_p) I_0 \quad (I_0 = E_0^2)$$

пропорционально параметру Френеля, удовлетворяющему условию (12.27). Следовательно, на расстояниях  $z_p \gg a^2/\lambda$ , где справедливы полученные выражения, интенсивность мала, и поэтому соответствующую дифракционную картину Фраунгофера наблюдают в фокальной плоскости линзы, установленной непосредственно за экраном, как показано на рис. 12.24. При этом  $I_p^0 = (a^2/\lambda F) I_0$ .

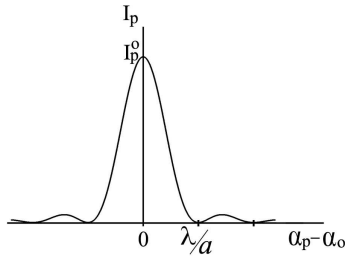


Рис. 12.23

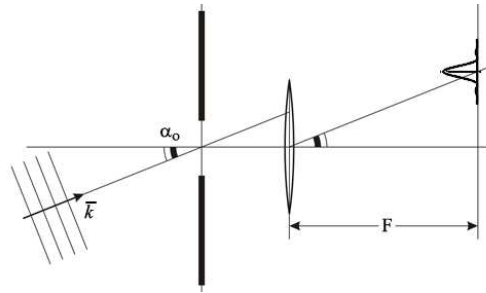


Рис. 12.24

**2. Дифракция на прямоугольном отверстии.** Для отверстия с размерами  $a, b$  по осям  $x, y$  и нормально падающей волны граничная функция  $\tilde{E}(x, y)$  отлична от нуля и равна  $E_0$  только в пределах  $|x| \leq a/2, |y| \leq b/2$ . Ее фурье-образ

$$\tilde{E}(k_x, k_y) = \frac{E_0 ab}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{kx_p a}{2z_p}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ky_p b}{2z_p}\right),$$

а для распределения интенсивности дифрагированной волны в плоскости  $z = z_p$ , как следует из формулы (12.29), имеем

$$I(x_p, y_p) = I_0 \left(\frac{ab}{\lambda z_p}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kx_p a}{2z_p}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ky_p b}{2z_p}\right).$$

Вместо схематического изображения данного двумерного распределения на рис. 12.25 приведена фотография картины дифракции на прямоугольном отверстии с отношением сторон  $a/b = 17/6^4$ . Видно, что дифракционные пятна вытянуты в направлении  $y$ , что согласуется с соответствующими углами дифракции  $\Delta\theta_x \sim \lambda/a, \Delta\theta_y \sim \lambda/b$ .

**3.** Чтобы сделать возможным исследование картины дифракции для случая наклонно падающей волны, когда представляющая интерес область наблюдения находится в стороне от оси  $z$ , откажемся от предположения  $\cos\theta = 1$  и формулы (12.28)–(12.30) соответственно обобщим. Начнем с того, что расстояние  $R$  от элементарной площадки  $dxdy$  до точки наблюдения преобразуем, введя в качестве основного его значения расстояние  $R_p = \sqrt{z_p^2 + x_p^2 + y_p^2}$  от начала координат до точки  $P$

<sup>4</sup>Любезно предоставлена сотрудниками Лаборатории демонстраций НГУ.



(рис. 12.22):

$$R = \sqrt{R_p^2 + (x^2 + y^2) - 2(x_px + y_py)} \simeq R_p + \frac{(x^2 + y^2) - 2(x_px + y_py)}{2R_p}.$$

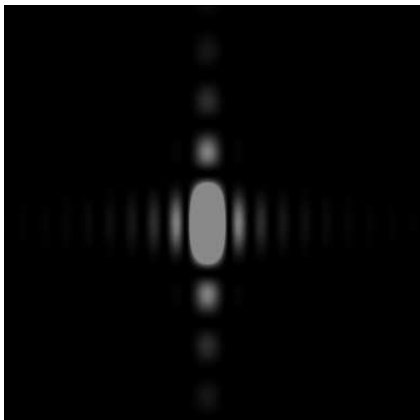


Рис. 12.25

В знаменателе выражения (12.11)  $R$  заменим на  $R_p$ , в экспоненте  $e^{ikR}$  — на  $R_p - (x_px + y_py)/R_p$  (так как мы рассматриваем приближение Фраунгофера), а  $\cos \theta$  заменим на  $\cos \theta_p$ , где  $\theta_p$  — угол между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{R}_p$  (рис. 12.22), не зависящий от переменных интегрирования  $x, y$ . В результате вместо формул (12.28)–(12.30) получим их обобщения

$$\hat{E}_p = \frac{k}{2\pi i R_p} e^{ikR_p} \cos \theta_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x, y) \exp\left\{-ik \frac{x_px + y_py}{R_p}\right\} dx dy, \quad (12.34)$$

$$\hat{E}_p = \frac{k}{i R_p} e^{ikR_p} \cos \theta_p \tilde{E}(k_x, k_y) \Big|_{k_x = kx_p/R_p, k_y = ky_p/R_p}, \quad (12.35)$$

$$\hat{E}_p = \sqrt{\frac{k}{i R_p}} e^{ikR_p} \cos \alpha_p \tilde{E}(k_x) \Big|_{k_x = kx_p/R_p}, \quad (12.36)$$

полностью совпадающие с главным членом асимптотического разложения интеграла (12.6), который в одномерном случае выражается формулой (12.9).

Воспользуемся последней формулой ((12.36) или (12.9), что одно и то же) для задачи дифракции на щели, считая угол падения  $\alpha_0$  произвольным. При этом вместо функций (12.31), (12.32) получаем

$$\tilde{E}(x) = E_0 e^{ik \sin \alpha_0 x}, \quad \tilde{E}(k_x) = \frac{E_0 a}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}[(k_x - k \sin \alpha_0) a / 2].$$

Заменяя в формуле (12.36)  $x_p/R_p$  на  $\sin \alpha_p$ , результат приведем к виду

$$\hat{E}_p = \frac{E_0 a}{\sqrt{i\lambda R_p}} e^{ikR_p} \cos \alpha_p \text{sinc}[k(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0) a / 2].$$

Используя разложение  $\sin \alpha_p = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 (\alpha_p - \alpha_0)$ , отсюда получим

$$\hat{E}_p = \frac{E_0 a \cos \alpha_0}{\sqrt{i\lambda R_p}} e^{ikR_p} \text{sinc}[k(\alpha_p - \alpha_0) a \cos \alpha_0 / 2],$$

$$I_p = \frac{(a \cos \alpha_0)^2}{\lambda R_p} I_0 \text{sinc}^2[k(\alpha_p - \alpha_0) a \cos \alpha_0 / 2]. \quad (12.37)$$

Таким образом, как видно из сравнения с формулой (12.33), угол наклона  $\alpha_0$  преобразует дифракционную картину так, как если бы эффективная ширина щели уменьшилась до величины  $a \cos \alpha_0$ . Это приводит к увеличению угла дифракции до величины  $\lambda / (a \cos \alpha_0)$ , (рис. 12.26), а интенсивность дифрагированной волны спадает пропорционально  $\cos^2 \alpha_0$ .

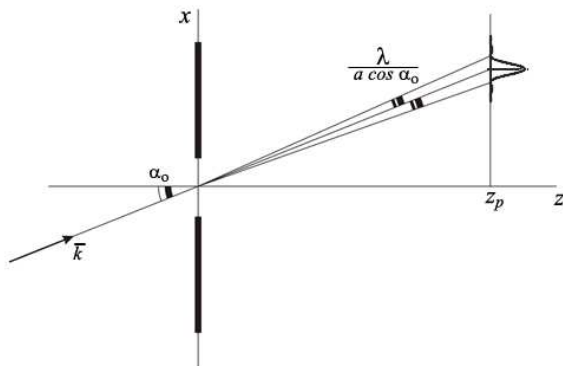


Рис. 12.26

## 12.10. Пример дифракционной картины Френеля

1. Рассчитать дифракционную картину Френеля бывает сложнее, чем дифракционную картину Фраунгофера. В качестве иллюстрации рассмотрим дифракцию Френеля на щели, основное внимание уделив предельному случаю широкой щели — дифракции на краю полуплоскости. Начинать непосредственно с последней задачи мы не можем, т.к. использовать приближение Френеля для получения картины дифракции от края полуплоскости, на первый взгляд, кажется недопустимым, поскольку открытая часть экрана в этом случае простирается до бесконечности и предположение  $\cos \theta \simeq 1$  вместе с аппроксимацией (12.21), принятые в приближении Френеля, формально здесь явно нарушаются. Поэтому мы начнем со случая щели с конечной шириной  $l$  при  $z_p \gg l$ , когда названное противоречие не существует и использование решения (12.23) не вызывает сомнения. Увидим, что при увеличении ширины щели быстро достигается такое ее значение  $l = l_* \ll z_p$ , выше которого наличие второго края у щели перестает сказываться на состоянии поля дифрагированной волны в освещенной области и в области геометрической тени за экраном вблизи другого края щели. Получается, таким образом, что на состояние поля дифракции влияние оказывает только небольшая область открытой части плоскости экрана, непосредственно прилегающая к его краю, причем ширина этой области составляет конечное число (небольшое, порядка десяти) зон Френеля. Это обстоятельство фактически снимает те возражения, которые препятствовали непосредственному применению приближения Френеля к задаче дифракции на краю полуплоскости.

2. Итак, предположим, что щель ширины  $l$  в непрозрачном экране (рис. 12.27), освещена нормально падающей волной

$$E_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

В этом случае граничная функция

$$\tilde{E} = \begin{cases} E_0 & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{вне данного интервала,} \end{cases}$$

и из соотношения (12.23) имеем

$$\hat{E}_p = \frac{E_0}{\sqrt{i\lambda z_p}} e^{ikz_p} \int_0^l e^{ik \frac{(x-x_p)^2}{2z_p}} dx.$$

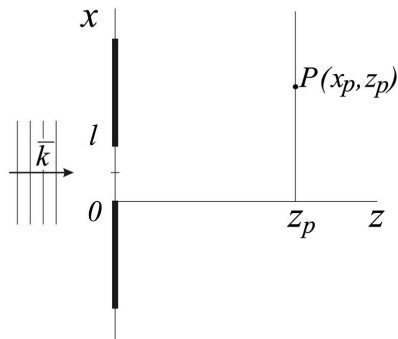


Рис. 12.27

После замены переменной интегрирования

$$v = (x - x_p) / \sqrt{\lambda z_p / 2}$$

и введения с помощью линейного масштаба  $\sqrt{\lambda z_p / 2}$  безразмерных параметров

$$\xi_p = x_p / \sqrt{\lambda z_p / 2}, \quad \xi_l = l / \sqrt{\lambda z_p / 2}$$

данный результат приводится к виду

$$\hat{E}_p = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} e^{ikz_p} \int_{-\xi_p}^{\xi_l - \xi_p} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} e^{ikz_p} \left[ \int_0^{\xi_p} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv + \int_0^{\xi_l - \xi_p} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv \right]. \quad (12.38)$$

Каждый из интегралов в последней сумме, имеющий структуру

$$J(u) = \int_0^u e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv,$$

выражается через табулированные функции

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv, \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv,$$

известные под названием интегралов Френеля. То есть

$$J(u) = \int_0^u e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv = C(u) + iS(u). \quad (12.39)$$

Для небольшого интервала положительных значений  $u$  функции  $C(u)$ ,  $S(u)$  приведены в графическом виде на рис. 12.28. А для значений  $u > 5$  их можно аппроксимировать приближенными формулами<sup>5</sup>

$$\left. \begin{array}{l} C(u) \\ S(u) \end{array} \right\} = 0,5 \pm \frac{0,318}{u} \times \left. \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{2} u^2 \\ \cos \frac{\pi}{2} u^2 \end{array} \right\}. \quad (12.40)$$

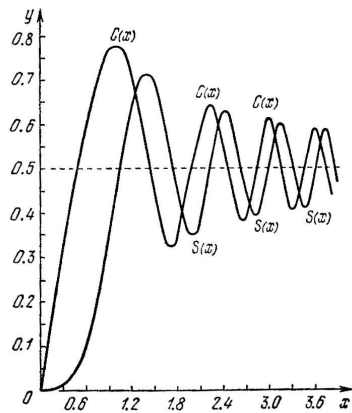


Рис. 12.28

**3. Спираль Корню.** Наглядное представление об интеграле (12.39) как комплексном числе, зависящем от вещественного параметра  $u$ , дает

<sup>5</sup>Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

его векторная диаграмма, которая называется спиралью Корню. Знакомство с ней начнем с построения ее грубой модели. Для этого поступим так, как мы строили диаграмму для интеграла (12.12) в виде предела интегральной суммы. В данном случае вместо цепочки (12.14) имеем

$$\int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv = \lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N, \quad \Sigma_N = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta v e^{i\alpha n^2}, \quad \Delta v = \frac{u}{N}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}(\Delta v)^2.$$

Здесь каждый член суммы  $\Sigma_N$  имеет постоянный модуль  $\Delta v$ , как и в случае (12.14), но аргумент каждого последующего  $n$ -го члена теперь больше предыдущего на величину  $\alpha[n^2 - (n-1)^2] = \alpha(2n-1)$ . Именно благодаря этому получающаяся ломаная линия, схематически представленная на рис. 12.29 (для  $N = 10$ ), уже имеет характерный вид, содержащий основные особенности спирали Корню. (Напомним, что суммарная длина ломаной равна  $u$ , а вектор, соединяющий ее начало и конец, представляет комплексное число  $\Sigma_N$ .)

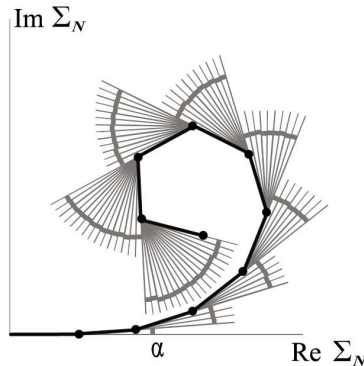


Рис. 12.29

После перехода к пределу  $N \rightarrow \infty$  ломаная с суммарной длиной  $u$  преобразуется в гладкую кривую той же длины, причем такую, что любой ее элементарный участок  $dv$  с координатой  $v$ , отсчитываемой вдоль кривой, как комплексное число характеризуется аргументом  $(\pi/2)v^2$ . Таким образом, спираль Корню представляет собой кривую, соединяющую последовательные точки комплексной плоскости с координатами  $C(u), S(u)$ , получающиеся при возрастании  $u$ . Следовательно, эта кривая строится по табличным значениям названных функций и в резуль-

тате приобретает вид, показанный на рис. 12.30. Здесь наравне с ветвями спирали, соответствующими положительным значениям  $u$ , представлены соответствующие результаты также и для отрицательных  $u$ , получающиеся из свойства симметрии интегралов Френеля

$$C(-u) = -C(u), \quad S(-u) = -S(u).$$

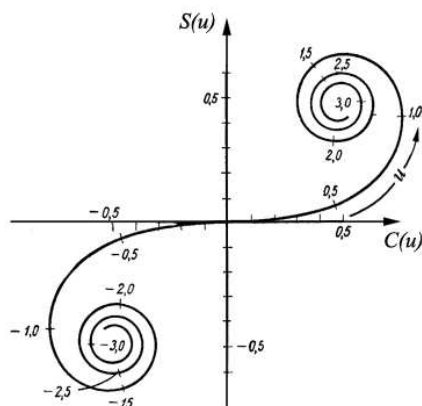


Рис. 12.30

На кривой указаны некоторые фиксированные значения параметра  $u$  от 0,5 до 2,5 (а также соответствующие отрицательные значения). Полезно помнить, что параметр  $u$ , отвечающий точке на этой кривой, связан с угловой координатой касательной в этой точке, равной  $(\pi/2)u^2$ . Отсюда, в частности, следует, что точки на кривой, соответствующие значениям  $u = \sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ , можно определить по их вертикальным касательным, а значениям  $u = \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \dots$ , — по горизонтальным касательным, как показано на рис. 12.31, где специально выделен фрагмент спирали для небольших положительных значений  $u$ .

Таким образом, качественное поведение интеграла  $J(u)$  (12.39) легко представить из рис. 12.32, где вектор, соединяющий начало координат с точкой на спирали, соответствующей значению  $u$ , изображает комплексное число  $J(u)$ . При увеличении параметра  $u$  конец вектора скользит по спирали, так что при изменении  $u$  от 1 до  $\sqrt{5}$  с первой ветви спирали переходит на вторую. При дальнейшем увеличении  $u$  вещественная ( $C$ ) и мнимая ( $S$ ) составляющие этой функции так же, как и ее модуль  $|J(u)|$ ,

совершают затухающие колебания относительно предельных значений этих функций, определяемых предельным значением интеграла

$$J(\infty) = \int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv = \frac{1+i}{2}.$$

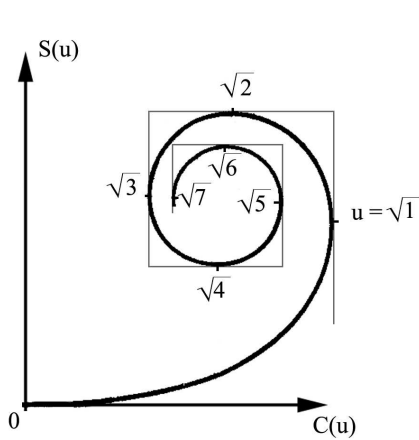


Рис. 12.31

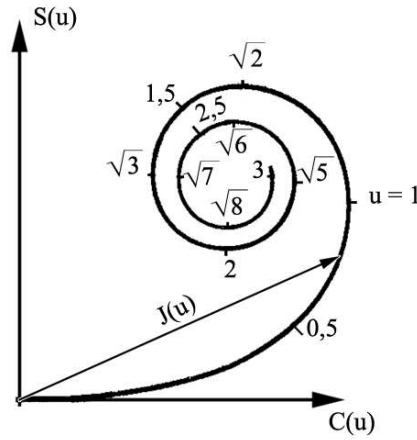


Рис. 12.32

Как видно из приближенной формулы (12.40), колебательный характер функций  $C(u)$ ,  $S(u)$ ,  $|J(u)|$  относительно своих предельных значений характеризуется быстрым уменьшением периода при относительно медленном ( $\sim u$ ) затухании амплитуды колебаний.

Дальше нам понадобится значение параметра  $u = u_*$ , начиная с которого амплитуды колебаний названных функций становятся ниже, например, 5% от их средних (предельных) значений. Нетрудно видеть, что это число определяется из условия  $0,318/u_* = 0,1 \cdot 0,5$ , откуда  $u_* \simeq 12,7$ . Зафиксируем этот результат для физических оценок:

$$|J(u) - J(\infty)| < 0,05|J(\infty)| \quad \text{при } u \geq u_*, \quad \text{где } u_* \simeq 12,7. \quad (12.41)$$

*Замечание к § 12.8.* Значению максимальной фазы (12.26) в интеграле (12.39) соответствует параметр  $u$ , определяемый равенством

$$\pi\left(\frac{D}{\lambda}\right)^{2/3} = \frac{\pi}{2}u^2.$$



Понятно, что если  $u$  приближается или превышает значение  $u_*$ , то небольшое изменение параметра, вызванное добавочной фазой в 1 рад, действительно практически не изменит величину интеграла.

4. Вернемся к обсуждению полученного результата (12.38). Имея в виду обозначенную в начале параграфа цель — из результатов дифракции на щели перейти к описанию дифракции на краю полуплоскости, — область наблюдения ограничим условием  $x_p < l/2$  и  $\xi_p < \xi_l/2$ . При этом нас будет интересовать условие, когда поле в точке  $x_p = l/2$

$$\hat{E}_p(x_p = l/2) = 2 \frac{E_0}{\sqrt{2i}} e^{ikz_p} \int_0^{\xi_l/2} e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv$$

с определенной точностью совпадает с невозмущенным значением  $E_0 e^{ikz_p}$  и перестает зависеть от ширины щели. Если принять, что пятипроцентные колебания амплитуды поля (следовательно, четвертьпроцентные колебания интенсивности) относительно невозмущенных значений амплитуды допустимы, то из зафиксированного выше результата (12.41) следует, что ширина щели должна удовлетворять условию  $\xi_l \geq 2u_*$ . (Естественно, это требование во сколько угодно раз можно ужесточить.) При этом для точек наблюдения  $x_p < l/2$  ( $\xi_p < (1/2)\xi_l$ ) верхний предел  $\xi_l - \xi_p$  в последнем интеграле (12.38) удовлетворяет условию  $\xi_l - \xi_p > u_*$  и может быть заменен на бесконечность. Тогда искомая амплитуда поля приобретает следующий окончательный вид

$$\hat{E}_p = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} e^{ikz_p} \left( \frac{1+i}{2} + \int_0^{\xi_p} e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv \right). \quad (12.42)$$

Скобка в выражении (12.42), равная  $J(\infty) + J(\xi_p)$ , на векторной диаграмме (рис. 12.33) изображается вектором, начало которого находится в центре левой спирали  $-(1+i)/1$ , а конец — в точке спирали Корню, соответствующей параметру  $u = \xi_p$ . (Для отрицательных значений  $\xi_p$  этот вектор показан пунктиром.) Отсюда характерное поведение зависимости интенсивности волны в плоскости наблюдения  $z = z_p$  от координаты  $x_p$  качественно можно непосредственно представить и согласовать с результатом вычислений, изображенным на графике (рис. 12.34). Видно, во-первых, что в области геометрической тени ( $x_p < 0, \xi_p < 0$ )  $|\hat{E}_p|$  и  $I = |\hat{E}_p|^2$  монотонно стремятся к нулю при увеличении  $|\xi_p|$ . Интенсивность практически обращается в нуль уже при достижении значения

$\xi_p = -3$ , т. е.  $x_p = -3\sqrt{\lambda z_p/2}$ . Во-вторых, на границе геометрической тени (т. е. при  $x_p = 0$ )

$$\hat{E}_p = \frac{E_0}{\sqrt{2i}} e^{ikz_p} \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} E_0 e^{ikz_p} \quad \text{и} \quad I = \frac{1}{4} I_0, \quad \text{где} \quad I_0 = E_0^2.$$

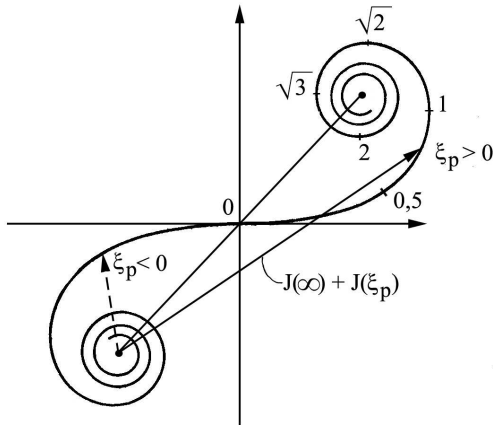


Рис. 12.33

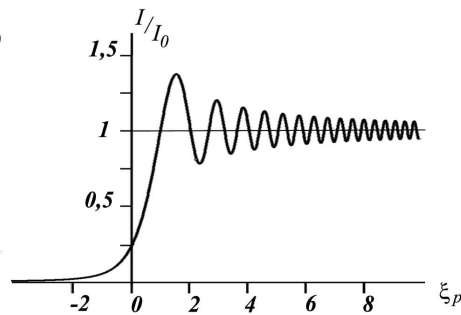


Рис. 12.34

В-третьих, по мере перемещения в сторону освещенной области  $|\hat{E}_p|$  и  $I$  возрастают и в точке  $x_p$ , соответствующей значению  $\xi_p \simeq 1,5$ , принимают максимальные значения, превышающие соответственно  $E_0$  и  $I_0$  ( $I = 1,37 I_0$ ). При дальнейшем увеличении  $x_p$  их поведение носит колебательный характер с затухающей амплитудой относительно значений  $E_0$  и  $I_0$ . Первое падение до минимального значения произойдет при  $\xi_p \simeq 1,9$ . Амплитуды колебаний падают практически до нуля на расстоянии  $x_p = \sqrt{\lambda z_p/2} u_*$  от границы тени и в дальнейшем в соответствии с геометрической оптикой интенсивность имеет постоянное значение  $I_0$ .

Обсуждение дифракции Френеля на полуплоскости завершим следующим замечанием. Как мы убедились, на состояние поля дифракции влияние оказывает небольшая область открытой части плоскости экрана с шириной  $l_* = \sqrt{\lambda z_p/2} u_* \ll z_p$ . Представляющий интерес размер области наблюдения также характеризуется этим значением. Тем самым снимаются те кажущиеся противоречия к применимости приближения Френеля в рассматриваемой задаче, которые были высказаны в начале данного параграфа.

## 12.11. Дифракционные решетки

1. Наиболее ярко дифракция Фраунгофера проявляет себя в дифракционной решетке, имеющей важное практическое применение в спектроскопии. Простейший пример дифракционной решетки — щелевая решетка, представляющая собой набор большого числа одинаковых параллельных щелей, находящихся на равных расстояниях друг от друга. Именно этот частный вид дифракционной решетки изображен на рис. 12.35, *a*, но вначале мы проведем вычисления для общего случая решетки, состоящей из набора  $N$  периодически расположенных дифрагирующих элементов с периодом  $d$ . Примем, что волна падает по нормали к плоскости решетки.

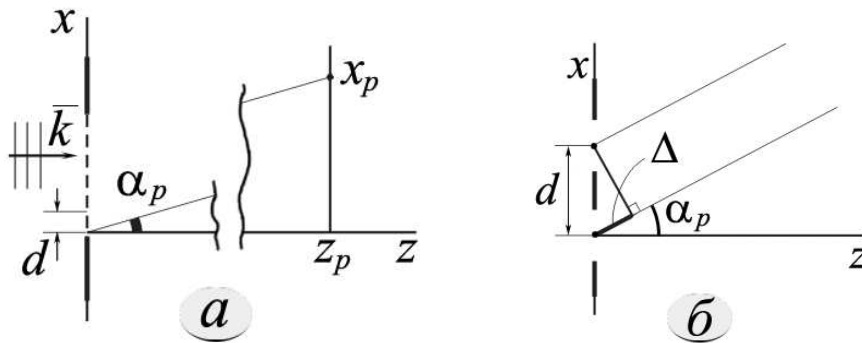


Рис. 12.35

Результат для дифракции Фраунгофера в одномерной задаче выражается формулой (12.30), где  $\tilde{E}(k_x) \doteq \tilde{E}(x)$  есть фурье-образ граничной функции  $\tilde{E}(x)$ , т. е. поля в плоскости  $z = 0+$ , непосредственно примыкающей к объекту, на котором происходит дифракция. Если объект (в данном случае дифракционная решетка) имеет периодически повторяющуюся структуру, а волна падает по нормали, то функция  $\tilde{E}(x)$  также имеет вид периодически повторяющихся сигналов, схематически представленных на рис. 12.36<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>При наклонном падении  $\tilde{E}(x)$  имеет более сложную структуру.

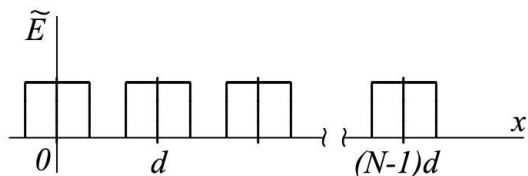


Рис. 12.36

Фурье-образ такой функции определяется соотношением (8.13):

$$\tilde{E}(k_x) = \tilde{E}_1(k_x) e^{-ik_x(N-1)d/2} \frac{\sin Nk_x d/2}{\sin k_x d/2}, \quad (12.43)$$

где  $\tilde{E}_1(k_x)$  — фурье-компонента от одного структурного элемента решетки, а последний множитель (отношение синусов) есть интерференционный множитель.

Мы исследовали его в виде функции

$$Y_N = \left| \frac{\sin Nx}{\sin x} \right|$$

в п.4 § 8.2 и представили графически для небольших значений параметра  $N$  (рис. 8.4, 8.5). Видели, что главные максимумы этой функции расположены в точках  $x_m = m\pi$  и равны  $N$ , между ними располагаются  $N - 2$  побочных максимумов. Первый нуль функции  $Y_N$  находится на расстоянии  $\pi/N$  от главного максимума.

Итак, используя результат (12.43), амплитуду поля (12.30) дифрагированной волны в точке наблюдения с координатами  $x_p, z_p$  (или с угловой координатой  $\alpha_p = x_p/z_p$  на экране  $z = z_p$  (рис. 12.35,а), что более предпочтительно), можно переписать в виде

$$\hat{E}(\alpha_p) = \hat{E}_1(\alpha_p) \frac{\sin Nk\alpha_p d/2}{\sin k\alpha_p d/2} \exp[-i(N-1)k\alpha_p d/2],$$

где

$$\hat{E}_1(\alpha_p) = \sqrt{\frac{k}{iz_p}} \exp\left[ik\left(z_p + \frac{x_p^2}{2z_p}\right)\right] \tilde{E}_1(k_x) \Big|_{k_x = kx_p/z_p = k\alpha_p}$$

есть амплитуда поля волны, приходящей в точку наблюдения, от одного элемента решетки. Отсюда для интенсивности имеем

$$I(\alpha_p) = |\hat{E}(\alpha_p)|^2 = I_1(\alpha_p) \frac{\sin^2 Nk\alpha_p d/2}{\sin^2 k\alpha_p d/2}, \quad (12.44)$$

$$I_1(\alpha_p) = \frac{k}{z_p} |\tilde{E}(k_x = k\alpha_p)|^2. \quad (12.45)$$

Данный результат можно получить и без обращения к соотношению (8.13), заметив, что поле в точке наблюдения

$$\hat{E}(\alpha_p) = \hat{E}_1(\alpha_p)[1 + e^{-ik\Delta} + e^{-2ik\Delta} + \dots + e^{-i(N-1)k\Delta}] \quad (12.46)$$

состоит из  $N$  слагаемых, порожденных элементами периодической структуры, причем от каждого последующего элемента волна приходит с фазовым сдвигом, обусловленным разностью хода  $\Delta = \alpha_p d$  (рис. 12.35, б). Результат суммирования полученной геометрической прогрессии (т. е. результат интерференции) и дает искомое решение

$$\hat{E}(\alpha_p) = \hat{E}_1(\alpha_p) e^{-i(N-1)k\Delta/2} \frac{\sin Nk\Delta/2}{\sin k\Delta/2}. \quad (12.47)$$

**2. Щелевая решетка.** В конкретном случае простой решетки, состоящей из щелей ширины  $a$ , как следует из решения (12.37), при  $\alpha_0 = 0$  имеем

$$I_1(\alpha_p) = I_0 \operatorname{sinc}^2(k a \alpha_p / 2), \quad I_0 = E_0^2 \frac{a^2}{\lambda z_p} \quad (\text{или } E_0^2 \frac{a^2}{\lambda F}). \quad (12.48)$$

Суммарная интенсивность (12.44) при этом характеризуется распределением по углу, схематически представленным на рис. 12.37.

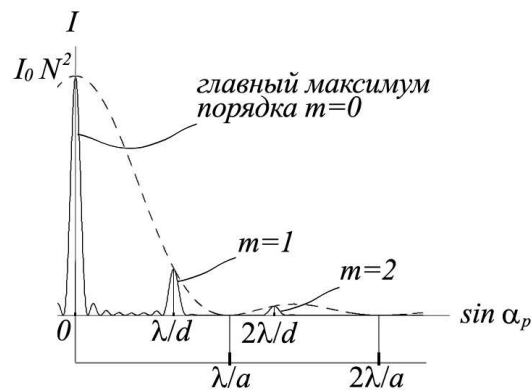


Рис. 12.37

Здесь пунктирная кривая соответствует функции  $I_0 N^2 \operatorname{sinc}^2(k a \alpha_p / 2)$ ,

сплошная изображает интенсивность (для частного случая  $d = 3/2 a$ ) с тремя главными максимумами порядков  $m = 0, m = 1, m = 2$  при углах соответственно  $\alpha_p = 0, \alpha_p = \lambda/d$  и  $\alpha_p = 2\lambda/d$ . Максимум порядка  $m = 3$  отсутствует, т. к. его положение в данном частном случае совпадает с нулем огибающей. Кроме первых главных максимумов на рис. 12.37 намечены также побочные максимумы для интервала углов  $0 < \alpha_p < \lambda/d$ . Всего их шесть; следовательно, данная схематическая картина соответствует значению  $N = 8$  и только качественно отвечает распределению интенсивности за реальной дифракционной решеткой, в которой число штрихов достигает  $N = 2 \cdot 10^5$ .

Положения  $\alpha_m = m\lambda/d$  главных максимумов мы определяли из условия обращения в нуль знаменателя интерференционного множителя в выражении (12.44), полученном на основе фурье-преобразования (8.13). При использовании интерференционного подхода (12.46) направления  $\alpha_m$  непосредственно просматриваются как направления, для которых разности хода  $\Delta$  (рис. 12.35, б) равны целому числу длин волн, т. е.  $\Delta_m = \alpha_m d = m\lambda$ .

**3. Фазовые решетки.** Обратим внимание, что в рассмотренной щелевой решетке только малая часть падающего света попадает в дифракционный максимум какого-нибудь одного порядка  $m \neq 0$ . Это серьезный недостаток при исследовании излучения слабых источников. Устраняется он в современных так называемых фазовых решетках, позволяющих сконцентрировать большую часть энергии дифрагирующего света в одном или двух главных максимумах.

В качестве примера возьмем фазовую решетку из прозрачного диэлектрика (стекло) с профилем штрихов, показанным на рис. 12.38. Ширина штриха, одновременно являющаяся периодом решетки, равна  $d$ , угол  $\beta \ll 1$ . Амплитуда поля волны, прошедшей через решетку, по модулю постоянна. Фаза в плоскости  $z = +0$  зависит от координаты  $x$ , и ее переменная часть определяется оптической длиной пути  $\Delta$ , складывающейся из двух частей. В пределах  $0 < x < d$  одного штриха

$$\Delta(x) = n\beta x + (\beta d - \beta x),$$

где первое слагаемое соответствует участку пути в стекле с показателем преломления  $n$ , второе — слою воздуха (на рис. 12.38 выделены черточками). Таким образом, не принимая во внимание постоянный фазовый множитель  $\exp(ik\beta d)$ , граничную функцию в пределах одного штриха можно принять в виде

$$\tilde{E}_1(x) = E_0 e^{ik\beta(n-1)x}.$$

Отсюда фурье-образ, входящий в выражение (12.45), для рассматриваемой фазовой решетки

$$\tilde{E}_1(k_x) = \frac{E_0 d}{\sqrt{2\pi}} e^{i[k_x - k\beta(n-1)]d/2} \operatorname{sinc}\{[k_x - k\beta(n-1)]d/2\}.$$

Следовательно, множитель  $I_1(\alpha_p)$ , определяющий распределение интенсивности (12.44), в данном случае имеет вид

$$I_1(\alpha_p) = I_0 \operatorname{sinc}^2[kd(\alpha_p - \beta(n-1))/2], \quad I_0 = E_0^2 \frac{d^2}{\lambda z_p} \quad (\text{или } E_0^2 \frac{d^2}{\lambda F})$$

и только аргументом функции *sinc* отличается от соответствующего множителя (12.48) для щелевой решетки. Но благодаря этому отличию центральный максимум функции  $I_1(\alpha_p)$  занимает теперь регулируемое положение  $\alpha_p = \alpha_* = \beta(N-1)$ , а его характерная ширина в точности совпадает с угловым расстоянием между главными максимумами. Сказанное демонстрирует рис. 12.39, на котором интерференционный множитель представлен несколькими своими главными максимумами, а функция  $I_1(\alpha_p)$  нанесена пунктирной линией.

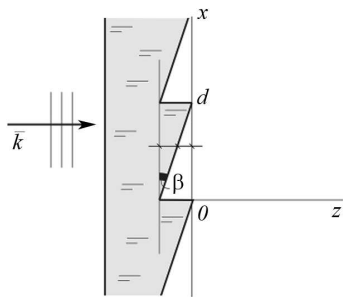


Рис. 12.38

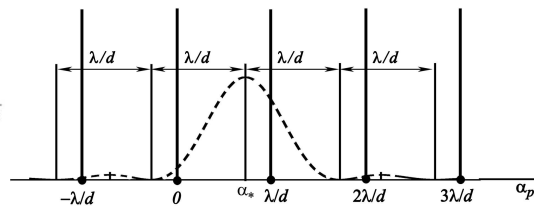


Рис. 12.39

Очевидно, что приравнивая величину  $\beta(N-1)$  одному из значений  $m\lambda/d$ , можно добиться, чтобы суммарная интенсивность дифрагированной волны характеризовалась наличием всего одного главного максимума, как на рис. 12.40, соответствующем случаю  $\beta(N-1) = \lambda/d$ . Здесь весь падающий на решетку световой поток концентрируется в одном первом максимуме.

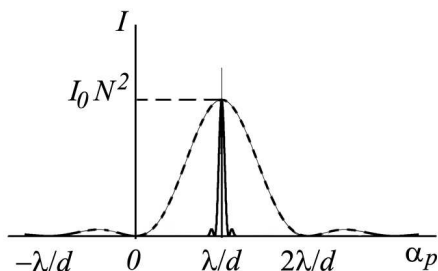


Рис. 12.40

**4. Случай наклонно падающей волны.** В данном случае результат дифракции Фраунгофера выражается формулой (12.36)

$$\hat{E}_p = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} \cos \alpha_p \tilde{E}(k_x) \Big|_{k_x = k \sin \alpha_p}. \quad (12.49)$$

Для не малых углов падения  $\alpha_0$  граничная функция в пределах одной щели  $|x| < a/2$  (в частном случае щелевой решетки) и ее фурье-образ будут

$$\tilde{E}_1(x) = E_0 e^{ik \sin \alpha_0 x}, \quad \tilde{E}_1(k_x) = \frac{E_0 a}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}[(k_x - k \sin \alpha_0) a/2]. \quad (12.50)$$

Но для всей решетки функция  $\tilde{E}(x)$  теперь не может быть представлена в виде периодического повторения  $\tilde{E}_1(x)$ , т. е.  $\tilde{E}(x) \neq \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{E}_1(x - nd)$ , т. к. граничная функция за каждой последующей щелью отличается от предыдущей фазовым множителем  $\exp(ikd \sin \alpha_0)$ . Это обстоятельство не позволяет выписать фурье-образ  $\tilde{E}(k_x)$  в виде (12.43) и непосредственно воспользоваться формулой (12.49) для получения распределения интенсивности за решеткой. Поэтому для решения задачи придется пройти одним из двух «окольных» путей. Например, из знания фурье-образа  $\tilde{E}_1(k_x)$  (12.50) сначала по формуле (12.49) определить поле в точке наблюдения

$$\hat{E}_1(\alpha_p) = \sqrt{\frac{k}{iR_p}} e^{ikR_p} \cos \alpha_p \frac{E_0 a}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}[(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0) ka/2], \quad (12.51)$$

обусловленное одной щелью. А затем, воспользовавшись интерференционным подходом (12.46), для суммарного поля от  $N$  щелей ответ за-



писать в виде

$$\hat{E}(\alpha_p) = \hat{E}_1(\alpha_p) e^{-i(N-1)k\Delta/2} \frac{\sin Nk\Delta/2}{\sin k\Delta/2}, \quad (12.52)$$

по форме совпадающем с выражением (12.47). Как видно из рис. 12.41,

$$\Delta = d(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0) \quad (12.53)$$

и, следовательно, направления на главные максимумы определяются условием

$$d(\sin \alpha_m - \sin \alpha_0) = m\lambda, \quad (12.54)$$

при  $\alpha_0 = 0$  сводящимся к

$$d \sin \alpha_m = m\lambda \quad (\text{или } \alpha_m = m\lambda/d \text{ при } d \gg \lambda).$$

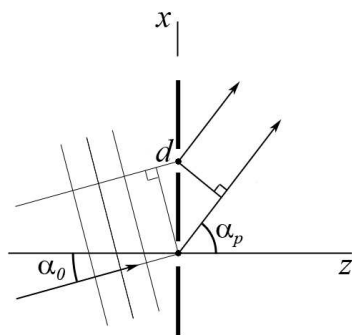


Рис. 12.41

Таким образом, распределение интенсивности за решеткой при наклонном падении, как следует из соотношений (12.52), (12.53), определяется формулой

$$I(\alpha_p) = I_1(\alpha_p) \frac{\sin^2[N(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0)kd/2]}{\sin^2[(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0)kd/2]}, \quad (12.55)$$

справедливой для решетки с произвольным профилем штриха. Структура штриха (или структура одной ячейки решетки) сказывается только на множителе  $I_1(\alpha_p)$ , который для простой щелевой решетки имеет вид

$$I_1(\alpha_p) = \frac{E_0^2 a^2}{\lambda R_p} \cos^2 \alpha_p \operatorname{sinc}^2[(\sin \alpha_p - \sin \alpha_0)ka/2], \quad (12.56)$$

вытекающий из соотношения (12.51).

Второй возможный путь к решению рассматриваемой задачи связан с непосредственным вычислением фурье-образа граничной функции  $\tilde{E}(x)$ . Для этого заметим, что в случае наклонного падения эту функцию можно представить в виде произведения

$$\tilde{E}(x) = E_0 e^{ik \sin \alpha_0 x} t(x),$$

где  $E_0 e^{ik \sin \alpha_0 x}$  есть амплитуда падающей волны в плоскости  $z = 0$ , а  $t(x)$  — коэффициент пропускания решетки, для произвольной решетки представляющий собой периодическую функцию с периодом  $d$ . Последнюю функцию (но не  $\tilde{E}(x)$ !) можно записать в виде

$$t(x) = \sum_{n=0}^{N-1} t_1(x - nd)$$

периодического повторения одной «ступеньки»  $t_1(x)$ , определенной в пределах одного периода. (Например, для простой щелевой решетки  $t(x)$  есть ступенчатая функция координаты  $x$ , изображенная на рис. 12.42, а  $t_1(x)$  отлична от нуля на интервале  $|x| < a/2$  и равна здесь единице.)

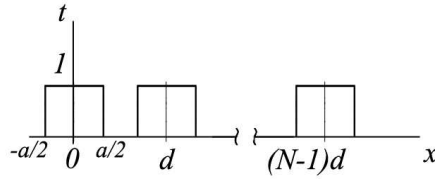


Рис. 12.42

Таким образом,

$$\tilde{E}(x) = E_0 e^{ik \sin \alpha_0 x} \sum_{n=0}^{N-1} t_1(x - nd),$$

а ее фурье-образ

$$\tilde{E}(k_x) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x - k \sin \alpha_0)x} \sum_{n=0}^{N-1} t_1(x - nd) dx$$

сводится к функции, получающейся из результата (12.43) заменой  $k_x$  на  $k_x - k \sin \alpha_0$ . Подставив полученную функцию  $\tilde{E}(k_x)$  в формулу (12.49), придем к выражениям (12.55), (12.56) (последнее — для щелевой решетки).

В заключение параграфа обратимся к случаю  $d \gg \lambda$ , когда углы дифракции малы, чтобы привести формулы (12.55), (12.56) к более простому виду. Для этого  $\sin \alpha_p$  в них заменим на разложение  $\sin \alpha_p = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 (\alpha_p - \alpha_0)$ ,  $\cos \alpha_p$  — на  $\cos \alpha_0$  и в результате получим

$$I(\alpha_p) = I_1(\alpha_p) \frac{\sin^2[Nkd \cos \alpha_0 (\alpha_p - \alpha_0)/2]}{\sin^2[kd \cos \alpha_0 (\alpha_p - \alpha_0)/2]},$$

$$I_1(\alpha_p) = I_0 \operatorname{sinc}^2[ka \cos \alpha_0 (\alpha_p - \alpha_0)/2], I_0 = \frac{E_0^2 a^2 \cos^2 \alpha_0}{\lambda R_p} \left( \frac{E_0^2 a^2 \cos^3 \alpha_0}{\lambda F} \right).$$

Из сравнения полученных формул с соответствующими результатами (12.44), (12.48) для  $\alpha_0 = 0$  видим, что, в основном, наличие ненулевого угла падения эквивалентно соответствующему уменьшению периода решетки и ширины щели. Естественно, дифракционный угол при этом отсчитывается от направления падающей волны.

## 12.12. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Как видно из соотношения (12.54), направления на главные максимумы зависят от длины волны (за исключением случая  $m = 0$ ), или, как говорят, имеется угловая дисперсия ( $d\alpha_m/d\lambda \neq 0$ ). Поэтому решетка разлагает падающий некогерентный свет в спектры нескольких порядков и может использоваться в качестве диспергирующего элемента в спектральных приборах. Максимальный порядок спектра, ограничиваемый условием  $|\sin \alpha_m| \leq 1$ , при нормальном падении удовлетворяет условию  $m_{\max} \leq d/\lambda$ . Чтобы решетка давала спектр хотя бы первого порядка, ее период должен быть больше длины световой волны.

Важнейшими характеристиками спектрального прибора являются *свободная область дисперсии* и разрешающая способность. Свободная область дисперсии равна максимальной ширине  $\Delta\lambda$  спектрального интервала исследуемого излучения, при которой спектры соседних порядков еще не перекрываются. Для ее определения рассмотрим спектральный интервал от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$  и выясним, при каком  $\Delta\lambda$  положение  $\alpha_{m+1}$  максимума  $m + 1$  порядка волны  $\lambda$  совпадет с положением  $\alpha_m$  для волны  $\lambda + \Delta\lambda$ . Так как положения максимумов всегда определяются через соответствующую разность хода  $\Delta l$  из соотношения  $\Delta l = m\lambda$ , рассматриваемое совпадение для произвольной дифракционной решетки произойдет при условии  $(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$ . Отсюда

$$\Delta\lambda = \lambda/m \quad (12.57)$$

— свободная область дисперсии для решетки (как и любого другого спектрального прибора) — обратно пропорциональна порядку спектра. При использовании спектров низких порядков (обычно второго или третьего) решетка пригодна для исследования излучения, занимающего

широкий спектральный интервал<sup>7</sup>, В этом состоит главное преимущество дифракционных решеток перед интерференционными спектральными приборами, например, интерферометром Фабри-Перо (см. следующий параграф).

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R_\lambda = \lambda/\delta\lambda \quad (12.58)$$

определяется как отношение длины световой волны к минимальной разности длин волн  $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ , которые могут быть разрешены прибором.

Физическим фактором, ограничивающим разрешающую способность дифракционной решетки, является конечная угловая ширина дифракционного максимума. Фрагмент углового распределения интенсивности  $m$ -го максимума для длины волны  $\lambda$  представлен на рис. 12.43. Ширину этого контура на половине высоты, обозначенную  $\epsilon$ , можно принять равной

$$\epsilon = \lambda/Nd. \quad (12.59)$$

Это не точное равенство, вычисление дает приближенное значение  $(2,65/\pi)\lambda/Nd$ . При оценке разрешающей способности данное различие несущественно и допустимо использовать равенство (12.59).

Если контуры максимумов  $m$ -го порядка для волн  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$  по координате  $\sin \alpha_p$  раздвинуть на величину  $\epsilon$ , как изображено на рис. 12.44, такие линии еще разрешаются дифракционной решеткой, т. к. контур суммарной интенсивности показывает при этом небольшой провал по середине. Поскольку центры максимумов  $m$ -го порядка для волн  $\lambda_1 = \lambda + \delta\lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda - \delta\lambda$  определяются из соотношения (12.54), для разности  $\sin \alpha_m^{(1)} - \sin \alpha_m^{(2)}$  получаем значение  $m(\lambda_1 - \lambda_2)/d = m\delta\lambda/d$ . Для разрешаемых линий эта величина должна равняться  $\epsilon$  (12.59), т. е.

$$m \frac{\delta\lambda}{d} = \frac{\lambda}{Nd}; \quad \text{отсюда} \quad R_\lambda = \lambda/\delta\lambda = Nm.$$

Таким образом, разрешающая способность дифракционной решетки пропорциональна числу штрихов решетки и тем больше, чем больший порядок спектра рассматривается. Обычно  $m$  принимает значения 1–3, число штрихов достигает  $10^5$  и  $R_\lambda \sim 10^5$ .

<sup>7</sup>Правда, для получения достаточной угловой дисперсии в спектрах низких порядков требуется уменьшить период решетки  $d$ . Поэтому современные решетки для видимой области спектра имеют до 2400 штрихов на 1мм.

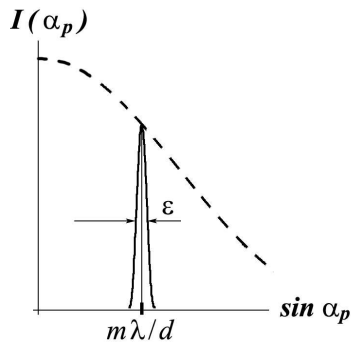


Рис. 12.43

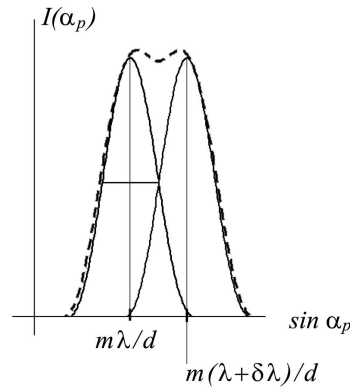


Рис. 12.44

В заключение напомним, что в случае дифракционной решетки интерферирующие когерентные пучки получаются в результате дифракции на регулярно расположенных элементах. Следовательно, здесь мы имеем дело с многолучевой интерферометрией, основанной на *методе деления волнового фронта*, и приведенные выше оценки относятся к спектральным приборам этого класса.

### 12.13. Интерферометр Фабри-Перо

Покажем, что дальнейшее повышение разрешающей способности спектральных приборов достигается при переходе к многолучевой интерферометрии другого типа, основанной на методе *деления амплитуды*. В этом случае интерферирующие когерентные волны получаются в результате многократных отражений от двух параллельных плоских поверхностей, как в рассматриваемом здесь интерферометре Фабри-Перо.

1. Объяснение принципа работы данного прибора начнем с рассмотрения *модельной задачи* определения амплитуды плоской монохроматической волны, прошедшей через слой диэлектрика (стеклянную пластинку) толщины  $h$  с показателем преломления  $n$ . Пусть волна падает под малым углом  $\theta \ll 1$ , ее амплитуда  $E_0$ . Рассматривая процесс многократных отражений внутри слоя, прошедшую волну можно представить в виде суммы плоских волн с амплитудами  $\hat{E}^{(1)}, \hat{E}^{(2)}, \dots$  (рис. 12.45).

Эти амплитуды выражаются через  $E_0$ , амплитудные коэффициенты отражения и прохождения волн на границе слоя и оптическую разность хода  $\Delta$  между последующими волнами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(1)} &= E_0 \tau \tau' e^{iknh / \cos \theta'}, \\ \hat{E}^{(2)} &= \hat{E}^{(1)} \rho^2 e^{ik\Delta}, \\ \hat{E}^{(3)} &= \hat{E}^{(2)} \rho^2 e^{ik\Delta}\end{aligned}$$

(все последующие амплитуды выражаются через предыдущие регулярным образом в виде  $\hat{E}^{(j+1)} = \hat{E}^{(j)} \rho^2 e^{ik\Delta}$ ). Так как все отражения проис-

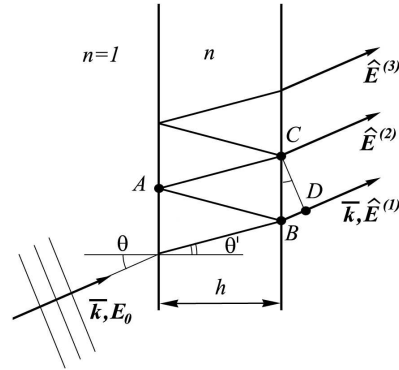


Рис. 12.45

ходят здесь на переходе «стекло-воздух», в формулах фигурирует один коэффициент отражения, равный<sup>8</sup>

$$\rho = \frac{n-1}{n+1}.$$

Амплитудные коэффициенты прохождения для перехода «воздух-стекло» и обратно выражаются формулами

$$\tau = \frac{2}{n+1}, \quad \tau' = \frac{2n}{n+1},$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют соотношению

$$\tau \tau' = 1 - \rho^2. \quad (12.60)$$

<sup>8</sup>Приводимые здесь формулы для  $\rho, \tau, \tau'$ , следующие из формул Френеля, справедливы для малых углов падения.

Оптическая разность хода между последующими волнами, равная, как видно из рис. 12.45,

$$\Delta = n(AB + AC) - BD = \frac{2nh}{\cos \theta'} - 2h \frac{\sin \theta'}{\cos \theta'} \sin \theta,$$

принимает значение

$$\Delta = 2hn \cos \theta'.$$

Таким образом, амплитуда прошедшей волны, которую можно представить в виде суммы членов бесконечной геометрической прогрессии

$$\hat{E}(\theta) = E_0 \tau \tau' [1 + \rho^2 e^{ik\Delta} + (\rho^2 e^{ik\Delta})^2 + \dots] e^{iknh / \cos \theta'},$$

при учете  $\rho^2 < 1$  сводится к выражению

$$\hat{E}(\theta) = E_0 \tau \tau' \frac{1}{1 - \rho^2 e^{ik\Delta(\theta)}}$$

(несущественный фазовый множитель  $\exp(iknh / \cos \theta')$  опускается). Воспользовавшись соотношением (12.60) и заменой  $R = \rho^2$  ( $R$  — энергетический коэффициент отражения), последнюю формулу запишем в виде

$$\hat{E}(\theta) = E_0 \frac{1 - R}{1 - R e^{ik\Delta(\theta)}}.$$

Отсюда для интенсивности  $I(\theta) = |\hat{E}(\theta)|^2$  получаем результат

$$I(\theta) = I_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos k\Delta},$$

что с учетом  $\cos k\Delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{k\Delta(\theta)}{2}$  приводится к виду

$$I(\theta) = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{k\Delta(\theta)}{2}} \quad (12.61)$$

(формула Эйри). Следовательно, максимальная интенсивность  $I_{max} = I_0$  имеет место при  $k\Delta = 2\pi m$  ( $m$  — целое), т. е. когда оптическая разность хода, как и в дифракционной решетке, кратна длине волны. В данном случае это условие выражается соотношением

$$2hn \cos \theta' = m\lambda. \quad (12.62)$$

В приведенном выводе формулы (12.61) учитывалась разница в коэффициентах  $\tau, \tau'$ , удовлетворяющих соотношению (12.60). В интерферометре Фабри-Перо для увеличения коэффициента отражения  $R$  границы слоя покрываются многослойными диэлектрическими зеркалами. При этом различие между  $\tau, \tau'$ , исчезает, но соотношение (12.60) в виде

$$\tau^2 = 1 - \rho^2 = 1 - R$$

сохраняется. Следовательно, полученная здесь формула (12.61) справедлива и в рассматриваемом случае, т. е. справедлива при всех значениях  $0 \leq R < 1$ .

Зависимость  $I(k\Delta)$  для нескольких значений коэффициента отражения в пределах  $0 < R < 1$  представлена на рис. 12.46.

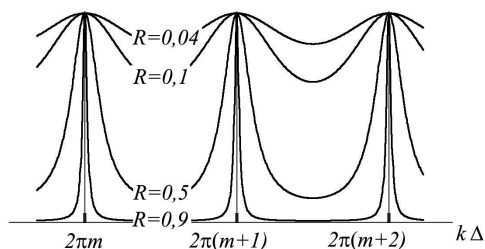


Рис. 12.46

Видно, что при изменении  $R$  от 0 до 1 характер этой зависимости претерпевает качественное изменение. При  $R \ll 1$  для нее справедливо приближение

$$I = I_0(1 - 4R \sin^2 k\Delta/2),$$

в точности совпадающее с результатом интерференции двух первых волн  $\hat{E}^{(1)}, \hat{E}^{(2)}$  с сильно различающимися амплитудами, и соответствующая кривая напоминает этот случай. Если  $1 - R \ll 1$ , распределение интенсивности приобретает принципиально иной вид с резкими максимумами при  $k\Delta = 2\pi m$ . Для небольших отклонений от этого значения, т. е. при  $k\Delta = 2\pi m + \delta$ ,  $\sin^2 k\Delta/2 = \sin^2 \delta/2 = (\delta/2)^2$ , и формула Эйри (12.61) приобретает вид

$$I = I_0 \frac{1}{1 + \frac{R}{(1-R)^2} \delta^2};$$

следовательно, распределение  $I(k\Delta)$  вблизи максимума имеет лоренцеву форму. Острота этого максимума характеризуется шириной контура интенсивности на половине его высоты, на рис. 12.47 обозначенной  $\epsilon$ .



Как видно из последней формулы,

$$\epsilon = 2(1 - R)/\sqrt{R}, \quad (12.63)$$

и при  $R \rightarrow 1$  ширина контура интенсивности стремится к нулю.

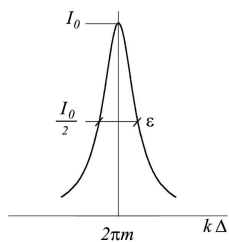


Рис. 12.47

2. Рассмотренный плоский слой с зеркальными границами и установленные на пути прошедшей волны объектив с экраном в фокальной плоскости составляют принципиальную основу интерферометра Фабри-Перо.

Если на него направить плоскую монохроматическую волну, то на экране может возникнуть ничем не примечательное дифракционное пятно (рис. 12.48) с угловым размером  $\lambda/D$  ( $D$  — диаметр объектива). Освещенность пятна пропорциональна интенсивности прошедшей волны (12.61), зависящей от параметра  $k\Delta$ ; следовательно, видимое пятно будет существовать только на очень узком интервале этого параметра.

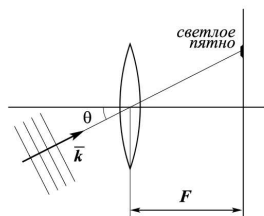


Рис. 12.48

Осветим интерферометр слаборасходящимся пучком монохроматического света (рис. 12.49). Этот пучок представляет собой набор плоских монохроматических волн, волновые вектора которых занимают небольшой интервал углов  $\theta$ , но лежат во всех радиальных плоскостях, проходящих через ось симметрии. Поэтому в фокальной плоскости объектива

теперь будем иметь не точки, а светлые кольца, похожие на кольца Ньютона, но это — линии равного наклона. Их угловые размеры и порядки интерференции определяются из условия (12.62), которое с заменой

$$\cos \theta' = 1 - \frac{1}{2} \theta'^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n^2}$$

перепишем в виде

$$\frac{2hn}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n^2}\right) = \text{целому числу } m. \quad (12.64)$$

Это целое число не может быть больше целой части  $2hn/\lambda$ , которая определяет порядок интерференции для первого кольца

$$m_1 = [2hn/\lambda], \quad \text{причем } m_1 \gg 1. \quad (12.65)$$

Для каждого последующего кольца число  $m$  на единицу меньше, и для кольца с номером  $p$

$$m_p = m_1 - (p - 1).$$

Соответствующий угловой размер кольца  $\theta_p$  определяется из условия (12.64)

$$\frac{2hn}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\theta_p^2}{n^2}\right) = \left[\frac{2hn}{\lambda}\right] - (p - 1),$$

откуда

$$\theta_p = \sqrt{\frac{\lambda n}{h}} \sqrt{\left(\frac{2hn}{\lambda} - \left[\frac{2hn}{\lambda}\right]\right) + p - 1}.$$

Предположим теперь, что на интерферометр падает некогерентное излучение, например, пара световых волн с длинами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда каждая из этих волн даст свою систему интерференционных колец. При фиксированном значении числа  $m$  (например,  $m_1$ ) направления на интерференционные максимумы для разных спектральных компонент будут различными, т. е. интерферометр будет осуществлять пространственное разложение спектра.

Из условия (12.62) следует, что свободная область дисперсии  $\Delta\lambda$  интерферометра Фабри-Перо, как и для дифракционной решетки, определяется формулой (12.57). Но теперь порядок интерференции удовлетворяет условию (12.65), и свободная область дисперсии

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{\lambda}{2hn}$$

несравнимо мала по сравнению с соответствующей величиной для дифракционной решетки. Поэтому обычно на входе в интерферометр свет монохроматизируют при помощи более грубого спектрального прибора (или используют лазер; см. рис. 12.49).

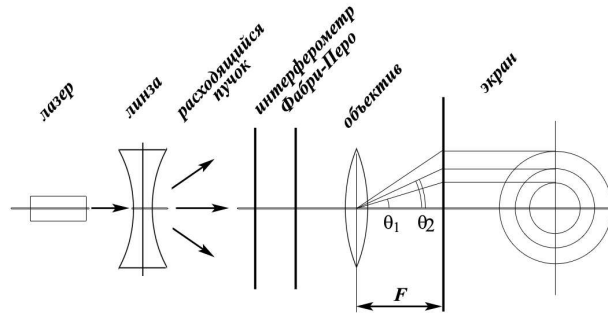


Рис. 12.49

Имея большой порядок интерференции в главном максимуме, интерферометр Фабри-Перо обладает большой разрешающей способностью. Действительно, поскольку резкость интерференционных полос на экране в фокальной плоскости объектива определяется резкостью полос распределения интенсивности (12.61) перед объективом<sup>9</sup>, определяемую величиной  $\epsilon$  (12.63), волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = \lambda + \delta\lambda$  разрешимы, если соответствующие  $k_1\Delta$ ,  $k_2\Delta$  отстоят друг от друга на расстоянии  $\epsilon$ , т. е.

$$2\pi \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} \Delta = \epsilon = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

Отсюда для  $R_\lambda$  получаем

$$R_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi \frac{2hn}{\lambda} \frac{\sqrt{R}}{1-R}.$$

В качестве примера рассмотрим интерферометр Фабри-Перо с параметрами  $2hn = 5\text{см}$  и  $R = 0,9$ . Тогда для длины волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}\text{см}$  получим  $m_1 = \Delta/\lambda = 10^5$ ,  $\Delta\lambda = \lambda/m_1 = 0,05 \text{ \AA}$ ,  $R_\lambda = 3 \cdot 10^6$ . Эти цифры показывают, что интерферометр Фабри-Перо действительно обладает

<sup>9</sup>Иначе говоря, дифракционное расплывание после прохождения объектива мало и не влияет на резкость интерференционных полос на экране.

весьма высокой разрешающей способностью, но, как уже подчеркивалось, имеет очень узкую свободную область дисперсии. На практике интерферометр Фабри-Перо часто используют в комбинации с дифракционным спектрометром, что позволяет проводить спектральные измерения с высоким разрешением в широком диапазоне длин волн.

## Глава 13

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В предыдущих главах исследовались свойства электромагнитных волн, причем, в основном, без обсуждения вопросов, связанных с их происхождением. Теперь, обратившись к источникам в виде токов и зарядов, продемонстрируем порождение электромагнитных волн. При этом мы получим возможность проследить, как по мере удаления от источника квазистационарные поля источника переходят в волновые поля, подтвердив, тем самым, условия применимости квазистационарного приближения из § 6.5.

### 13.1. Волновое уравнение для скалярного и векторного потенциалов

Для вакуума система уравнений Максвелла при наличии токов и зарядов имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (13.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (13.2)$$

Первая пара однородных уравнений (13.1) тождественно (см. § 6.3) удовлетворяется введением векторного и скалярного потенциалов

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad (13.3)$$

причем поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}f(\mathbf{r}, t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

(где  $f(\mathbf{r}, t)$  — произвольная скалярная функция своих аргументов). Вследствие этого потенциалы  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  допускают наложение дополнительного требования в виде скалярного уравнения (условия калибровки). Рациональный выбор этого условия существенно упрощает получающиеся уравнения для потенциалов. Так, при использовании калибровки Лоренца

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad (13.4)$$

вторая пара уравнений Максвелла (13.2) после подстановки выражений (13.3) сводится просто к системе двух независимых неоднородных волновых уравнений

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (13.5)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t). \quad (13.6)$$

Таким образом, уравнения (13.5), (13.6) совместно с (13.4) образуют систему уравнений, полностью эквивалентную уравнениям Максвелла. Следовательно, поля, возбуждаемые токами и зарядами, в общем случае могут быть выражены через скалярный и векторный потенциалы, определяемые из уравнений (13.5), (13.6).

## 13.2. Запаздывающие потенциалы

Обратимся к построению решений уравнений (13.5), (13.6) для безграничного пространства, считая, что токи и заряды, входящие в правые части уравнений, занимают ограниченную область пространства.

Заметим, что в предельном случае стационарных полей (стационарных токов и зарядов) рассматриваемые уравнения сводятся к соответствующим уравнениям электростатики (1.13) и магнитостатики (4.16)

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

и при заданных функциях  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  имеют решения (1.15), (4.11):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')},$$

где  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

Оказывается, что для общего случая функций  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , зависящих от времени, решения уравнений (13.5), (13.6) имеют аналогичную структуру

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{c}\right) dV', \quad (13.7)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{c}\right) dV' \quad (13.8)$$

с тем существенным отличием, что токи и заряды элемента объема  $dV'$  в точке наблюдения  $\mathbf{r}$  сказываются с некоторым запаздыванием по времени, равным времени прохождения световым сигналом расстояния  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . (Важно обратить особое внимание на то, что названное время запаздывания при заданном  $\mathbf{r}$  зависит от переменной интегрирования.) Поэтому выражения (13.7), (13.8) называются запаздывающими потенциалами.

Перейдем к доказательству этих соотношений, начав с последнего. Для этого все пространство мысленно разобьем на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений полное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Рассмотрим заряд  $de(t)$ , находящийся в элементе  $dV'$  с радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ . Поместив начало вспомогательной системы координат в эту точку, можем записать распределение плотности заряда в виде

$$\rho(\mathbf{R}, t) = de(t)\delta(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.$$

Тогда уравнение для скалярного потенциала от этого заряда имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{R}).$$

Везде, кроме начала координат,  $\delta(\mathbf{R}) = 0$ , поэтому

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0.$$

Очевидно, что  $\varphi$  обладает центральной симметрией, т. е. является функцией  $\varphi(R, t)$  только радиальной пространственной координаты и времени. Следовательно, уравнение имеет вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

(здесь привычный радиальный оператор в лапласиане заменен на тождественный ему оператор со второй производной). Отсюда видно, что для новой искомой функции

$$\chi(R, t) = R\varphi(R, t)$$

уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

одномерного волнового уравнения (7.9) с общим решением

$$\chi(R, t) = f_1(R - ct) + f_2(R + ct),$$

где  $f_1, f_2$  — произвольные функции. Они описывают волны, бегущие от центра (решение  $f_1$ ) и волны, бегущие к центру ( $f_2$ ). Из принципа причинности понятно, что для интересующих нас волн, порожденных зарядом  $de(t)$ , должно быть  $f_2 \equiv 0$ . Следовательно, везде, кроме начала координат, искомый потенциал имеет решение

$$\varphi(R, t) = \frac{\chi(t - R/c)}{R}, \quad (13.9)$$

где  $\chi(t)$  — пока произвольная функция. Ее необходимо выбрать так, чтобы последнее соотношение описывало решение также и в начале координат. Для этого заметим, что при  $R \rightarrow 0$  потенциал должен стремиться к кулоновскому потенциалу от точечного заряда  $de(t)$ , т. е. при  $R \rightarrow 0$  решение должно иметь вид  $de(t)/R^1$ . Следовательно,  $\chi(t) = de(t)$ , и соотношение (13.9) принимает вид

$$\varphi(R, t) = \frac{de(t - R/c)}{R}.$$

<sup>1</sup>Строгие рассуждения по этому поводу см Ландау-Лифшиц «Теория поля», § 62.



Отсюда с учетом  $de(t) = \rho(\mathbf{r}', t)dV'$  решение (13.8) для скалярного потенциала получается как результат интегрирования по всем элементарным зарядам.

Процесс получения решения (13.7) для вектор-потенциала полностью аналогичен.

### 13.3. Мультипольное разложение для запаздывающих потенциалов

1. Аналогично тому, как мы поступали в электростатике и магнитостатике, решениями (13.7), (13.8) можно воспользоваться для вычисления потенциалов на больших расстояниях от системы движущихся зарядов, занимающих ограниченную область пространства. Ограничимся векторным потенциалом и поставим задачу выразить  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  через изменяющиеся во времени дипольные и квадрупольные моменты системы. Для этого расстояние  $R$  и множитель  $1/R$ , входящие в подынтегральное выражение (13.7), примем в виде разложений

$$R = r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'), \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} \quad (\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}) \quad (13.10)$$

с удержанием первых малых добавок, пропорциональных малому параметру  $a/r$  ( $a$  — характерный размер системы). Второй множитель с введением некоторого единого для всех элементарных объемчиков  $dV'$  характерного момента времени

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad (13.11)$$

перепишем в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}). \quad (13.12)$$

Примем важное *допущение*, что характерное время  $T$  изменения плотности тока  $\mathbf{j}$  в системе существенно превышает величину  $a/c$  времени, необходимого световому сигналу для прохождения расстояний порядка размеров системы, т. е.

$$\frac{a}{cT} \ll 1 \quad (\frac{a}{\lambda} \ll 1). \quad (13.13)$$

Тогда функцию (13.12), рассматривая ее как функцию времени, разложим в ряд Тейлора относительно точки  $t'$  и с удержанием первой малой добавки представим в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c}. \quad (13.14)$$

Подставив разложения (13.10), (13.14) в интеграл (13.7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \left\{ \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' + \frac{1}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' \right\}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Теперь под интегралы плотность тока входит в виде функции  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ , где  $t'$  (13.11) не зависит от переменной  $\mathbf{r}'$ . В этом состоит основное упрощение, достигнутое благодаря условию (13.13), позволившему переход от интеграла (13.7) к результату (13.15). Здесь первое слагаемое представляет собой главный член разложения, а второе и третье — малые добавки, пропорциональные параметрам  $a/r \ll 1$  и  $a/\lambda \ll 1$  соответственно.

**2.** Вспомним, что в магнитостатике первый из интегралов (13.15) тождественно равен нулю, а интеграл, входящий во второе и третье слагаемые, выражается через магнитный момент системы (см. § 4.8). В случае переменных полей подход, использованный в главе 4 и основанный на условии  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ , непригоден. Поэтому для определения смысла рассматриваемых интегралов мысленно обратимся ко всем  $N$  точечным зарядам, составляющим рассматриваемую систему. Объемную плотность тока, создаваемую одним движущимся зарядом  $e_i$ , радиус-вектор которого меняется по закону  $\mathbf{r}_i(t')$ , представим в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = e_i \mathbf{v}_i \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t')] \quad (\mathbf{v}_i(t') = d\mathbf{r}_i(t')/dt'). \quad (13.16)$$

Тогда  $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' = e_i \mathbf{v}_i(t')$ , а интересующий нас первый из интегралов (13.15) сводится к сумме, равной скорости изменения дипольного момента системы в момент времени  $t'$

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t') = \frac{d}{dt'} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i(t') = \dot{\mathbf{d}}(t').$$

Таким образом,

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' = \dot{\mathbf{d}}(t'). \quad (13.17)$$

Второй из интегралов (13.15) после подстановки (13.16) дает

$$\frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'(t')). \quad (13.18)$$

Сумму в полученном соотношении можно выразить через магнитный и квадрупольный моменты системы, проделав для этого несколько искусственных преобразований произведения  $\mathbf{v}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')$ . Во-первых, перепишем его в виде

$$\mathbf{v}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t')) = \frac{d}{dt'} [\mathbf{r}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t'))] - \mathbf{r}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i(t')). \quad (a)$$

Во-вторых, рассматриваемую величину разобьем на две равные половинки, одну из которых возьмем в виде (a):

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} [\mathbf{r}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i)] - \frac{1}{2} \mathbf{r}_i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i).$$

Далее заметим, что подчеркнутые слагаемые объединяются в тройное векторное произведение, и в качестве окончательного выражения для рассматриваемой величины примем

$$\mathbf{v}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t')) = \left[ \frac{1}{2} [\mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t')] \times \mathbf{n} \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} [\mathbf{r}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t'))]. \quad (б)$$

И, наконец, после подстановки выражения (a) интеграл (13.18) примет значение

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' &= \left[ \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N e_i [\mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t')] \times \mathbf{n} \right] + \\ &+ \frac{1}{2c} \frac{d}{dt'} \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i(t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i(t')). \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое есть  $[\mathbf{m} \times \mathbf{n}]$ , а второе можно представить в виде  $(1/2c)\dot{\mathbf{Q}}(t')$ , где  $\mathbf{Q}$  есть вектор, определяемый соотношением

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta, \quad Q_{\alpha\beta} = \sum e x_\alpha x_\beta - \text{тензор квадрупольных моментов.}$$

Итак,

$$\frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') dV' = [\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}] + \frac{1}{2c} \dot{\mathbf{Q}}(t'),$$

а вектор-потенциал (13.15), составленный из трех членов разложения, соответствующих дипольному, магнитно-дипольному и квадрупольному моментам системы зарядов, имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cr} + \left( \frac{[\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}]}{r^2} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}(t') \times \mathbf{n}]}{cr} \right) + \frac{1}{2c} \left( \frac{\dot{\mathbf{Q}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t')}{cr} \right). \quad (13.19)$$

**3.** Обратим внимание, что магнитно-дипольный и квадрупольный члены разложения потенциала каждый состоит из двух слагаемых. *Только в виде соответствующих сумм они удовлетворяют однородному волновому уравнению (уравнению (13.5) при  $\mathbf{j} = 0$ ) и пригодны для вычисления полей во всем пространстве  $r \gg a$ .*<sup>2</sup> Обычно используемые разложения с удержанием только последних слагаемых в каждой сумме такую задачу не решают. Они применимы для определения полей вдали от источника и вычисления угловой и полной интенсивности излучения, поскольку неучитываемые слагаемые с расстоянием спадают как  $1/r^2$  и на характеристики излучения влияния не оказывают.

**4.** В приведенную формулу квадрупольный момент системы входит через вектор  $\mathbf{Q}$ , связанный с тензором  $Q_{\alpha\beta}$ . Обычно в качестве тензора квадрупольных моментов используют

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) = 3Q_{\alpha\beta} - \sum e r^2 \delta_{\alpha\beta}$$

(см. § 1.12). Поэтому в формулах (13.19) вместо  $\mathbf{Q}$  также введем новый вектор  $\mathbf{D}$  ( $D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta$ ), связанный с  $\mathbf{Q}$  соотношением

$$\mathbf{D}(t') = 3\mathbf{Q}(t') - \sum_{i=1}^N e_i r_i^2(t') \mathbf{n},$$

и тогда квадрупольный член в выражении  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  превратится в

$$\frac{1}{6c} \left( \frac{\dot{\mathbf{D}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t')}{cr} \right).$$

<sup>2</sup>Замечание о справедливости данного утверждения приведено в § 14.2.

Заметим, что в отличие от векторов  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{m}$ , характеризующих рассматриваемую систему зарядов и зависящих только от времени, вектор  $\mathbf{D}$  (как и  $\mathbf{Q}$ ) зависит также от направления  $\mathbf{n}$  на точку наблюдения и фактически является векторным полем  $\mathbf{D}(\mathbf{n}, t)$ . Но, следуя традиции, в приведенных формулах и ниже этот факт не выделяется, и, чтобы придать всем слагаемым в формулах (13.19), (13.20) единообразие, вместо  $\mathbf{Q}(\mathbf{n}, t')$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{n}, t')$  выписываются «укороченные» символы  $\dot{\mathbf{Q}}(t')$ ,  $\dot{\mathbf{D}}(t')$ . Понятно, что при этом верхние точки над символами следует понимать как частные производные по времени.

При переходе к вектору  $\mathbf{D}$  мы внесли в вектор-потенциал искусственную векторную добавку, имеющую структуру

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \left[ \frac{f(t')}{r^2} + \frac{\dot{f}(t')}{cr} \right],$$

где  $f(t')$  — произвольная функция. Такая операция влияние на поля не оказывает, поскольку ротор этой добавки тождественно равен нулю. Кроме того, она удовлетворяет однородному волновому уравнению.

Таким образом, искомое выражение для мультипольного разложения вектор-потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t')}{cr} + \left( \frac{[\mathbf{m}(t') \times \mathbf{n}]}{r^2} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}(t') \times \mathbf{n}]}{cr} \right) + \frac{1}{6c} \left( \frac{\dot{\mathbf{D}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t')}{cr} \right). \quad (13.20)$$

Для скалярного потенциала к подобному разложению обычно не прибегают. По найденному  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , при необходимости, функцию  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  проще всего определить непосредственно из условия калибровки (13.4).

В заключение подчеркнем еще раз, что для справедливости приведенного разложения, кроме условия  $a/r \ll 1$ , необходимо выполнение главного требования (13.13). Его можно записать и в другом виде, заметив, что  $T \sim a/v$ , если  $v$  есть порядок величины скорости зарядов. Из условия (13.13) тогда получаем, что

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (13.21)$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

### 13.4. Примеры электромагнитных полей от гармонических источников

Воспользуемся мультипольным разложением (13.20), чтобы найти распределения электромагнитного поля в пространстве от двух простейших систем зарядов, гармонически изменяющихся во времени.

**1. Поле гармонического осциллятора.** Рассматривается система, обладающая дипольным моментом с неизменным направлением<sup>3</sup>

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t},$$

для которой вектор-потенциал имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\omega}{cr} \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t} = -ik \mathbf{d}_0 \frac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)}.$$

Отсюда для магнитного поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}\mathbf{A} = -ik \left[ \text{grad}\left(\frac{1}{r} e^{ikr}\right) \times \mathbf{d}_0 \right] e^{-i\omega t}$$

после дифференцирования получается выражение, которое в сферической системе координат  $(r, \theta, \alpha)$ , привязанной к вектору  $\mathbf{d}_0$  (рис. 13.1), имеет вид

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = -k^3 d_0 \frac{1}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \sin \theta e^{i(kr-\omega t)} \mathbf{e}_\alpha. \quad (13.22)$$

То есть магнитное поле осесимметрично и имеет только азимутальную  $\alpha$ -составляющую. Электрическое поле, определяемое из уравнения  $\text{rot}\hat{\mathbf{B}} = (-i\omega/c)\hat{\mathbf{E}}$ , для рассматриваемого примера также выпишем:

$$\begin{aligned} E_r &= -k^3 d_0 \frac{2}{k^2 r^2} \left(i - \frac{1}{kr}\right) \cos \theta e^{i(kr-\omega t)}, \\ E_\theta &= -k^3 d_0 \frac{1}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2}\right) \sin \theta e^{i(kr-\omega t)}, \\ E_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (13.23)$$

<sup>3</sup>Поля произвольных гармонических диполей  $\hat{\mathbf{d}}e^{-i\omega t}$ ,  $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$  получены в § 13.6.

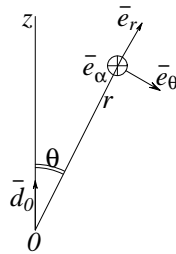


Рис. 13.1

(Другой способ определения поля  $\mathbf{E}$  — через векторный и скалярный потенциалы — указан ниже в упражнении для самостоятельного выполнения.)

Здесь мы впервые получили возможность проследить за изменением характера электромагнитного поля по мере удаления от его источника. В частности, теперь есть возможность убедиться в справедливости данного в § 6.5 полуинтуитивного определения зоны применимости квазистационарного приближения как области вокруг источника, размеры которой намного меньше длины волны. Действительно, при  $kr \ll 1$  (т. е.  $r \ll \lambda$ ) слагаемыми  $1/kr$ ,  $1/k^2r^2$  в формулах (13.23) можно пренебречь по сравнению с  $1/k^3r^3$  и полагать  $\exp(ikr) \approx 1$ . В результате поле  $\mathbf{E}$  приобретает вид

$$\mathbf{E} = (d_0/r^3)(2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) e^{-i\omega t},$$

совпадающий с

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_0)\mathbf{n} - \mathbf{d}_0}{r^3} e^{-i\omega t},$$

в каждый момент времени соответствующий статическому электрическому полю от диполя  $\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}$ . Магнитное поле (13.22) в этом приближении отсутствует.

На расстояниях  $r \gg \lambda$ ,  $kr \gg 1$  (как говорят, в *волновой зоне*), членами  $1/k^2r^2$ ,  $1/k^3r^3$  в формулах (13.22), (13.23) можно пренебречь и получить поля

$$B_\alpha = -\frac{k^2 d_0}{r} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)},$$

$$E_\theta = -\frac{k^2 d_0}{r} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)},$$

локально (в малых областях пространства) представляющие линейно поляризованную плоскую монохроматическую волну, бегущую в радиальном направлении, с плоскостью поляризации, совпадающей с меридианальной плоскостью.

В области  $r \sim \lambda$ ,  $kr \sim 1$  (так называемая *ближняя зона*) электромагнитное поле имеет промежуточный характер. Здесь, кроме  $E_\theta, B_\alpha$ , сохраняется еще продольная  $r$ -компонента электрического поля, не свойственная волне, бегущей в радиальном направлении.

*Упражнение.* Определив скалярный потенциал из условия калибровки (13.4) для гармонического процесса

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{A}} - ik \hat{\varphi} = 0,$$

выразить поле  $\mathbf{E}$  через потенциалы и убедиться в справедливости формул (13.23).

**2. Поле осесимметричного гармонического квадруполья.** Тензор квадрупольных моментов  $D_{\alpha,\beta}$  осесимметричной системы имеет отличные от нуля только диагональные члены, которые запишем в виде

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = D_0 e^{-i\omega t}, \quad D_{33}(t) = -2D_0 e^{-i\omega t}.$$

Тогда для вектора  $\mathbf{D}$  ( $D_\alpha = D_{\alpha,\beta} n_\beta$ ), входящего в квадрупольный потенциал, получается результат

$$\mathbf{D} = D_{11} n_x \mathbf{e}_x + D_{22} n_y \mathbf{e}_y + D_{33} n_z \mathbf{e}_z = D_0 (\mathbf{n} - 3 \cos \theta \mathbf{e}_z) e^{-i\omega t},$$

содержащий явную зависимость от координаты  $\theta$  точки наблюдения. А соответствующий вектор-потенциал будет

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{D_0}{6c} \left( -\frac{i\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{cr} \right) (\mathbf{n} - 3 \cos \theta \mathbf{e}_z) e^{i(kr - \omega t)}.$$

При вычислении  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  слагаемое  $\mathbf{n}$  в последней скобке выпадает, и

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{3D_0}{6c} \operatorname{rot} \left[ \left( \frac{i\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{cr} \right) e^{ikr} \cos \theta \mathbf{e}_z \right] e^{-i\omega t} = \\ &= \frac{3D_0}{6c} \left[ \operatorname{grad} \left( \left( \frac{i\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{cr} \right) e^{ikr} \cos \theta \right) \times \mathbf{e}_z \right] e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

после дифференцирования приобретает окончательный вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \frac{k^4 D_0}{6} \frac{1}{kr} \left( 1 + \frac{3i}{kr} - \frac{3}{k^2 r^2} \right) (-3 \sin \theta \cos \theta) e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\alpha. \quad (13.24)$$



Общее выражение для поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  от рассматриваемого квадруполья здесь не приводится. Поля в волновой зоне очевидны и равны

$$B_\alpha(r, \theta, t) = E_\theta(r, \theta, t) = -i \frac{k^3 D_0}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

### 13.5. Дипольное излучение

Воспользуемся разложением вектор-потенциала (13.20) для исследования поля, создаваемого системой движущихся зарядов, на больших расстояниях. Как уже отмечалось, система обладает двумя характерными размерами. Один из них  $a$  определяет протяженность системы, а другой есть характерная длина  $\lambda$  излучаемой электромагнитной волны, причем разложение (13.15) справедливо при выполнении условия (13.13)  $a \ll \lambda$ .

На область наблюдения пока наложено единственное ограничение: расстояние от системы до точки наблюдения должно удовлетворять условию

$$r \gg a. \quad (13.25)$$

Что касается соотношения между  $r$  и  $\lambda$ , то оно произвольно:  $r$  может быть не только больше, но и меньше  $\lambda$ , лишь бы выполнялось условие (13.25). При этом область наблюдений, удовлетворяющая условию  $r \ll \lambda$ , является областью квазистационарности, в которой явления запаздывания несущественны. Если расстояния удовлетворяют условию  $r \leq \lambda$ , область рассматривается как ближняя зона. Здесь явление запаздывания уже проявляется в полной мере, но и характерные черты квазистационарного поля еще сохраняются. Только в далекой области, когда расстояния  $r$  велики по сравнению с длиной волны, т. е.

$$r \gg \lambda \quad (13.26)$$

(волновая зона), поле излучения сформировано и в малой окрестности любой точки наблюдения представляет собой плоскую электромагнитную волну, уходящую от источника. В плоской волне поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  взаимно перпендикулярны и связаны между собой соотношением  $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$ . Поскольку  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ , то для полного определения электромагнитного поля в волновой зоне достаточно знания векторного потенциала.

Начнем с главного, дипольного, члена разложения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (1/cr) \dot{\mathbf{d}}(t - r/c).$$

Для вычисления ротора этого векторного поля, заданного в виде произведения  $(1/cr)$  на векторную функцию от аргумента  $t' = t - r/c$ , требуется промежуточный результат

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{d}}(t - r/c) = [\operatorname{grad}(t - r/c) \times \ddot{\mathbf{d}}(t - r/c)] = -(1/c)[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(t - r/c)].$$

С его помощью получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\dot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}]}{c r^2}. \quad (13.27)$$

Имеем, что на расстояниях  $r \gg a$  поле  $\mathbf{B}$ , всюду перпендикулярное вектору  $\mathbf{n}$ , состоит из двух слагаемых. Первое, спадающее с расстоянием как  $1/r$ , обеспечивает, как показано ниже, отличный от нуля поток энергии электромагнитного поля на бесконечности, т. е. создает излучение. Вторым слагаемым, затухающим  $\sim 1/r^2$ , на больших расстояниях можно пренебречь, а на расстоянии  $r \sim \lambda$  (ближняя зона) они одинаковы по порядку величины.

Действительно, поскольку  $\ddot{d} \sim \dot{d}/T$ , то

$$B_1 = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sim \frac{\dot{d}}{c r c T}, \quad B_2 \sim \frac{\dot{d}}{c r^2}$$

и для их отношения справедлива оценка

$$\frac{B_1}{B_2} \sim \frac{r}{\lambda}.$$

Следовательно, на расстояниях  $r \gg \lambda$  (волновая зона) имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}], \quad (13.28)$$

т. е. поля излучения полностью определяются второй производной дипольного момента системы. Заметим, что все формулы подобной структуры определяют поле излучения в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  через характеристики излучающей системы в момент  $t'$ . Время  $t'$  можно назвать временем излучения, а  $t$  — соответствующим временем приема этого излучения на расстоянии  $r$  от источника, причем  $t = t' + r/c$ .

Излучаемая системой электромагнитная волна уносит с собой определенную энергию. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга, равным

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} B^2 \mathbf{n},$$

а интенсивность излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  (см. рис. 13.2, где затененный ромбик схематически представляет излучающую систему), т. е. поток энергии, переносимой через элемент поверхности  $ds = r^2 d\Omega$  за единицу времени,

$$dJ = S ds = \frac{c}{4\pi} B^2 r^2 d\Omega. \quad (13.29)$$

Так как поле  $\mathbf{B}$  (13.28) при фиксированном значении  $t'$  меняется как  $1/r$ , отсюда следует, что поток энергии через площадку, опирающуюся на элемент телесного угла  $d\Omega$ , в каждый соответствующий момент  $t = t' + r/c$  не зависит от  $r$ . Следовательно, *угловое распределение интенсивности дипольного излучения* определяется выражением

$$dJ|_t = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}(t') \times \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2(t')}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (13.30)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\ddot{\mathbf{d}}(t')$  и  $\mathbf{n}$ . То есть распределение излучения по направлениям осесимметрично относительно направления вектора  $\ddot{\mathbf{d}}(t')$ , задается множителем  $\sin^2 \theta$  и визуально характеризуется *диаграммой направленности*, (рис. 13.3). Заметим, что излучение максимально в плоскости, перпендикулярной вектору  $\ddot{\mathbf{d}}(t')$ , а в направлении этого вектора равно нулю.

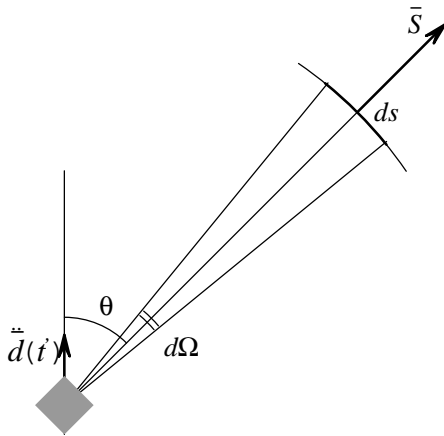


Рис. 13.2

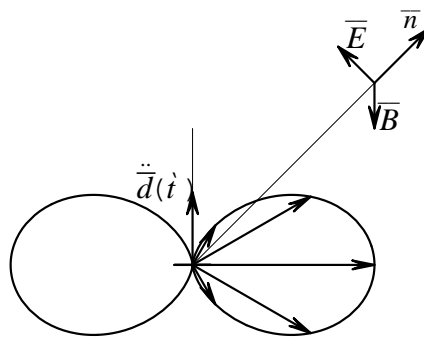


Рис. 13.3

Полная интенсивность дипольного излучения

$$J|_t = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2(t')}{c^3} \quad (13.31)$$

получается в результате интегрирования углового распределения (13.30) по всем телесным углам

$$J = \int dJ = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2(t')}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Если излучающей системой является единственный точечный заряд, движущийся во внешнем поле, то  $\mathbf{d}(t') = e\mathbf{r}(t')$ ,  $\ddot{\mathbf{d}}(t') = e\mathbf{w}(t')$ , где  $\mathbf{w}$  — ускорение, и выражение (13.31) принимает вид

$$J|_t = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2(t')}{c^3}. \quad (13.32)$$

Таким образом, полная интенсивность *дипольного излучения заряда* определяется квадратом ускорения.

Заметим, что формулы (13.30), (13.31) характеризуют мгновенные значения интенсивности в момент  $t$ , соответствующий времени излучения  $t'$ . Для системы, меняющейся по гармоническому закону с  $\mathbf{d}(t) = \hat{\mathbf{d}}e^{-i\omega t}$ , интерес представляет результат усреднения по периоду

$$\langle J \rangle = \frac{\omega^4}{3c^3} |\hat{\mathbf{d}}|^2.$$

Угловое распределение в общем случае определяется формулой

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |[\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]|^2$$

и только в случае дипольного момента  $\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}$  с неизменным направлением

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{d_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta$$

описывается множителем  $\sin^2 \theta$ .

Случай вращающегося диполя мы рассмотрим в качестве примера, демонстрирующего другую диаграмму направленности, которая впоследствии нам понадобится для сравнения с направленностью излучения релятивистского заряда на круговой орбите.

**Пример 1. Излучение заряда, движущегося по круговой орбите.** Пусть  $e, a, \Omega$  — величина заряда, радиус орбиты и угловая скорость вращения соответственно (рис. 13.4), причем  $v = a\Omega \ll 1$  удовлетворяет условию (13.21) применимости дипольного приближения. Тогда  $d_x = d_0 \cos \Omega t$ ,  $d_y = d_0 \sin \Omega t$ , т. е.

$$\mathbf{d}(t) = \hat{\mathbf{d}}e^{-i\Omega t}, \quad \ddot{\mathbf{d}}(t) = -\Omega^2 \hat{\mathbf{d}}e^{-i\Omega t}, \quad \hat{\mathbf{d}} = d_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \quad d_0 = ea.$$

По формуле (13.28) имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\Omega t}, \quad \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{\Omega^2}{c^2} [\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \frac{1}{r} e^{i\Omega r/c},$$

а угловая интенсивность (13.29) после усреднения по времени

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})|^2 r^2 = \frac{\Omega^4}{8\pi c^3} |[\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]|^2.$$

Поскольку усредненная интенсивность осесимметрична, в качестве  $\mathbf{n}$  можно взять единичный вектор вдоль любого луча, исходящего из начала координат и составляющего угол  $\theta$  с осью  $z$ . Выберем, для определенности, луч, лежащий в плоскости  $xz$ , для которого  $\mathbf{n} = \sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z$ . Тогда

$$[\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] = d_0(i \cos \theta \mathbf{e}_x - \cos \theta \mathbf{e}_y - i \sin \theta \mathbf{e}_z), \quad |[\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]|^2 = d_0^2 (1 + \cos^2 \theta).$$

Следовательно,

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta), \quad (13.33)$$

а полная интенсивность

$$\langle J \rangle = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

Диаграмма направленности усредненного излучения в плоскости, проходящей через ось симметрии, представлена на рис. 13.5

Тот факт, что заряд вдвое больше излучает в перпендикулярном направлении, чем в плоскости орбиты, объясняется изменением направления ускорения частицы за период вращения. Для направления, перпендикулярного плоскости орбиты, ускорение заряда в каждой точке перпендикулярно этому направлению и, следовательно, для любой точки орбиты излучение в данном направлении максимально. Для направления  $\mathbf{n}$ , лежащего в плоскости орбиты, наоборот, только из двух небольших участков орбиты излучение в данном направлении исходит почти максимально, а

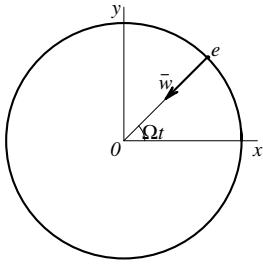


Рис. 13.4

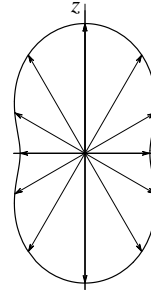


Рис. 13.5

из других участков излучение в данном направлении меняется от нуля до почти максимального значения.

**Пример 2. Время радиационного затухания атомного осциллятора.** Излучающий атом представим в виде затухающего осциллятора с дипольным моментом

$$d(t) = ex(t), \quad x(t) = X(t) \cos \omega t,$$

в котором характерное время  $\tau$  изменения амплитуды  $X(t)$  намного больше периода колебаний:

$$\tau \gg 2\pi/\omega \quad (1)$$

(результат решения подтвердит это условие). Энергия осциллятора

$$W = \frac{kX^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} X^2$$

определяется амплитудой  $X$  и собственной частотой колебаний  $\omega_0$ , вообще говоря, не совпадающей с  $\omega$ . Но в условиях (1) разницей между  $\omega_0$  и  $\omega$  можно пренебречь, а в качестве  $\ddot{d}(t)$  принять

$$\ddot{d}(t) = -e\omega^2 X(t) \cos \omega t.$$

Тогда усредненная за период колебаний интенсивность излучения

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{\langle \dot{d}^2 \rangle}{c^3} = \frac{1}{3} \frac{e^2 \omega^4}{c^3} X^2(t),$$

и из закона сохранения энергии

$$\frac{dW}{dt} = - \langle J \rangle$$

при условии  $\omega = \omega_0$  получается уравнение

$$\frac{d}{dt} X^2 = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega^2 X^2$$

( $e, m$  — заряд и масса электрона). Отсюда для амплитуды колебаний и энергии осциллятора следуют решения

$$X^2(t) = X^2(0) e^{-t/\tau} \quad (\text{т. е. } x(t) = x_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega t), \quad (2)$$

$$W(t) = W(0) e^{-t/\tau},$$

где искомое время радиационного затухания определяется выражением

$$\tau = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2}. \quad (13.34)$$

Для оптического электрона на частоте  $\omega = 4 \cdot 10^{15} c^{-1}$ , соответствующей длине волны  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ , отсюда получаем значение

$$\tau \simeq 10^{-8} \text{ с},$$

подтверждающее принятое условие (1).

Для завершения примера обратимся к классическому уравнению движения затухающего осциллятора

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

и его решению

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Видно, что если затухание осциллятора обусловлено только излучением, как в решении (2), то в качестве коэффициента затухания в уравнении движения (3) необходимо принять  $\gamma = 1/2\tau$ , а частота колебаний и собственная частота осциллятора связаны соотношением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}.$$

Следовательно, принятое у нас условие  $\omega = \omega_0$  оправданно.

## 13.6. Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения

Теперь рассмотрим излучение, обусловленное следующими магнитно-дипольным и квадрупольным членами разложения векторного потенци-

ала (13.20). Вклад в излучение определяется вторыми слагаемыми каждого из названных членов разложения (они на бесконечности спадают как  $1/r$ .) Эти члены разложения являются малыми добавками, пропорциональными отношению  $a/\lambda$ , и поэтому их вклад в излучение, вообще говоря, мал по сравнению с дипольным. Но они становятся главными, когда дипольный момент системы равен нулю и дипольное излучение вообще отсутствует.

Перед тем как перейти к магнитно-дипольному излучению, предварительно установим определенное соответствие между полями от электрического и магнитного диполей. Для этого возьмем фурье-составляющие электрического и магнитного дипольных моментов на произвольной частоте  $\omega$ ,  $\hat{\mathbf{d}}e^{-i\omega t}$ ,  $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$  и рассмотрим соответствующие поля, пометив их подборающими нижними индексами.

Для электрического диполя магнитное поле определяется формулой (13.27), которая для гармонического случая имеет вид

$$\hat{\mathbf{B}}_d(\mathbf{r}) = \left( -\frac{i\omega}{c} \frac{\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{r} \right) e^{ikr} = -\left( \frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} \right) [\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}. \quad (13.35)$$

Соответствующее электрическое поле определяется из уравнения  $\hat{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r}) = (i/k) \text{rot } \hat{\mathbf{B}}_d(\mathbf{r})$  и, следовательно,

$$\hat{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r}) = \text{rot} \left( \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} [\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \right). \quad (13.36)$$

Вектор-потенциал (13.20) магнитного диполя  $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$  характеризуется комплексной амплитудой

$$\hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \left( \frac{\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{r^2} - \frac{i\omega}{c} \frac{\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{r} \right) e^{ikr} = \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} [\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}],$$

и ей соответствует магнитное поле

$$\hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r}) = \text{rot} \left( \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} [\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] \right). \quad (13.37)$$

Тождественность структуры формул (13.36), (13.37) показывает, что магнитное поле  $\hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  магнитного диполя  $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$  совпадает с электрическим полем электрического диполя, замененного на  $\hat{\mathbf{m}}e^{-i\omega t}$ . Поскольку данное совпадение имеет место при всех  $\omega$ , полученное соответствие справедливо для произвольных зависимостей  $\mathbf{d}(t)$  и  $\mathbf{m}(t)$ .



Вычисление ротора, входящего в выражения (13.36), (13.37), достаточно громоздко, поэтому вместо всей цепочки вычислений здесь выпишем одну промежуточную формулу

$$\text{rot}[\mathbf{m} \times \mathbf{n}] = \frac{1}{r} ((\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{m})$$

и только окончательный результат в виде суммы двух слагаемых для каждого из полей

$$\hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) [3(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \hat{\mathbf{m}}] e^{ikr} + k^2 [(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{m}}) \times \mathbf{n}] \frac{1}{r} e^{ikr}, \quad (13.38)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_d(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) [3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \hat{\mathbf{d}}] e^{ikr} + k^2 [(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{d}}) \times \mathbf{n}] \frac{1}{r} e^{ikr}.$$

(Для электрического диполя  $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_0$  с неизменным направлением из последней формулы получаются выражения (13.23).) Первые слагаемые в соотношениях (13.38), являющиеся главными при  $kr \ll 1$ , совпадают с полями стационарных диполей. Вторые слагаемые, главные в волновой зоне, представляют собой поля расходящихся сферических волн, перпендикулярные направлению  $\mathbf{n}$ .

Аналогично электрическое поле магнитного диполя равно взятому с обратным знаком магнитному полю электрического диполя (замененного на  $\hat{\mathbf{m}}(t)$ ), что непосредственно следует из симметрии уравнений  $\text{rot}\hat{\mathbf{E}} = ik\hat{\mathbf{B}}, \text{rot}\hat{\mathbf{B}} = -ik\hat{\mathbf{E}}$ . В соответствии с соотношением (13.35) справедливы следующие выражения

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) &= k^2 \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) [\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}/r, \\ \hat{\mathbf{B}}_d(\mathbf{r}) &= -k^2 \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) [\hat{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] e^{ikr}/r. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Из установленного соответствия полей электрического и магнитного диполей, выражаемого соотношениями (13.38), (13.39), следует, что как угловое, так и полное излучение обоих диполей одинаковы. Единственное различие полей излучения связано с их поляризацией.

Квадрупольное излучение описывается последним слагаемым (13.20) векторного потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t')}{6c^2 r}.$$

Вычисление  $rot\mathbf{A}$  в данном случае усложнено тем, что вектор  $\mathbf{D}$ , как уже отмечалось, зависит от угловых координат точки наблюдения, т. е. от вектора  $\mathbf{n}$ . Но для волновой зоны изменениями как множителя  $1/r$ , так и вектора  $\mathbf{n}$  можно пренебречь и вектор-потенциал считать функцией только  $t' = t - r/c$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(t - r/c).$$

Поэтому

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = rot\mathbf{A}(t - \frac{r}{c}) = [grad(t - \frac{r}{c}) \times \dot{\mathbf{A}}] = \frac{\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}}{c}.$$

Следовательно, в волновой зоне магнитное и электрическое поля от квадрупольного потенциала

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}}{6c^3 r}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}],$$

а угловая интенсивность излучения определяется выражением

$$\left. \frac{dJ}{d\Omega} \right|_t = \frac{c}{4\pi} \frac{|\ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}|^2}{36c^6} \quad (13.40)$$

и в общем случае имеет довольно сложный характер. Поэтому здесь приведем результат лишь для осесимметричного гармонического осциллятора, для которого распределение поля (13.24), в волновой зоне равно

$$\hat{B}_\alpha(r, \theta) = -i \frac{k^3 D_0}{2} \sin \theta \cos \theta \frac{1}{r} e^{ikr},$$

дает

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{32\pi} k^6 D_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Соответствующая диаграмма направленности показана на рис. 13.6.

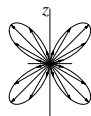


Рис. 13.6

Ее максимумы расположены при  $\theta = \pi/4$  и  $\theta = 3\pi/4$ . Полная интенсивность такого квадрупольного излучения

$$\langle J \rangle = \int_0^\pi \langle \frac{dJ}{d\Omega} \rangle 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{c}{60} k^6 D_0^2. \quad (13.41)$$

Вычисленная на основе угловой интенсивности (13.40) полная интенсивность квадрупольного излучения выражается формулой

$$J|_t = \frac{1}{180 c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2(t'), \quad (13.42)$$

предусматривающей суммирование по  $\alpha$  и  $\beta$  от 1 до 3 (вычисления не приводятся). Для осесимметричного гармонического квадрупольного с

$$D_{11} = D_{22} = D_0 e^{-i\omega t}, \quad D_{33} = -2D_0 e^{-i\omega t}$$

из последней формулы в результате усреднения получаем

$$\langle J \rangle = \frac{1}{180 c^5} \omega^6 \frac{1}{2} (D_0^2 + D_0^2 + 4D_0^2) = \frac{c}{60} k^6 D_0^2,$$

что совпадает с результатом (13.41) непосредственных вычислений.

Подведем итог. Полное излучение, описываемое мультипольным разложением (13.20), складывается из трех независимых частей

$$J|_t = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(t')}{3c^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2(t')}{3c^3} + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2(t'). \quad (13.43)$$

Они называются соответственно *дипольным*, *магнитно-дипольным* и *квадрупольным* излучениями.

## 13.7. Излучение антенны

Из большого многообразия антенн для обсуждения данного вопроса выделим линейную антенну с центральным возбуждением, так называемую *вибраторную антенну*. На рис. 13.7 показана такая антенна, представляющая собой два прямых отрезка провода с небольшим зазором в центре, на который подается возбуждающее напряжение от стороннего источника.

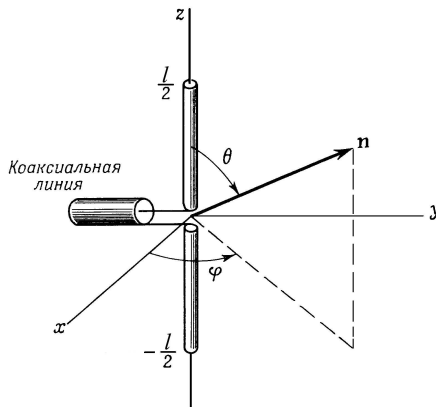


Рис. 13.7

В строгой постановке задача излучения такой антенны под действием внешней ЭДС (как и любой другой) должна заключаться в одновременном определении как распределения тока в элементах антенны, так и возбуждаемой антенной электромагнитной волны. Но обычно в руководствах по электродинамике распределением тока по антенне, по сути задаются, а затем по известному току находят поле излучаемой электромагнитной волны и другие электрические параметры. Например, для рассматриваемой антенны принимается, что ток вдоль нее синусоидальный, симметричный в обоих плечах и обращается в нуль на концах антенны

$$I(z, t) = I_1 \sin k \left( \frac{l}{2} - |z| \right) e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (13.44)$$

Понятно, что после этого определение всех характеристик поля излучения становится простой задачей, но вопрос о возможности так свободно «распорядиться» распределением тока по антенне остается открытым.

На самом деле подобная возможность расщепления общей задачи излучения на две последовательно решаемые подзадачи является результатом работы Леонтовича, Левина<sup>4</sup>, опубликованной впервые в 1944 г. В ней применительно к тонкому вибратору, снабженному распределенной или сосредоточенной стороной ЭДС, задача излучения сведена к интегродифференциальному

<sup>4</sup>См.: Леонтович М. А. Избранные труды. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1985.

уравнению для тока. Решение получено по методу возмущения с использованием малого параметра, связанного с отношением поперечного размера вибратора к длине волны. А выписанное выше распределение тока по антенне представляет собой главный член разложения решения интегродифференциального уравнения Леонтовича.

Итак, воспользуемся приближением Леонтовича и распределение тока по антенне примем в виде (13.44), где  $I_1$  имеет смысл максимальной величины амплитуды тока, существующей в антенне, если  $kl \geq \pi$ . При  $kl < \pi$  амплитуда тока максимальна в зазоре и ее величина  $I_0 = I_1 \sin kl/2$ . Если  $kl \ll 1$ , распределение (13.44) сводится к выражению

$$I(z, t) = I_0 \left( 1 - \frac{2}{l}|z| \right) e^{-i\omega t}. \quad (13.45)$$

**Вибратор Герца.** Исследование поля излучения рассматриваемой антенны начнем с этого предельного случая  $l \ll \lambda$  ( $kl \ll 1$ ), когда антенну называют вибратором Герца. Это типичный дипольный излучатель, поле излучения которого (13.28) определяется второй производной дипольного момента. По известному распределению тока в излучателе  $\mathbf{d}(t)$  находится по формуле (13.17). В случае линейного тока  $I(z, t)$  объемный интеграл из (13.17) сводится к одномерному и для  $\dot{d}_z(t)$  имеем

$$\dot{d}_z(t) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z, t) dz.$$

Интегрирование с функцией (13.45) дает

$$\dot{d}_z(t) = \frac{1}{2} l I_0 e^{-i\omega t}; \text{ отсюда } \ddot{d}_z(t) = -i \frac{\omega l}{2} I_0 e^{-i\omega t}.$$

Излучение осесимметрично. Усредненное угловое распределение следует из соотношения (13.30)

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\langle \ddot{d}_z^2 \rangle}{4\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{1}{32\pi c} (kl)^2 I_0^2 \sin^2 \theta \quad (13.46)$$

и характеризуется типичной диаграммой направленности, задаваемой множителем  $\sin^2 \theta$ . Полная мощность излучения равна

$$\langle J \rangle = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{|\ddot{d}_z|^2}{c^3} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 l^2}{4c^3} I_0^2 = \frac{\pi^2}{3c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2.$$

Ее можно представить в виде  $\langle J \rangle = (1/2)R_{\text{изл}}I_0^2$ , где коэффициент при  $I_0^2/2$ , имеющий размерность сопротивления, называется *сопротивлением излучения*. Для рассматриваемой антенны

$$R_{\text{изл}} = \frac{1}{3c} 2\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ абс. ед.} = 200 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ом,}$$

так как  $1/c = 30 \text{ ом}$  ( $\text{ом} = \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \frac{1/300}{3 \cdot 10^9} \text{ абс. ед.} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ абс. ед.}$

и, следовательно,  $\frac{1}{c} = \frac{9 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{10}} \text{ ом}$ ).

**Общий случай.** При длине антенны, сопоставимой с длиной волны, антенна в целом не является дипольным излучателем. Теперь каждый элемент антенны  $dz$  (рис. 13.8) можно рассматривать как элементарный дипольчик, для которого

$$d\dot{p}_z(t) = I(z, t)dz, \quad d\ddot{p}_z(t) = -i\omega I_1 \sin k \left(\frac{l}{2} - |z|\right) e^{-i\omega t} dz.$$

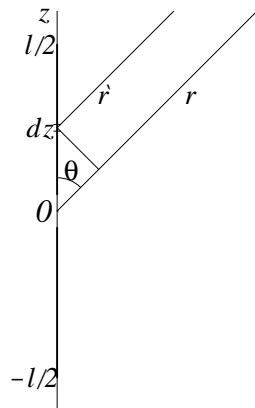


Рис. 13.8

Магнитное поле от этого элемента в точке наблюдения с координатами  $(r, \theta)$  есть

$$dB_\alpha(r, \theta, t) = \frac{d\ddot{p}_z(t')}{c^2 r'} \sin \theta,$$

причем каждому элементу  $dz$  здесь соответствует свое время

$$t' = t - \frac{r'(z)}{c} = \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c}z \cos \theta,$$

поскольку расстояние  $r'$  от элемента  $dz$  до точки наблюдения

$$r'(z) = r - z \cos \theta$$

зависит от координаты  $z$  элемента антенны.

В знаменателе выражения  $dB_\alpha$  различием  $r', r$  можно пренебречь и отсюда для суммарного поля получить

$$B_\alpha(r, \theta, t) = -\frac{i\omega I_1}{c^2 r} e^{i(kr - \omega t)} \sin \theta \int_{-l/2}^{l/2} \sin k \left(\frac{l}{2} - |z|\right) e^{-ikz \cos \theta} dz.$$

После интегрирования

$$B_\alpha(r, \theta, t) = -\frac{2i I_1}{c r} e^{i(kr - \omega t)} \frac{\cos(k\frac{l}{2} \cos \theta) - \cos(k\frac{l}{2})}{\sin \theta};$$

следовательно, угловая интенсивность

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{4\pi} \langle B_\alpha^2 \rangle r^2 = \frac{I_1^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos(\frac{kl}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta} \right|^2. \quad (13.47)$$

Характер углового распределения зависит от величины  $kl$ . В случае длинных волн  $kl \ll 1$  отсюда приходим к распределению (13.46) дипольного излучения, введя для максимальной амплитуды тока в зазоре обозначение  $I_0 = I_1 kl/2$ . В частных случаях полуволнового ( $kl = \pi$ ) и полноволнового ( $kl = 2\pi$ ) вибраторов из соотношения (13.47) получаем

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_1^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} & \text{при } kl = \pi, \\ \frac{4 \cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} & \text{при } kl = 2\pi. \end{cases}$$

Соответствующие диаграммы направленности представлены на рис. 13.9, где для сравнения пунктирной линией нанесена также соответствующая диаграмма для дипольного излучения. Видно, что угловое распределение излучения полуволновой антенны очень близко к излучению диполя, а диаграмма направленности полноволновой антенны имеет существенно более острую направленность.

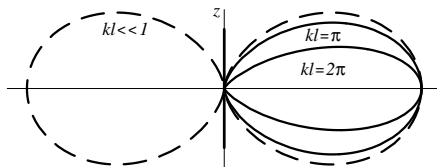


Рис. 13.9

### 13.8. Интерференционный способ управления диаграммой направленности антенн

Известно, что, используя множество отдельных простых излучателей (например, полуволновых вибраторов), можно создать излучающую систему, обладающую необходимой диаграммой направленности. В примерах, которые рассматриваются ниже, эта необходимость выражается в получении остронаправленного излучения.

В качестве элементарного излучателя при анализе мы примем дипольный излучатель, имея в виду, что полуволновой вибратор по диаграмме направленности мало отличается от диполя. Заметив, что для эффективной интерференции полей диполи должны быть параллельны, примем, что все они параллельны оси  $z$ .

1. Рассмотрение начнем с простейшего случая, когда результат интерференции легко представить наглядно. Пусть  $N$  интерферирующих диполей

$$\mathbf{d}_j(t) = \mathbf{d}_0 e^{i\chi_j} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{d}_0 = d_0 \mathbf{e}_z \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

расположены в точках оси  $z$  с координатами  $z_j = ja$  (рис. 13.10), имея в общем случае постоянный сдвиг по фазе между соседними диполями  $\Delta\chi$ , так что

$$\chi_j = j\Delta\chi.$$

Такое расположение диполей создает осесимметричное излучение, в котором вклад каждого из диполей в точке наблюдения с координатами  $(r, \theta)$  в волновой зоне задается полем (13.28), равным

$$B_\alpha^{(j)}(r, \theta, t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} d_0 \sin \theta e^{i\chi_j} e^{-i\omega(t-r_j/c)}, \quad \text{где } r_j = r - ja \cos \theta.$$



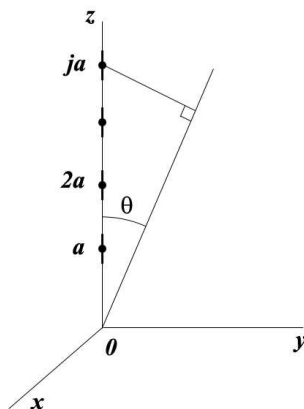


Рис. 13.10

Суммарное поле

$$B_{\alpha}(r, \theta, t) = -\frac{k^2}{r} d_0 \sin \theta \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(\Delta\chi - ka \cos \theta)j} e^{i(kr - \omega t)}$$

после суммирования  $N$  членов геометрической прогрессии приводит к следующему результату для модуля комплексной амплитуды поля:

$$|\hat{B}_{\alpha}(r, \theta)| = \frac{k^2 d_0}{r} \sin \theta \left| \frac{\sin(N(ka \cos \theta - \Delta\chi)/2)}{\sin((ka \cos \theta - \Delta\chi)/2)} \right|.$$

Отсюда угловая интенсивность

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |\hat{B}_{\alpha}(r, \theta)|^2 r^2 = \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left( \frac{\sin[(N/2)(ka \cos \theta - \Delta\chi)]}{\sin[(1/2)(ka \cos \theta - \Delta\chi)]} \right)^2, \quad (13.48)$$

а вид диаграммы направленности, определяемый, в основном, последним множителем выражения (13.48) (интерференционный множитель), зависит от числа  $N$  диполей, отношения  $a/\lambda$  и разности фаз  $\Delta\chi$ . Как нам известно, при  $a > \lambda$  излучение характеризуется наличием интерференционных максимумов нескольких порядков от  $m = 0$  до  $m = m_0 = [a/\lambda]$  (см. § 12.11) с соответствующими «лепестками» в диаграмме направленности. Поэтому, ограничившись задачей создания излучателя с

остронаправленным излучением, здесь и ниже мы примем, что расстояние между диполями меньше длины волны

$$a < \lambda. \quad (13.49)$$

Тогда в составе излучения будет только максимум нулевого порядка, который при  $\Delta\chi = 0$  занимает положение  $\theta = \theta_0 = \pi/2$ . (Действительно, при  $a/\lambda < 1$  и  $\Delta\chi = 0$  знаменатель интерференционного множителя в соотношении (13.48) только при одном значении  $\cos \theta_0 = 0$  обращается в нуль.) Угловая ширина  $\Delta\theta$  этого максимума, т. е. разброс углов относительно  $\theta_0$ , на котором  $\langle dJ/d\Omega \rangle$  от максимального значения при  $\theta = \theta_0$  первый раз спадает до нуля при  $\theta = \theta_0 \pm \Delta\theta/2$ , определяется условием равенства нулю числителя интерференционного множителя

$$\sin\left(\pi \frac{Na}{\lambda} \sin \frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0$$

и при  $Na \gg \lambda$  принимает значение

$$\Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{Na}. \quad (13.50)$$

Таким образом, для получения остронаправленного излучения необходимо, чтобы общая длина дипольной решетки удовлетворяла условию  $Na \gg \lambda$ .

Теперь обратимся к случаю  $\Delta\chi \neq 0$ . Имея в виду, что величина  $\Delta\chi$  управляет направлением максимума излучения, удобно ее выразить через косинус некоторого угла  $0 < \theta \leq \pi/2$  в виде

$$\Delta\chi = ka \cos \theta. \quad (13.51)$$

Тогда выражение (13.48) принимает вид

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left( \frac{\sin[(N/2)ka(\cos \theta - \cos \theta_0)]}{\sin[(1/2)ka(\cos \theta - \cos \theta_0)]} \right)^2,$$

откуда видно, что угол  $\theta_0$ , входящий в определение (13.51)  $\Delta\chi$ , имеет четкий физический смысл, определяя положение максимума диаграммы направленности излучения. При этом угловая ширина этого максимума будет равна

$$\Delta\theta = 2 \frac{\lambda}{Na \sin \theta_0},$$

а его интенсивность в зависимости от  $\theta_0$  меняется пропорционально  $\sin^2 \theta_0$ . (При  $\theta_0 = \pi/2$ , т. е.  $\Delta\chi = 0$ , последнее выражение сводится к (13.50).)

На рис. 13.11 диаграмма направленности отдельного диполя дополнена направлениями главного максимума излучения решетки при  $\Delta\chi = 0$  и  $\Delta\chi = ka \cos \theta_0$ , демонстрируя возможность управления его положением с помощью изменения разности фаз  $\Delta\chi$ .

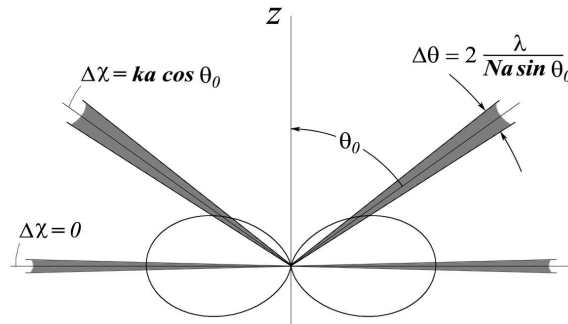


Рис. 13.11

2. Теперь зададимся целью за счет интерференции сформировать излучение с максимальной интенсивностью только в направлениях, ограниченных определенным угловым размером по сферической координате  $\alpha$ . (В рассмотренном в п.1 случае  $\langle dJ/d\Omega \rangle$  не зависела от азимутального угла  $\alpha$ .) Для этого рассматривавшиеся выше  $N$  диполей  $\mathbf{d}_0 e^{i\chi_j} e^{-i\omega t}$

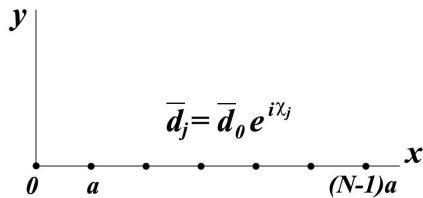


Рис. 13.12

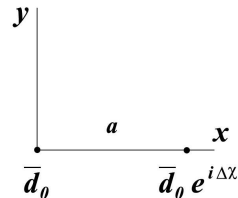


Рис. 13.13

расположим в плоскости  $(x, z)$  в точках  $\mathbf{r}' = ja\mathbf{e}_x$  ( $a < \lambda$ ), как показано на рис. 13.12. Тогда расстояние от  $j$ -го диполя до точки наблюдения  $(r, \theta, \alpha)$  согласно (13.10) определяется как  $r_j = r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'_j)$ . Поскольку

$$\mathbf{n} = \sin \theta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) + \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

то  $r_j = r - ja \sin \theta \cos \alpha$  и суммарное поле

$$B_\alpha(r, \theta, \alpha, t) = -\frac{k^2}{r} d_0 \sin \theta \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(\Delta\chi - ka \sin \theta \cos \alpha)j} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Следовательно, угловая интенсивность определяется выражением

$$\langle \frac{dJ}{d\Omega} \rangle = \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \left( \frac{\sin[(N/2)(2\pi a/\lambda \sin \theta \cos \alpha - \Delta\chi)]}{\sin[(1/2)(2\pi a/\lambda \sin \theta \cos \alpha - \Delta\chi)]} \right)^2. \quad (13.52)$$

В связи с полученной формулой обратим внимание, что двум направлениям, отличающимся только знаками угловой координаты  $\alpha$ , отвечает одно значение  $\langle dJ/d\Omega \rangle$ . Это означает, что угловое распределение излучения рассматриваемого излучателя симметрично относительно плоскости  $y = 0$ . Поэтому ниже на рис. 13.16 соответствующие диаграммы направленности «урезаны» и представлены целиком только для одного полупространства  $y > 0$ .

Как уже говорилось, при  $N \gg 1$  интерференционный множитель порождает острый максимум излучения с небольшим угловым размером. Но интерес представляет характер излучения также и при небольших  $N$ . Поэтому предварительно проанализируем некоторые возможности управления поведением излучения двух интерферирующих диполей, схематически представленных на рис. 13.13. При этом формула (13.52) приобретает вид

$$\langle \frac{dJ}{d\Omega} \rangle = 4 \frac{ck^4 d_0^2}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \left( \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \alpha - \frac{\Delta\chi}{2} \right).$$

Если взять два синфазных диполя ( $\Delta\chi = 0$ ) и расположить их на расстоянии  $a = \lambda/2$ , то сразу очевидно, что излучение вдоль и против оси  $x$  должно отсутствовать. При этом распределение интенсивности в плоскости  $(x, y)$  таково:

$$\langle \frac{dJ}{d\Omega} \rangle \Big|_{\theta=\pi/2} \sim \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right)$$

(при  $\cos \alpha = \pm 1$  действительно обращается в нуль). Оно характеризуется диаграммой направленности, показанной на рис. 13.14.

Аналогично этому легко «сконструировать» систему из двух диполей так, чтобы волны от отдельных диполей усиливали друг друга при

распространении в одном направлении (например, вдоль оси  $x$ ) и подавляли в другом. Для этого надо взять  $a = \lambda/4$ , а разность фаз принять  $\Delta\chi = \pi/2$ , чтобы для волн, бегущих по оси  $x$ , амплитуды складывались, а в противоположном направлении — вычитались. Диаграмма направленности в плоскости  $\theta = \pi/2$ ,

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle \Big|_{\theta=\pi/2} \sim \cos^2\left(\frac{\pi}{4}(\cos\alpha - 1)\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = 0, \\ 0 & \text{при } \alpha = \pi, \end{cases}$$

соответствующая названным параметрам  $a = \lambda/4$ ,  $\Delta\chi = \pi/2$ , показана на рис. 13.15.

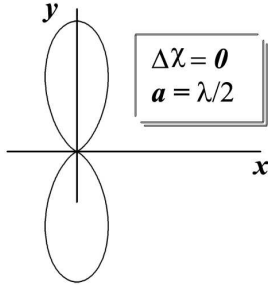


Рис. 13.14

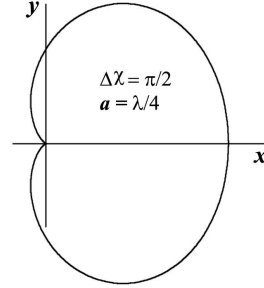


Рис. 13.15

Обратимся к случаю  $N \gg 1$ , т. е. к рассмотрению антенной решетки (рис. 13.12). При оговоренном условии

$$a < \lambda, \quad Na \gg \lambda$$

излучение характеризуется существованием единственного главного максимума («единственного» в полупространстве  $y > 0$ ), направление которого определяется из условия равенства нулю знаменателя интерференционного множителя в выражении (13.52). Следовательно, при  $\Delta\chi = 0$  направлению главного максимума соответствуют  $\cos\alpha = 0$  и координаты  $\alpha = \pm\pi/2$ . При этом угловая ширина  $\Delta\alpha$  главного максимума задается числителем интерференционного множителя в виде требования

$$N\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \mp\pi,$$

откуда

$$\Delta\alpha = 2 \frac{\lambda}{Na \sin\theta}.$$

То есть эта ширина зависит от координаты  $\theta$  направления излучения, увеличиваясь по мере отклонения от значения  $\theta = \pi/2$  и ослабления интенсивности, пропорциональной  $\sin^2 \theta$  (см. (13.52)).

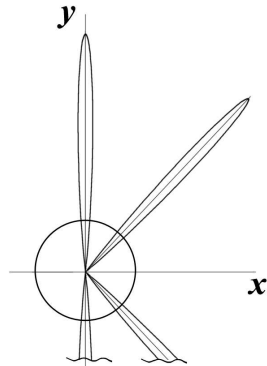


Рис. 13.16

Заметим, что с помощью параметра  $\Delta\chi$  направления  $\pm\pi/2$  главного максимума можно изменить. Например, чтобы максимум в плоскости  $\theta = \pi/2$  направить по углам  $\pm\alpha_0$ , необходимо иметь  $\Delta\chi = ka \cos \alpha_0$ . При этом  $\alpha$  — координаты этих максимумов  $\pm\alpha_*$  будут зависеть от угла  $\theta$  так, чтобы выполнялось условие

$$\cos \alpha_*(\theta) = \frac{\Delta\chi}{ka \sin \theta} = \frac{\cos \alpha_0}{\sin \theta}.$$

Отсюда видно, что при  $\sin \theta < |\cos \alpha_0|$  максимум исчезает и распределение интенсивности по углу  $\alpha$  становится монотонным. Но на обсуждении этих особенностей мы здесь останавливаться не будем.



Рис. 13.17

Диаграмма направленности излучения рассматриваемой антенной решетки в плоскости  $(x, y)$  представлена на рис. 13.16. Здесь окружность соответствует излучению единичной антенны, а узкие лепестки

отвечают излучению решетки при  $\Delta\chi = 0$  и  $\Delta\chi = ka \cos \alpha_0$  (соответственно по два лепестка для каждого случая).

Параграф завершим указанием на возможность избавиться от одного из двух лепестков, симметричных относительно плоскости  $y = 0$ . Для этого достаточно к синфазной решетке добавить вторую на расстоянии  $\lambda/4$  со сдвигом по фазе на  $\pi/2$ . Если фазы отличаются так, как показано на рис. 13.17, пропадает лепесток в полупространстве  $y < 0$ . А чтобы излучение направить в противоположную сторону (в полупространство  $y < 0$ ), фазовый множитель нижней решетки надо поменять на  $e^{i\pi/2}$ .

## Глава 14

# СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

До сих пор мы имели дело с волновыми решениями уравнений Максвелла в основном в виде монохроматических плоских волн или их комбинаций. И только эпизодически — как в случае излучения диполей или квадруполь — встречались со сферическими волнами. В данной главе мы познакомимся с двумя классами сферических электромагнитных волн в виде наборов векторных мультиполей. Здесь нам встретятся простейшие специальные функции (полиномы и присоединенные функции Лежандра, функции Бесселя полуцелого порядка), знакомство читателя с которыми не предполагается. Но поскольку названные функции выражаются через элементарные, для понимания рассматриваемого вопроса достаточно будет указания тех основных свойств этих функций, которые приводятся в тексте. Для более основательного изучения электромагнитных векторных мультиполей рекомендуется замечательная книга Дж. Джексона, предназначенная для продвинутого читателя.



## 14.1. Введение

Обратимся к построению решений уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\hat{\mathbf{E}} = i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{B}}, \quad \operatorname{rot}\hat{\mathbf{B}} = -i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{E}} \quad (14.1)$$

в сферической системе координат  $(r, \theta, \alpha)$ . Ограничимся частным случаем осесимметричных решений, когда все сферические компоненты полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  не зависят от азимутального угла  $\alpha$ . Каждое из полей разложим на сумму

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{E}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}}(r, \theta)$$

азимутальной ( $\alpha$ ) и меридианальной

$$\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}}(r, \theta) = \hat{E}_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + \hat{E}_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$$

составляющих. (Для  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$  — аналогично.) Так как  $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}}(r, \theta)$ ,  $\operatorname{rot}\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}}(r, \theta)$  имеют только  $\alpha$ -компоненты,  $\operatorname{rot}\hat{E}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\operatorname{rot}\hat{B}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha$  представляют собой меридианальные вектора, каждое из уравнений (14.1) расщепляется на два независимых уравнения

$$\operatorname{rot}(\hat{E}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) = \frac{i\omega}{c}\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}}, \quad \operatorname{rot}\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}} = \frac{i\omega}{c}\hat{B}_\alpha\mathbf{e}_\alpha;$$

$$\operatorname{rot}(\hat{B}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) = -\frac{i\omega}{c}\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}}, \quad \operatorname{rot}\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}} = -\frac{i\omega}{c}\hat{E}_\alpha\mathbf{e}_\alpha.$$

Их можно сгруппировать в две независимые системы

$$\operatorname{rot}(\hat{E}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) = \frac{i\omega}{c}\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}}, \quad \operatorname{rot}\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}} = -\frac{i\omega}{c}\hat{E}_\alpha\mathbf{e}_\alpha, \quad (14.2)$$

$$\operatorname{rot}(\hat{B}_\alpha\mathbf{e}_\alpha) = -\frac{i\omega}{c}\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}}, \quad \operatorname{rot}\hat{\mathbf{E}}_{\text{меред}} = \frac{i\omega}{c}\hat{B}_\alpha\mathbf{e}_\alpha, \quad (14.3)$$

каждая из которых содержит азимутальную составляющую одного и меридианальную составляющую другого поля. Первая из этих систем эквивалентна уравнению

$$\operatorname{rotrot}(\hat{E}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha) - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{E}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha = 0, \quad (14.4)$$

получающемуся в результате исключения  $\hat{\mathbf{B}}_{\text{меред}}$  из системы (14.2), и соотношению

$$\hat{\mathbf{B}} = -\frac{i}{\omega/c} \text{rot}(\hat{E}_\alpha \mathbf{e}_\alpha), \quad (14.5)$$

выражающему поле  $\mathbf{B}$  через  $\hat{E}_\alpha(r, \theta)$ . Система (14.3) порождает аналогичную пару

$$\text{rotrot}(\hat{B}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha) - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{B}_\alpha(r, \theta)\mathbf{e}_\alpha = 0, \quad (14.6)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{i}{\omega/c} \text{rot}(\hat{B}_\alpha \mathbf{e}_\alpha). \quad (14.7)$$

Таким образом, осесимметричная электромагнитная волна в общем случае складывается из двух типов осесимметричных волн. Волны первого типа состоят из азимутального электрического и сопровождающего его меридианального магнитного поля. Другой тип составляют волны, в которых магнитное поле чисто азимутально, а электрическое поле меридианально.

## 14.2. Электромагнитные мультипольные поля (осесимметричный случай)

1. Для каждого из обозначенных типов волн построим фундаментальный набор решений. Начнем с волн, представленных системой (14.6), (14.7), для которых поля полностью определяются одной скалярной функцией  $\hat{B}_\alpha(r, \theta)$ . После раскрытия векторных операций уравнение (14.6) для нее приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\hat{B}) + k^2\hat{B} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \hat{B}) \right] = 0$$

(отличающийся от скалярного волнового уравнения в сферических координатах  $(r, \theta)$ ). Набор решений этого однородного уравнения построим в виде мультипликативных функций  $f(r)P(\theta)$ . При этом для  $f(r)$ ,  $P(\theta)$  получаются уравнения

$$r \frac{d^2}{dr^2}(rf) + k^2 r^2 f(r) = \ell(\ell + 1)f(r), \quad (14.8)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P(\theta)) \right] = -\ell(\ell + 1)P(\theta), \quad (14.9)$$

если константу разделения переменных представить в виде произведения  $\ell(\ell + 1)$ .

Нетрудно убедиться, что левая часть уравнения (14.9) тождественна выражению

$$\sin^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP}{d\theta} \right) + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP}{d\theta} - \frac{P}{\sin^2 \theta}$$

и после введения независимой переменной  $x = \cos \theta$  уравнение (14.9) в целом приводится к виду

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{1}{1 - x^2} \right] P(x) = 0 \quad (\text{уравнение Лежандра}).$$

Отметим без доказательства, что ограниченные непрерывные на интервале  $-1 \leq x \leq 1$  решения этого уравнения существуют при всех целых положительных значениях параметра  $\ell$  и называются *присоединенными функциями Лежандра*  $P_\ell^1(x)$ . Они связаны с полиномами Лежандра  $P_\ell(x)$  соотношением

$$P_\ell^1(x) = -(1 - x^2)^{1/2} \frac{dP_\ell}{dx}, \quad \text{где } P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell, \quad (14.10)$$

и составляют бесконечный полный набор функций, ортогональных на интервале  $[-1, 1]$ , причем

$$\int_{-1}^1 P_\ell^1(x) P_{\ell'}^1(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + 1)!}{(\ell - 1)!} \delta_{\ell\ell'}. \quad (14.11)$$

Ниже нам понадобится явный вид нескольких первых номеров  $P_\ell^1(x)$ . Приведем их здесь в виде функций от переменной  $\theta$ :

$$P_1^1(\theta) = -\sin \theta, \quad P_2^1(\theta) = -3 \sin \theta \cos \theta, \quad P_3^1(\theta) = -\frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1). \quad (14.12)$$

Радиальное уравнение (14.8) для фиксированного  $\ell$  заменой

$$f_\ell(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_\ell(r)$$

приводится к уравнению Бесселя полуцелого порядка  $\nu = \ell + \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2 u_\ell}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\ell}{dr} + (k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}) u_\ell = 0,$$

имеющему независимые решения  $J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$ ,  $N_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$ , выражающиеся через элементарные функции своего аргумента. Следовательно, функции

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr), \quad \frac{1}{\sqrt{r}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

и их линейные комбинации удовлетворяют уравнению (14.8).

Здесь в качестве радиальных функций  $f_\ell(r)$  удобно принимать так называемые *сферические функции Ганкеля*

$$h_\ell^{(1,2)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \left[ J_{\ell+\frac{1}{2}}(\xi) \pm i N_{\ell+\frac{1}{2}}(\xi) \right] \quad (\xi = kr),$$

на бесконечности обладающие асимптотикой в виде расходящейся и сходящейся сферических волн

$$h_\ell^{(1,2)}(\xi) \simeq (\mp i)^{\ell+1} \frac{\exp(\pm i\xi)}{\xi}.$$

Вот явные выражения для сферических функций Ганкеля  $h_\ell^{(1)}(\xi)$  для нескольких низших значений  $\ell$ :

$$h_0^{(1)}(\xi) = \frac{e^{i\xi}}{i\xi}, \quad h_1^{(1)}(\xi) = -\frac{e^{i\xi}}{\xi} \left(1 + \frac{i}{\xi}\right), \quad h_2^{(1)}(\xi) = \frac{ie^{i\xi}}{\xi} \left(1 + \frac{3i}{\xi} - \frac{3}{\xi^2}\right). \quad (14.13)$$

(Для вещественных  $\xi$  функции  $h_\ell^{(1)}(\xi)$  и  $h_\ell^{(2)}(\xi)$  комплексно сопряжены, поэтому здесь выписаны выражения только для  $h_\ell^{(1)}(\xi)$ .) Для получения выражений с высшими номерами и вычисления производных служат рекуррентные формулы

$$h_{\ell+1}^{(1)}(\xi) = \frac{2\ell+1}{\xi} h_\ell^{(1)}(\xi) - h_{\ell-1}^{(1)}(\xi), \quad (14.14)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ h_\ell^{(1)}(\xi) \right] = \frac{1}{2\ell+1} \left[ \ell h_{\ell-1}^{(1)}(\xi) - (\ell+1) h_{\ell+1}^{(1)}(\xi) \right]. \quad (14.15)$$

Таким образом, произведения  $h_\ell^{(1,2)}(\xi)P_\ell^1(\cos\theta)$  ( $\ell = 1, 2, 3, \dots$ ) составляют искомые решения для поля  $\hat{B}_\alpha(r, \theta)$ . Соответствующие электрические поля определяются из соотношения (14.7). С использованием нормирующего множителя

$$b_\ell = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - 1)!}{(\ell + 1)!}}$$

такого, что

$$\int_{-1}^1 b_\ell P_\ell^1(x) b_{\ell'} P_{\ell'}^1(x) dx = \frac{1}{2\pi} \delta_{\ell\ell'}, \quad (14.16)$$

поля осесимметричного векторного мультиполя с номером  $\ell$  можно представить в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{B}}_\ell = b_\ell h_\ell^{(1,2)}(\xi) P_\ell^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\alpha, \quad (14.17)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_\ell = -b_\ell \frac{i}{\xi} \left[ \ell(\ell + 1) h_\ell^{(1,2)}(\xi) P_\ell(\cos\theta) \mathbf{e}_r + \frac{d}{d\xi} \left( \xi h_\ell^{(1,2)}(\xi) \right) P_\ell^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\theta \right]$$

(здесь выражение для  $\hat{E}_{\ell r}$  выписано с учетом соотношения (14.10)). Отсюда видно, что угловая зависимость  $r$ -компоненты электрического поля выражается полиномом Лежандра, в то время как  $E_\theta, B_\alpha$  зависят от  $\theta$  как  $P_\ell^1(\cos\theta)$ .

Данная система составляет полный набор решений однородных уравнений Максвелла (14.1) типа (14.3). Их характерной особенностью является ортогональность вектора  $\mathbf{B}$  радиусу-вектору ( $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = 0$ ) и, следовательно, направлению распространения волны. Таким образом, мы здесь имеем сферический аналог изученных ранее (см. главу 10) ТМ-волн. Иными словами, решения (14.17) представляют собой *электромагнитные векторные мультиполи электрического типа* (осесимметричные) и описывают уходящие от центра, при  $f_\ell = h_\ell^{(1)}(\xi)$ , или сходящиеся к центру, при  $f_\ell = h_\ell^{(2)}(\xi)$ , сферические волны.

**2.** Отметим следующие свойства полей (14.17):

- на большом расстоянии  $\xi = kr \gg 1$  в локальном смысле составляют линейно поляризованную плоскую монохроматическую волну;
- усредненная по времени угловая интенсивность излучения рассматриваемого  $\ell$ -поля равна

$$\left\langle \frac{dJ_\ell}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} r^2 |\hat{B}_\ell|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{k^2} b_\ell^2 |P_\ell^1(\cos\theta)|^2, \quad (14.18)$$

в) а полная интенсивность  $\langle J_\ell \rangle = 2\pi \int_0^\pi \langle \frac{dJ_\ell}{d\Omega} \rangle \sin\theta d\theta$  с учетом условия ортогональности (14.16) принимает значение

$$\langle J_\ell \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{k^2}. \quad (14.19)$$

**3.** Совершенно аналогично векторные мультиполи магнитного типа, являющиеся решениями системы (14.4), (14.5), определяются соотношениями

$$\hat{\mathbf{E}}_\ell = b_\ell h_\ell^{(1,2)}(\xi) P_\ell^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\alpha, \quad (14.20)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_\ell = b_\ell \frac{i}{\xi} \left[ \ell(\ell+1) h_\ell^{(1,2)}(\xi) P_\ell(\cos\theta) \mathbf{e}_r + \frac{d}{d\xi} \left( \xi h_\ell^{(1,2)}(\xi) \right) P_\ell^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\theta \right],$$

получающимися из формул (14.17) в результате простой замены  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ , так как уравнения (14.1) инвариантны относительно данных преобразований.

**4.** В качестве иллюстрации приведем выражения для первых двух номеров  $\ell = 1$ ,  $\ell = 2$  полей векторных мультиполей электрического типа. Для этого воспользуемся формулами (14.12), (14.13) и из соотношений (14.17) получим (для уходящих волн):

$$\hat{\mathbf{B}}_1(r, \theta) = B_1 h_1^{(1)}(kr) P_1^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\alpha = B_1 \frac{1}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \sin\theta e^{ikr} \mathbf{e}_\alpha, \quad (14.21)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_1(r, \theta) = B_1 \frac{i}{kr} \left[ \frac{2}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \cos\theta \mathbf{e}_r + \left(-i + \frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2}\right) \sin\theta \right] e^{ikr} \mathbf{e}_\theta$$

(для  $\ell = 1$ ), где  $B_1$  — произвольная константа. Заметим, что эти выражения полностью совпадают с полем гармонического осциллятора (13.22), (13.23), полученным раньше из мультипольного разложения вектор-потенциала, после замены  $B_1$  на  $-k^3 d_0$ .

Аналогично решение (14.17), отвечающее значению  $\ell = 2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_2(r, \theta) &= B_2 h_2^{(1)}(kr) P_2^1(\cos\theta) \mathbf{e}_\alpha = \\ &= B_2 \frac{i}{kr} \left(1 + \frac{3i}{kr} - \frac{3}{k^2 r^2}\right) (-3 \sin\theta \cos\theta) e^{ikr} \mathbf{e}_\alpha \end{aligned}$$

после замены  $B_2$  на  $k^4 D_0/6$  совпадает с магнитным полем (13.24) осесимметричного квадруполья. Не будем здесь сравнивать соответствующие электрические поля, поскольку они однозначно определяются распределением поля  $\hat{B}_\alpha(r, \theta)$  и, следовательно, в сравниваемых случаях тождественны.

Отмеченные здесь совпадения с соответствующими результатами предыдущей главы можно рассматривать как косвенное подтверждение выделенного курсивом предложения п.4 § 13.3.

### 14.3. Сферическая стоячая волна. Сферический резонатор

На примере сферических волн электрического типа организуем теперь простейшую стоячую электромагнитную волну. Рассмотрим для этого суперпозицию расходящейся от центра и сходящейся к центру волн одинаковой амплитуды, соответствующих номеру  $\ell = 1$ . При этом структура полей составляющих волн определяется выражениями (14.17), где расходящейся волне соответствует радиальная функция  $h_1^{(1)}(kr)$ , а сходящейся — комплексно сопряженная функция  $h_1^{(2)}(kr)$ . Тогда отличные от нуля компоненты результирующих полей

$$\begin{aligned}\hat{B}_\alpha^\Sigma &= B_1 \left( h_1^{(1)}(kr) + h_1^{(2)}(kr) \right) P_1^1(\cos \theta), \\ \hat{E}_r^\Sigma &= -B_1 \frac{2i}{kr} \left( h_1^{(1)}(kr) + h_1^{(2)}(kr) \right) P_1^1(\cos \theta),\end{aligned}$$

и аналогичное выражение для  $\hat{E}_\theta^\Sigma$  с помощью результатов (14.21) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\hat{B}_\alpha^\Sigma &= B_1 \frac{2}{kr} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \sin \theta, \\ \hat{E}_r^\Sigma &= iB_1 \frac{4}{k^2 r^2} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \cos \theta, \\ \hat{E}_\theta^\Sigma &= iB_1 \frac{4}{k^2 r^2} \left( \cos kr - (1 - k^2 r^2) \frac{\sin kr}{kr} \right) \sin \theta.\end{aligned}\tag{14.22}$$

Видно, что стоячая сферическая волна не имеет особенности в центре, в то время как поля (14.21) составляющих волн характеризуются особенностями, соответствующими электрическому диполю. Так же, как в

плоской стоячей волне (см. § 10.3), здесь имеется система поверхностей (в данном случае сферических), на которых тангенциальные  $\theta$ -компоненты электрического поля равны нулю. Это видно из графика функции

$$f_\theta = \cos kr - (1 - k^2 r^2) \sin kr / kr,$$

приведенного на рис. 14.1 и характеризующего распределение амплитуды поля  $\hat{E}_\theta^\Sigma$  по радиусу. Таким образом, искомые радиусы определяются как решения уравнения

$$\operatorname{ctg} kR = \frac{1}{kR} - kR, \quad (14.23)$$

причем первый корень этого уравнения близок к значению  $kR = 2,74$ . Отсюда следует, что для сферической полости радиуса  $R$  с хорошо проводящей границей поля (14.22) являются собственными полями, соответствующими собственным частотам, а сама полость может рассматриваться как сферический резонатор. Как оказывается, собственная частота  $\omega = 2,74c/R$  является наименьшей из всех собственных частот сферического резонатора. (Это утверждение приводится здесь без доказательства.) Соответствующую моду резонатора иллюстрирует картина силовых линий поля  $\mathbf{E}$  в меридианальной плоскости, представленная на рис. 14.2.

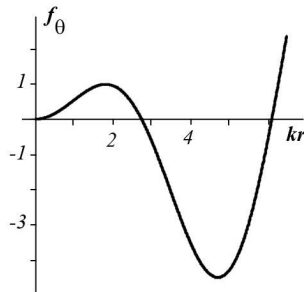


Рис. 14.1

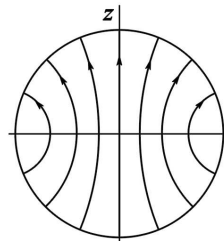


Рис. 14.2

*Упражнение.* Воспользовавшись решением (14.20) показать, что электрическое поле в стоячей волне магнитно-дипольного типа имеет вид

$$\hat{E}_\alpha(r, \theta) = E_1 \frac{2}{kr} \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right) \sin \theta$$



( $E_1$  — неопределенная константа). Следовательно, собственные частоты данной моды сферического резонатора определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} kR = kR.$$

## 14.4. Замкнутая задача излучения антенны

1. Теперь у нас есть возможность на конкретном примере сферической антенны продемонстрировать постановку и решение замкнутой задачи для поля излучения. Для этого рассмотрим антенну, составленную из двух полусфер радиуса  $R$ , на узкий зазор между которыми от внешнего источника подается возбуждающее напряжение, не зависящее от азимутального угла  $\alpha$ . В математической формулировке задачи работу внешнего источника будем моделировать заданным на сфере сторонним полем

$$\mathbf{E}_{\text{стр}} = E_{\text{стр}}(\theta)e^{-i\omega t}\mathbf{e}_\theta,$$

локализованным в узком круговом поясе вблизи линии контакта полусфер с координатой  $\theta = \pi/2$ ; сфера при этом рассматривается как целая. Конкретные вычисления проведем для случая

$$E_{\text{стр}}(\theta) = E_0\delta(\cos\theta). \quad (14.24)$$

2. Излучаемая волна представляет собой сферическую электромагнитную волну электрического типа и описывается полями  $\hat{B}_\alpha(r, \theta)$ ,  $\hat{E}_r(r, \theta)$ ,  $\hat{E}_\theta(r, \theta)$ , удовлетворяющими уравнениям (14.6), (14.7), граничному условию на сфере

$$\hat{E}_\theta(R, \theta) + E_{\text{стр}}(\theta) = 0 \quad (14.25)$$

и условию излучения. Для интересующих нас полей решение строится в виде ряда мультиполей

$$\hat{B}_\alpha(r, \theta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} D_\ell b_\ell h_\ell(\xi) P_\ell^1(\cos\theta), \quad (14.26)$$

$$\hat{E}_\theta(r, \theta) = -\frac{i}{\xi} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_\ell b_\ell \frac{d}{d\xi}(\xi h_\ell) P_\ell^1(\cos\theta) \quad (14.27)$$

(для упрощения записи здесь и далее использовано обозначение  $h_\ell(\xi)$  вместо  $h_\ell^{(1)}(\xi)$ ). Коэффициенты разложения  $D_\ell$  определяются из граничного условия (14.25), с использованием обозначения

$$\xi^\circ = kR = (\omega/c)R \quad (14.28)$$

принимающего вид

$$\frac{i}{\xi^\circ} \sum_{\ell=1}^{\infty} D_\ell b_\ell \frac{d}{d\xi}(\xi h_\ell)|_{\xi^\circ} P_\ell^1(\cos \theta) = E_{\text{стр}}(\cos \theta).$$

Отсюда с учетом условия ортогональности (14.16) получаем

$$D_\ell \frac{d}{d\xi}(\xi h_\ell)|_{\xi^\circ} = -2\pi i \xi^\circ b_\ell \int_{-1}^1 E_{\text{стр}}(x) P_\ell^1(x) dx,$$

а в рассматриваемом частном случае (14.24)  $E_{\text{стр}}(x) = E_0 \delta(x)$ ,

$$D_\ell \frac{d}{d\xi}(\xi h_\ell)|_{\xi^\circ} = -2\pi i \xi^\circ b_\ell E_0 P_\ell^1(0). \quad (14.29)$$

Множитель при  $D_\ell$  из последнего выражения с помощью рекуррентных формул (14.14), (14.15) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\xi}(\xi h_\ell) = \xi h_{\ell-1}(\xi) - \ell h_\ell(\xi). \quad (14.30)$$

Из соотношения (14.10) имеем  $P_\ell^1(0) = -dP_\ell/dx(0)$ ; следовательно, в решениях (14.26), (14.27) только нечетные члены отличны от нуля. Воспользовавшись соотношениями (14.29), (14.30), эти ненулевые коэффициенты можно представить в виде

$$D_{2n+1} = 2\pi E_0 d_n(\xi^\circ), \quad d_n = -\frac{i \xi^\circ b_{2n+1} P_{2n+1}^1(0)}{\xi^\circ h_{2n}(\xi^\circ) - (2n+1)h_{2n+1}(\xi^\circ)}. \quad (14.31)$$

**3.** Полная интенсивность излучения антенны на основании свойства (14.11) равна сумме интенсивностей мультиполей и, как следствие соотношений (14.19), (14.26),

$$\langle J \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{R^2}{\xi^{\circ 2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} |D_\ell|^2 = \frac{c\pi}{2\xi^{\circ 2}} \mathcal{E}^2 \sum_{n=0}^{\infty} |d_n(\xi^\circ)|^2. \quad (14.32)$$

Угловая интенсивность учитывает интерференцию и определяется выражением

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{c}{8\pi} r^2 |\hat{B}_\alpha(r, \theta)|_{r \rightarrow \infty}^2 = \\ &= \frac{c\pi}{2\xi^{\circ 2}} \mathcal{E}^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi^\circ) b_{2n+1} (-1)^{n+1} P_{2n+1}^1(\cos \theta) \right|^2. \end{aligned} \quad (14.33)$$

(В выражениях (14.32), (14.33) символ  $\mathcal{E}$  означает величину сторонней ЭДС  $\mathcal{E} = E_0 R$ .)

Наконец, искомая поверхностная плотность тока на сфере, выражаемая через магнитное поле (14.26), равна

$$i_\theta(\cos \theta) = -\frac{cE_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi^\circ) b_{2n+1} h_{2n+1}(\xi^\circ) P_{2n+1}^1(\cos \theta). \quad (14.34)$$

4. Анализ полученного решения связан с вычислением коэффициентов  $d_n$ . При этом входящие в (14.31) сферические функции Ганкеля вычисляются по рекуррентным формулам (14.14), а в качестве  $P_{2n+1}^1(0)$  можно использовать значения

$$P_{2n+1}^1(0) = (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \quad (\text{при } n \geq 1), \quad P_1^1(0) = -1, \quad (14.35)$$

где  $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1$ ,  $(2n)!! = 2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2$ . (Выражение (14.35) получается из соотношения (14.10), связывающего присоединенные функции с полиномами Лежандра, и формулы дифференцирования для последних  $(x^2-1) \frac{dP_\ell}{dx} = \ell x P_\ell - \ell P_{\ell-1}$ .)

Для предельного случая  $\xi^\circ = kR \ll 1$ , когда радиус сферы намного меньше длины волны, можно воспользоваться асимптотическим представлением

$$h_\ell \approx \frac{\xi^{\circ \ell}}{(2\ell+1)!!} - i \frac{(2\ell-1)!!}{\xi^{\circ \ell+1}},$$

сохранив в нем наряду с главной мнимой составляющей и малую вещественную добавку. Тогда для интересующих нас величин получаются значения

$$|d_n(\xi^\circ)|^2 = \left( \frac{b_{2n+1} P_{2n+1}^1(0)}{(4n+1)!! (2n+1)} \right)^2 \xi^{\circ 4n+6},$$

откуда видно, что в излучении участвует практически только мультиполь с номером  $\ell = 1$  (диполь) с суммарной интенсивностью

$$\langle J \rangle = (3/16)c\mathcal{E}^2(kR)^4,$$

пропорциональной  $\omega^4$  (при фиксированной амплитуде приложенной ЭДС). При этом для плотности тока на сфере из формулы (14.34) получается выражение  $i_\theta(\cos\theta) =$

$$= \frac{cE_0}{2}\xi^\circ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\xi^{\circ 4n+3}}{((2n+1)(4n+1)!!)^2} - \frac{i}{2n+1} \right] (b_{2n+1})^2 P_{2n+1}^1(0) P_{2n+1}^1(\cos\theta).$$

Отсюда, как и следовало ожидать, видно, что  $Re i_\theta$  фактически определяется первым членом выписанного ряда. Для  $Im i_\theta$  ряд сходится медленно, а в точке  $\cos\theta = 0$  даже расходится. Эта особенность в функции  $Im i_\theta(\theta)$ , не имеющая физических последствий, связана с модельным представлением  $E_{стр}(\theta)$  через дельта-функцию. Это нетрудно увидеть, подставив в граничное условие (14.25) вместо  $E_\theta$  соответствующее выражение, получающееся из второго уравнения системы (14.1). В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} (r Im B_\alpha) |_{r=R} = -\xi^\circ E_0 \delta(\cos\theta).$$

Отсюда видно, что мнимая часть комплексной амплитуды поля  $B_\alpha$  (следовательно, и соответствующая часть функции  $i_\theta(\theta)$ ) имеют особенность в точке  $\theta = \pi/2$ , причем независимо от величины  $\xi^\circ$ . Еще раз подчеркнем, что эта особенность имеет искусственное происхождение.

**5.** При анализе результатов для конечных  $\xi^\circ$  нам понадобятся собственные значения параметра  $\xi^\circ = (\omega/c)R$ , связанные с собственными частотами рассматриваемых осесимметричных мод колебаний поля вне сферы. Собственными являются значения параметра  $\xi^\circ$ , при которых существуют нетривиальные решения (14.17), удовлетворяющие однородным условиям  $E_\theta(R, \theta) = 0$ . Следовательно, для любого фиксированного  $\ell = 2n + 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) искомым набором собственных значений  $\xi^\circ$  составляют корни алгебраического уравнения

$$\frac{d}{d\xi} (\xi h_\ell(\xi)) |_{\xi^\circ} = 0.$$

Нетрудно заметить, что это есть уравнение  $(\ell + 1)$ -ой степени относительно переменной  $1/\xi^\circ$  с чисто мнимыми коэффициентами при четных и вещественными коэффициентами при нечетных степенях  $1/\xi^\circ$ . Таким

образом, если некоторое комплексное число  $x - iy$  является корнем уравнения, то число  $-(x - iy)^* = -x - iy$  также является корнем. Отсюда следует, что из всех  $2(n + 1)$  корней половина, т. е.  $n + 1$  корней, имеют физический смысл, так как им соответствуют частоты  $\omega' + i\omega''$  с положительными вещественными и отрицательными мнимыми частями. Найденные для нескольких первых мультиполей  $\ell = 2n + 1$  собственные значения с положительными вещественными частями вместе с логарифмическим декрементом затухания  $\beta = 2\pi\omega''/\omega'$  представлены в таблице.

$n$	$l$	собственные значения	$\beta$
0	1	$(1/2)(\sqrt{3} - i) = 0,866 - 0,5i$	3,63
1	3	$0,871 - 2,16i$	15,6
		$2,758 - 0,843i$	1,92
2	5	$0,8689 - 3,544i$	25,6
		$2,644 - 2,908i$	6,91
		$4,676 - 1,048i$	1,41
3	7	$6,610 - 1,201i$	1,14
4	9	$8,553 - 1,327i$	0,97
5	11	$10,50 - 1,434i$	0,86

Для  $n = 0, 1, 2$  здесь приведены все  $n + 1$  собственные значения, а для  $n = 3, 4, 5$  — только корни с наибольшими вещественными частями, которые к тому же обладают наименьшими значениями декремента затухания. Именно эти собственные значения с наименьшим для каждого  $n$  декрементом затухания отметим как  $\xi_n^\circ$ , а их вещественные части  $Re \xi_n^\circ$  обозначим через  $\xi_n$ . Они будут использованы при интерпретации результатов вычислений, поэтому еще раз повторим их значения здесь в виде таблицы:

$n$	0	1	2	3	4	5
$\xi_n$	0,866	2,76	4,68	6,61	8,55	10,5

**6.** Вычисления проведены для интервала  $0 \leq \xi^\circ \leq 4\pi$ , где максимальное значение  $\xi^\circ = kR = 4\pi$  соответствует радиусу сферы, вдвое превышающему длину волны. Результаты расчетов представлены графически. На рис.14.3 изображены зависимости  $|d_n(\xi^\circ)|$  для номеров от  $n = 0$  до  $n = 8$ , вносящих учитываемый вклад в излучение для рассматриваемого интервала параметра  $\xi^\circ$ . Видно, что при  $\xi^\circ \ll 1$  излучение определяется лишь одним коэффициентом  $d_0(\xi^\circ)$ , как уже отмечалось выше. При увеличении  $\xi^\circ$  в излучение начинают вносить вклад мультиполи с более высокими номерами. Например, при  $\xi^\circ = \pi$  уже равноценны мультиполи с номерами  $\ell = 1$  и  $\ell = 3$  (диполь и октуполь).

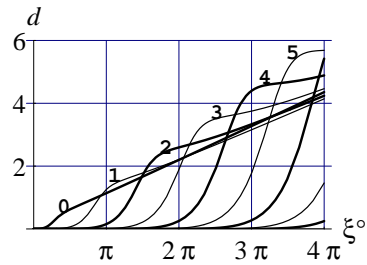


Рис. 14.3

Заметим, что при любом  $\xi^\circ$  на интенсивность излучения рассматриваемой антенны заметное влияние оказывает только ограниченное число мультиполей. Так в рассматриваемом интервале  $\xi^\circ$  мы учитываем номера от  $n = 0$  до  $n = 8$ .

Безразмерная суммарная интенсивность излучения, т. е. функция

$$J = \frac{\langle J \rangle}{(1/2)c\pi\mathcal{E}^2} = \frac{1}{\xi^{\circ 2}} \sum_{n=0}^8 |d_n(\xi^\circ)|^2$$

представлена на рис. 14.4. Здесь, как и на двух следующих графиках, штриховыми линиями указаны положения оговоренных выше собственных значений  $\xi^\circ$  для первых мультиполей с номерами от  $n = 0$  до  $n = 5$ . Из графика видно, что интенсивность излучения с увеличением частоты увеличивается почти монотонно.

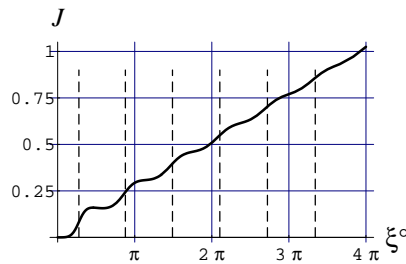


Рис. 14.4

Здесь нет явных резонансных пиков, соответствующих собственным колебаниям поля шара, что объясняется их большими значениями логарифмов.

рифмического декремента затухания. Небольшие волнообразные возмущения хода кривой  $J(\xi^\circ)$  согласуются с положениями собственных частот — в том смысле, что каждой собственной частоте соответствует локально наибольшее значение производной  $dJ/d\xi^\circ$ .

Обратимся к току на сфере, задаваемому выражением (14.34). Отсюда видно, что каждому мультиполю соответствует стоячая волна тока, распределенная по сфере пропорционально  $P_\ell^1(\cos\theta)$  с амплитудой, определяемой произведением  $\Lambda_n(\xi^\circ) = d_n(\xi^\circ)h_{2n+1}^1(\xi^\circ)$ . Так как  $\Lambda_n(\xi^\circ)$  величина комплексная, каждая стоячая волна характеризуется своей начальной фазой, поэтому суммарная плотность тока (14.34) не представляет стоячей волны. Относительный вес каждого мультиполя в распределении тока по сфере характеризуют функции  $|\Lambda_n(\xi^\circ)|$ , представленные на рис. 14.5 (в виде  $\Lambda(\xi^\circ)$ , номера  $n = 0, \dots, 5$  на графиках не проставлены). Каждая из них имеет четко выраженный максимум, находящийся вблизи соответствующей собственной частоты. Таким образом, в распределении тока по сфере резонансные частоты проявляют себя достаточно четко, хотя в результате суммирования по мультиполям эта четкость ослабляется, как видно из рис. 14.6.

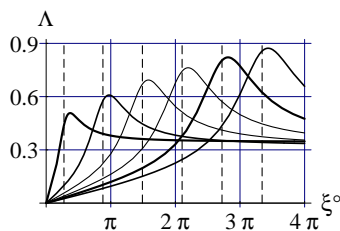


Рис. 14.5

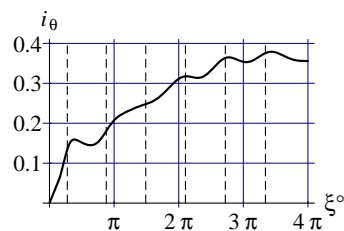


Рис. 14.6

Здесь модуль комплексной амплитуды безразмерной плотности тока в точке  $\theta_0 = \pi/2 + \pi/10$ , т. е.

$$i_\theta(\theta_0) = \left| \sum_{n=0}^8 d_n(\xi^\circ) b_{2n+1} h_{2n+1}^1(\xi^\circ) P_{2n+1}^1(\cos\theta_0) \right|$$

представлена как функция от  $\xi^\circ$ . Угол  $\theta_0$  взят немного в стороне от места приложения сторонней ЭДС, чтобы избежать искусственной трудности, о которой говорилось выше.

Наконец, влияние высших мультиполей на угловую интенсивность излучения проиллюстрируем диаграммами направленности рассматри-

ваемой антенны.

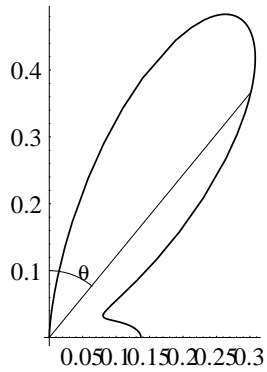


Рис. 14.7

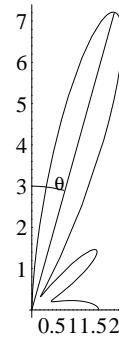


Рис. 14.8

Как отмечалось выше, при  $\xi^0 = \pi$  равноправное участие в излучении принимают мультиполи с номерами  $\ell = 1, \ell = 3$ , а при  $\xi^0 = 1.5\pi$ , как видно из рис. 14.3, равноценны уже три мультиполя. Соответствующим образом это отражается на диаграммах направленности, представленных на рис. 14.7 ( $\xi^0 = \pi$ ) и рис. 14.8 ( $\xi^0 = 1.5\pi$ ) для полусферы  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .



## Библиографический список

*Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.

*Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970.

*Бутиков Е.И.* Оптика. — М.: Высш. шк., 1986.

*Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.

*Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.

*Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Физматлит, 2001.

*Матвеев А.Н.* Оптика. — М.: Высш. шк., 1985.

*Меледин Г.В. и др.* Задачи по электродинамике частиц и полей — / Г.В. Меледин, Г.В. Росляков, Ю.И. Эйдельман. Новосибирск: НГУ, 1986.

*Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитные волны и оптика. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. Ч. 2.

*Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1996. Т. 3. Ч. 2.

*Фейнман Р. и др.* Фейнмановские лекции по физике. — / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М.: Мир, 1966. Т. 5—7.