

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Р У К О П И С Ь

В.И. Яковлев

# Классическая электродинамика

Часть 3

Четырёхмерная электродинамика.

Геометрическая оптика

Учебное пособие

Новосибирск

2014

Яковлев В. И. Классическая электродинамика: Учебное пособие / Новосибир. гос. ун-т, Новосибирск, 2014. 176с.

Книга является продолжением учебного пособия по классической электродинамике для студентов второго курса физического факультета НГУ. Данная её третья часть охватывает релятивистское описание электродинамики и геометрическую оптику. В качестве приложения здесь приведен материал по векторному анализу в объёме, необходимом для изучения электродинамики.

Как и в предыдущих частях основное внимание уделено логической стройности и последовательности изложения материала. В результате критического анализа физического смысла величин, характеризующих процесс излучения релятивистских частиц, значительное упрощение достигнуто в описании данного процесса.

Рецензент:

д.ф.-м.н., проф. А. Г. Погосов

Учебное пособие разработано в рамках реализации Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет" на 2009–2018 годы.

© Новосибирский государственный университет, 2014

# Оглавление

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 15. Специальная теория относительности и электродинамика</b>	
15.1. Постулаты Эйнштейна. Инвариантность интервала. Преобразование Лоренца . . . . .	7
15.2. Четырёхмерное пространство Минковского. Четырёхмерные тензоры . . . . .	9
15.3. Метрический тензор . . . . .	15
15.4. Ковариантность уравнений электродинамики . . . . .	17
15.5. Поле равномерно движущегося заряда . . . . .	18
15.6. Тензор электромагнитного поля. Ковариантный вид уравнений Максвелла . . . . .	20
15.7. Ковариантная форма уравнения движения материальной точки . . . . .	22
15.8. Преобразование Лоренца для поля . . . . .	24
15.9. Инварианты поля . . . . .	27
15.10. Ковариантность выражения для силы Лоренца и законов сохранения . . . . .	28
15.11. Четырёхмерный волновой вектор. Эффект Доплера . . . . .	33
<b>Глава 16. Излучение релятивистских зарядов</b>	
16.1. Потенциалы Лиенара-Вихерта . . . . .	36
16.2. Поля движущегося заряда . . . . .	39
16.3. Четырёхвектор энергии-импульса излучения релятивистской частицы . . . . .	45
16.4. Угловое распределение излучения . . . . .	50
16.5. Торможение излучением . . . . .	55

16.6.	Сила торможения и баланс энергии-импульса при излучении . . . . .	61
16.7.	Сила торможения излучением для заряда, движущегося в заданном электромагнитном поле . . . . .	64
16.8.	Излучение заряда, движущегося в однородном электрическом поле при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$ . . . . .	66
16.9.	Синхротронное излучение . . . . .	69

## Глава 17. Геометрическая оптика

17.1.	Вводные замечания . . . . .	76
17.2.	Уравнение эйконала . . . . .	77
17.3.	Пример прохождения волны в неоднородное полупространство . . . . .	82
17.4.	Второе приближение геометрической оптики для конкретного примера . . . . .	85
17.5.	Световые лучи . . . . .	86
17.6.	Примеры применения уравнения луча . . . . .	92
17.7.	Принцип Ферма . . . . .	97
17.8.	Гомоцентричность и астигматизм оптического пучка . . . . .	100
17.9.	Мнимое изображение, создаваемое тонкой призмой . . . . .	105
17.10.	Преломление луча на сферической поверхности. Параксимальное приближение . . . . .	108
17.11.	О критерии параксиальности . . . . .	115
17.12.	Центрированные оптические системы . . . . .	120
17.13.	Тонкая линза . . . . .	124
17.14.	Кардинальные элементы оптической системы . . . . .	127
17.15.	Оптическая система глаза . . . . .	132
17.16.	Оптические инструменты, вооружающие глаз . . . . .	136

## Глава А. Векторный анализ

A.1.	Ортогональные системы координат . . . . .	140
A.2.	О разложении векторного поля. Комментарии по векторной алгебре . . . . .	145
A.3.	Скалярное поле. Градиент . . . . .	150
A.4.	Векторное поле. Поток. Дивергенция. Теорема Остроградского-Гаусса . . . . .	154
A.5.	Вычисление дивергенции в ортогональных координатах . . . . .	157
A.6.	Циркуляция и ротор поля. Теорема Стокса . . . . .	161
A.7.	Вычисление ротора в ортогональных координатах . . . . .	164

А.8. Оператор набла. Вторые производные. Производные от произведений . . . . . 167

**Глава В. Закон сохранения и плотность импульса электромагнитного поля**

Библиографический список . . . . . 178

## Предисловие

Третья часть учебного пособия по классической электродинамике, предназначенная для студентов второго курса физического факультета НГУ, охватывает релятивистское описание электродинамики и геометрическую оптику.

Вначале здесь повторяются элементы специальной теории относительности, изучающиеся на первом курсе. Затем это повторение дополняется сведениями, относящимися к электродинамике и, в особенности, к излучению релятивистских частиц. Этот раздел содержит критический анализ физического смысла основных величин, характеризующих излучение, приведший к значительному упрощению изучаемого материала. В результате он стал доступным для полноценного освоения на втором курсе.

Глава по геометрической оптике, предназначенная для первоначального знакомства, ограничивается изложением основных принципов данного предмета и не касается трудных вопросов инструментальной оптики. Здесь дано одно простейшее точное решение уравнения эйконала, которое использовано для изучения хода лучей и демонстрации возможности использования приближения геометрической оптики для определения потока вектора Пойнтинга волнового поля в конкретной ситуации.

В качестве приложения в книге приведён материал по векторному анализу в объёме, необходимом для изучения электродинамики, и параграф по импульсу электромагнитного поля. Эти материалы подготовлены для внесения в предполагаемое новое издание части 1 учебного пособия.

Книга, как и две её предыдущие части, написана как пособие для первоначального изучения теоретических основ классической электродинамики. Считая, что понимание теории полезно и для экспериментальной работы, автор стремился сделать изложение по возможности доступным, следя за последовательностью и отсутствием логических пробелов в цепочках рассуждений.

В заключение выражаю искреннюю благодарность директору ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН академику В. М. Фомину и его заместителю проф. А. М. Оришичу за создание оптимальных условий для написания этой книги. Благодарю аспиранта физического факультета Р. Галева за помощь в создании иллюстраций.

## Глава 15

# Специальная теория относительности и электродинамика

Здесь вначале мы вспомним основные положения специальной теории относительности, начиная с основных её постулатов, включая математический аппарат четырёхмерного пространства Минковского. Конечная цель заключается в демонстрации релятивистской инвариантности уравнений Максвелла и определении законов преобразования полей при переходах из одной инерциальной системы отсчёта в другую. Покажем ковариантность выражения для силы Лоренца и выпишем ковариантную форму для уравнения движения материальной точки. Опишем релятивистский эффект Доплера как следствие инвариантности фазы волны ( $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ ).

### 15.1. Постулаты Эйнштейна. Инвариантность интервала. Преобразование Лоренца

1. Специальная теория относительности Эйнштейна основана на двух основополагающих принципах. Первый из них, часто называемый прин-

ципом относительности, или постулатом относительности, представляет собой утверждение, что все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Существование максимальной конечной скорости распространения возмущений (взаимодействий) в природе составляет содержание второго из названных принципов. На основании первого принципа эта максимальная скорость одинакова во всех системах отсчета; это — скорость света в вакууме.

Существование скорости, одинаковой во всех инерциальных системах отсчета, коренным образом противоречащее классическому представлению об абсолютном времени и вытекающему отсюда закону сложения скоростей, приводит к важнейшему результату об инвариантности интервала между любыми событиями и ко всем последующим фундаментальным результатам специальной теории относительности.

**2.** Напомним, что если  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  — координаты двух событий, то интервалом между ними называется величина

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}.$$

Если эти события наблюдать из любой другой инерциальной системы отсчета с координатами, отмечаемыми штрихом, инвариантность интервала означает равенство

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2. \end{aligned}$$

Для бесконечно близких событий квадрат интервала и его инвариантность сводятся к соотношениям

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (15.1)$$

$$ds^2 = ds'^2. \quad (15.2)$$

**3.** Формулы преобразования координат события  $x, y, z, t$  при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой, удовлетворяющие *требованию инвариантности интервала*, составляют преобразование Лоренца и имеют вид

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (15.3)$$

Здесь принято, что инерциальная система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V$  вдоль общего направления осей  $x$  и  $x'$ , как



показано на рис. 15.1, причем оси  $y, y'$  и  $z, z'$  параллельны между собой. Часы в лабораторной ( $S$ ) и подвижной ( $S'$ ) системах согласованы так, что при совпадении точек  $O$  и  $O'$  находящиеся там часы показывали  $t = t' = 0$ . Естественно, в предельном случае  $V/c \rightarrow 0$  формулы (15.3) переходят в формулы преобразования Галилея

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z' \quad \text{с абсолютным временем } t = t'.$$

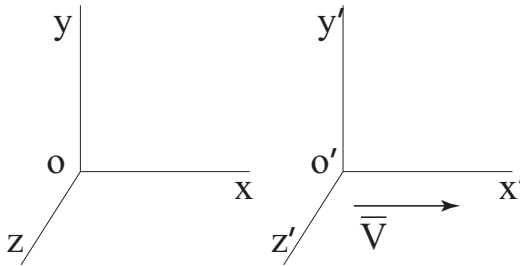


Рис. 15.1

*Упражнение.* Вспомнить понятие собственного времени частицы, движущейся со скоростью  $v$ , и, воспользовавшись соотношениями (15.1), (15.2), получить для него формулу

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (15.4)$$

Доказать неизменность (инвариантность) этой величины при переходе в штрихованную систему координат, т. е.  $d\tau = dt'\sqrt{1 - v'^2/c^2}$ .

## 15.2. Четырёхмерное пространство Минковского. Четырёхмерные тензоры

1. Как мы убедимся ниже, любой физический закон, отвечающий требованию принципа относительности, должен допускать специфическую форму записи в четырёхмерном векторном пространстве, впервые введенном Г. Минковским (пространство Минковского). Четыре координаты некоторого события  $ct, x, y, z$  определяют мировую точку в этом

пространстве; радиус-вектор этой точки задается компонентами  $x^i$  (индекс сверху, пробегает значения 0, 1, 2, 3), причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, в частности, преобразовании Лоренца. Мерой расстояния между двумя близкими точками  $x^i$  и  $x^i + dx^i$  в пространстве Минковского является интервал, квадрат которого (15.1) равен

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (15.5)$$

**2.** Наряду с 4-радиус-вектором  $x^i$  в пространстве Минковского рассматривают *произвольный 4-вектор*  $A^i$  (4-тензор первого ранга) как набор четырёх величин

$$A^0, A^1, A^2, A^3,$$

которые при преобразованиях четырёхмерной системы координат преобразовываются как компоненты 4-радиус-вектора  $x^i$ . Следовательно, при преобразовании Лоренца, т. е. при переходе из одной инерциальной системы в другую, имеем

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (15.6)$$

(Следует помнить, что для обратного перехода из системы  $S$  (лабораторной) в систему  $S'$  формулы имеют аналогичный вид, отличающийся лишь знаком перед  $V/c$ .) В качестве иллюстрации здесь их приведём для компонент 4-радиус-вектора:

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{V}{c}x^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \frac{V}{c}x^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \quad (15.7)$$

Квадрат любого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора в виде

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений применяются два «сорта» компонент 4-векторов, обозначаемые буквами  $A^i, A_i$  с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (15.8)$$

Величины  $A^i$  называются *контравариантными*, а  $A_i$  — *ковариантными* компонентами 4-вектора. С использованием тензорного правила суммирования по дважды повторяющимся (наверху и внизу) индексам, которые при этом называются *мерными*, квадрат 4-вектора тогда представляется в виде  $A_i A^i = A^i A_i$ .

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Произведение  $A^i B_i$  (или  $A_i B^i$ , что то же самое) является 4-скаляром — оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверяется непосредственно, но оно и заранее очевидно (по аналогии с  $A^i A_i$ ) из того, что трансформационные свойства всех 4-векторов (15.6) одинаковы.

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты  $A^1, A^2, A^3$  4-вектора  $A^i$  составляют трёхмерный вектор  $\mathbf{A}$ . Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трёхмерный скаляр. Поэтому 4-вектор часто записывают в виде

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора:  $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$ ,  $A^i A_i = (A^0)^2 - (\mathbf{A})^2$ . Так, для 4-радиус-вектора имеем

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = (ct)^2 - (\mathbf{r})^2.$$

**3.** В дополнение к  $x^i$  в качестве примеров здесь рассмотрим 4-векторы скорости  $u^i$  и ускорения  $w^i$  движущейся материальной точки (частицы) и применим их для получения законов преобразования соответствующих физических величин при переходе из одной системы в другую. Начнем с 4-вектора  $u^i$ , рассмотрев для этого две бесконечно близкие мировые точки, связанные с данной частицей. Разделив приращение её 4-радиус-вектора  $dx^i = (cdt, d\mathbf{r})$  на бесконечно малое собственное время (15.4)  $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$  (4-скаляр), получим искомую величину

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (15.9)$$

определяемую физической скоростью частицы и абсолютной константой  $c$ . Видно, что инвариантный квадрат данного 4-вектора равен

$$u^i u_i = c^2. \quad (15.10)$$

(Заметим, что  $u^i$  нельзя получить в результате естественного, казалось бы, разделения 4-вектора  $dx^i$  на промежуток времени  $dt$ , поскольку последний не является инвариантом, и 4-объект  $dx^i/dt = (c, \mathbf{v})$  не подчиняется закону преобразования (15.6).)

Аналогично можно построить 4-вектор ускорения частицы, разделив приращение  $du^i$  на  $d\tau$ . Заметив при этом, что

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}),$$

несложно показать, что

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \left\{ \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})}{c}, \left[ \mathbf{w} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}}{c^2} \right] \right\}. \quad (15.11)$$

(Пусть это будет упражнение для самостоятельного выполнения.) Таким образом, компоненты 4-ускорения зависят как от скорости  $\mathbf{v}$ , так и ускорения  $\mathbf{w}$  частицы. Только в сопутствующей системе отсчета (отметим символом  $S_0$ ), в которой скорость частицы  $\mathbf{v}_0 = 0$ , а ускорение  $\mathbf{w}_0$ , имеем

$$w^i|_{S_0} = (0, \mathbf{w}_0), \quad (15.12)$$

т. е. временная компонента 4-вектора  $w^i$  равна нулю, а пространственные компоненты составляют так называемое *собственное ускорение* частицы  $\mathbf{w}_0$  (ускорение в сопутствующей системе отсчета). Воспользовавшись инвариантностью квадрата 4-ускорения (15.11), квадрат собственного ускорения  $w_0^2$ , который позже понадобится при исследовании излучения релятивистских частиц, можно выразить через скорость и ускорение в лабораторной системе координат в виде следующей формулы:

$$-\frac{du^i}{d\tau} \frac{du_i}{d\tau} = w_0^2 = \frac{w^2 - \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^2}{c^2}}{(1 - v^2/c^2)^3}. \quad (15.13)$$

Отметим здесь и свойство ортогональности 4-векторов  $w^i$  и  $u^i$ , т. е.

$$w^i u_i = 0. \quad (15.14)$$

В дальнейшем нам понадобится также 4-вектор  $dw^i/d\tau$ . Легко про-

верить, что он имеет следующую структуру

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} = & \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{7/2}} \left\{ \frac{1}{c} [(w^2 + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})(1 - \frac{v^2}{c^2}) + 4(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c})^2], [\dot{\mathbf{w}}(1 - \frac{v^2}{c^2})^2 + \right. \\ & \left. + 3\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c^2}(1 - \frac{v^2}{c^2})\mathbf{w} + \frac{1}{c^2}((w^2 + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}})(1 - \frac{v^2}{c^2}) + 4(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c})^2)\mathbf{v}] \right\}, \end{aligned} \quad (15.15)$$

включающую в свой состав, кроме скорости и ускорения, также производную ускорения, обозначенную здесь как  $\dot{\mathbf{w}} = d\mathbf{w}/dt$ .

*Упражнение.* Воспользоваться формулами преобразования компонент 4-вектора (15.6) применительно к 4-скорости  $u^i$  (15.9) для получения известного читателю релятивистского закона сложения скоростей,<sup>1</sup>

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (15.16)$$

(Здесь и далее необходимо различать символы  $V$  — скорость движения одной инерциальной системы относительно другой, постоянная величина, и  $v$  — скорость движения частицы, необязательно постоянная.)

Для этого в первую из формул (15.6)

$$u^0 = \frac{u'^0 + (V/c)u'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

подставим выражения  $u^0$ ,  $u'^0$ ,  $u'^1$ , следующие из соотношений (15.9), и приведём её к равенству

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1 + v'_x V/c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

После этого из последних формул (15.6) для  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$  получаются искомые выражения (15.16).

Заметим, что данное упражнение мы привели не ради получения результатов (15.16), которые иным способом получаются еще проще. Здесь демонстрируется первый не совсем тривиальный случай использования трансформационных свойств (15.6) для получения формул преобразования физической величины при переходе из одной инерциальной системы в другую.

<sup>1</sup>Формулы преобразования компонент ускорения, которые также можно получить с помощью 4-вектора (15.11), обычно не требуются. Поэтому относительно  $w^i$  ограничимся результатом (15.13).

В качестве последнего примера 4-вектора рассмотрим *четырёхмерный градиент*, как символический вектор

$$\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (15.17)$$

составленный из производных по координатам  $x^i$ . Здесь он представлен своими ковариантными компонентами. А убедиться, что комплекс (15.17) является 4-вектором, легко непосредственно из результатов вычисления производных с учетом формул (15.7). Первые из них принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x'^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial x'^0} - \frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial x'^1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x'^0} \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x'^1} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = -\frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial x'^0} + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial x'^1};$$

для последних справедливы

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x'^3}.$$

Следовательно, рассматриваемый набор производных действительно составляет ковариантный 4-вектор.

4. *Четырёхмерный тензор* (4-тензор) второго ранга  $A^{ik}$  составляют совокупность 16 упорядоченных величин, которые при преобразовании координат преобразовываются как произведение координат  $x^i x^k$ .<sup>2</sup> Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные  $A^{ik}$ , ковариантные  $A_{ik}$  и смешанные  $A^i_k$  (в последнем случае надо, вообще говоря, различать  $A^i_k$  и  $A_i^k$ , т. е. следить за тем, какой именно — первый или второй — индекс стоит вверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного

<sup>2</sup>Закон преобразования компонент тензора можно представить в виде такой формальной формулы

$$A^{ik} = \alpha^i_j \alpha^k_l A'^{jl}, \quad (*)$$

если принять, что формулы (15.6) записаны как  $A^i = \alpha^i_j A'^j$ . Отклоняться в сторону обсуждения этого вопроса здесь нет необходимости, так как формула (\*) нам понадобится лишь один раз для доказательства соотношения (15.73). При этом достаточно будет знать, что все коэффициенты  $\alpha^i_j$  являются константами, связанными с отношением  $V/c$ .

индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак компоненты.

Из компонент тензора  $A^{ik}$  можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при этом, конечно,  $A^i_i = A_i^i$ ). Такую сумму называют следом тензора, а об операции его образования говорят как о свёртывании тензора).

Операцией свёртывания является и рассмотренное выше образование скаляра  $A^i B_i$  из тензора  $A^i B_k$ . Вообще всякое свёртывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например,  $\nabla_i A^k$  есть тензор 2-го ранга, а в результате свёртывания получается 4-скаляр

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A}$$

(4-дивергенция векторного поля  $A^i$ ). Аналогично из тензора 3-го ранга  $\nabla_i \nabla^j A^k$  получается 4-вектор  $\nabla_i \nabla^i A^k = \square A^k$ , где

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (15.18)$$

есть так называемый оператор Даламбера.

Теперь нам понятно, что принцип относительности Эйнштейна об инвариантности законов физики в инерциальных системах отсчета выдвигает требование к форме записи уравнений, описывающих физические законы. Они должны иметь так называемую *ковариантную* форму, представляя собой тензорные равенства с оговоренными выше свойствами. При этом соотношение, справедливое в одной системе, остается справедливым и при переходе к другой координатной системе.

## 15.3. Метрический тензор

Теперь обратим внимание, что введенные в п.2 § 15.2 чисто аксиоматически, ковариантные компоненты вектора  $A_i$  в общем случае криволинейных координат вводятся соотношением

$$A_i = g_{ik} A^k. \quad (15.19)$$

Здесь  $g_{ik}$  — так называемый метрический тензор (симметричный), составленный из коэффициентов квадратичной формы дифференциалов

$dx^i$

$$d\ell^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

определяющей квадрат длины в криволинейных (или косоугольных) координатах.

Разрешённое относительно контравариантных компонент, соотношение (15.19) приобретает вид

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad (15.20)$$

где символом  $g^{ik}$  обозначен обратный тензор

$$g^{ik} = (g_{ik})^{-1}.$$

По определению обратного тензора

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i, \quad (15.21)$$

где  $\delta_l^i$  — единичный 4-тензор, обладающий тем свойством, что для любого вектора  $A$  справедливы равенства

$$\delta_l^i A_i = A_l, \quad \delta_l^i A^l = A^i.$$

Следовательно, компоненты единичного тензора равны

$$\delta_l^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = l, \\ 0, & \text{если } i \neq l. \end{cases}$$

В случае четырёхмерного пространства, когда мы ограничиваемся рассмотрением лишь инерциальных систем отсчета с декартовыми пространственными координатами, в качестве расстояния между близкими точками выступает инвариантный интервал  $ds$ , задаваемый формулой (15.5). При этом тензор  $g_{ik}$  определяется диагональной матрицей с компонентами  $g_{00} = 1$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ,  $g_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ . Поэтому, как нетрудно заметить из соотношения (15.21), тензор  $g^{ik}$  имеет те же компоненты, что и  $g_{ik}$ .

Таким образом, как следует из инвариантности интервала, во всех инерциальных системах отсчета при пользовании декартовыми пространственными координатами  $x^{1,2,3} = x, y, z$  и временем  $x^0 = ct$  метрический тензор имеет компоненты, определяемые следующей таблицей:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15.22)$$



При этом связи (15.19), (15.20) между контравариантными и ковариантными компонентами вектора сводятся к тем соотношениям (15.8), которые выше были приняты чисто из соображений удобства записи формул. Заметим, что

$$g^{ik} = \delta^{ik}, \quad g_{ik} = \delta_{ik}, \quad (15.23)$$

т. е. тензоры  $g^{ik}$ ,  $g_{ik}$  являются результатом поднятия или опускания одного из индексов единичного тензора  $\delta_k^i$ .

## 15.4. Ковариантность уравнений электродинамики

Вернемся к вопросу об инвариантности уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца. Положительный ответ на данный вопрос, полученный в свое время Лоренцом и Пуанкаре, мы здесь примем «на веру» и воспользуемся им для придания уравнениям электродинамики ковариантной формы с одновременным определением законов преобразования электродинамических величин при переходе из одной системы в другую. Ограничимся уравнениями (13.1), (13.2), справедливыми для пустоты, оставляя без внимания вспомогательные поля  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и векторы поляризации  $\mathbf{P}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$ , возникающие при рассмотрении материальных сред.

**Четырехвектор плотности тока.** Начнём с закона сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (15.24)$$

являющегося следствием пары неоднородных уравнений Максвелла (13.2). В правой части этого равенства стоит число ноль. Следовательно, левая часть

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

должна представлять собой 4-скаляр. Отсюда следует, что набор из четырех величин  $c\rho, j_x, j_y, j_z$  составляет 4-вектор

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (15.25)$$

При этом уравнение (15.24) действительно приобретает ковариантный вид

$$\nabla_i j^i = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (15.26)$$

Таким образом, из требования релятивистской инвариантности уравнения (15.24) получаем, что объемные плотности заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  вместе составляют 4-вектор  $j^i$ , и, следовательно, при переходах из системы в систему преобразовываются по соответствующим законам (15.6).

**Четырехмерный потенциал поля.** Обратимся теперь к уравнениям (13.5), (13.6) для векторного и скалярного потенциалов. Перепишем их в виде

$$\begin{aligned} \square\varphi &= \frac{4\pi}{c}c\rho = \frac{4\pi}{c}j^0, \\ \square\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (15.27)$$

подчеркнув, что их правые части составляют 4-вектор. Поскольку оператор Даламбера (15.18) является 4-скаляром, видно, что уравнения (15.27) объединяются в ковариантное уравнение

$$\square A^i = \frac{4\pi}{c}j^i, \quad (15.28)$$

если потенциалы  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  являются временной и пространственной компонентами единого 4-потенциала

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (15.29)$$

При этом условие калибровки (13.4) приобретает ковариантную форму

$$\nabla_i A^i = 0. \quad (15.30)$$

Таким образом, уравнения (13.5), (13.6) и условие (13.4), в совокупности эквивалентные системе уравнений Максвелла, мы привели к ковариантному виду и тем определили трансформационные свойства для скалярного и векторного потенциалов, а фактически и для самих полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ .

## 15.5. Поле равномерно движущегося заряда

Воспользуемся результатом (15.29) для определения полей  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  от точечного заряда  $e$ , движущегося равномерно со скоростью  $\mathbf{V}$ .

В подвижной системе отсчета  $S'$  с началом координат, привязанным к заряду, потенциалы известны:

$$\varphi' = e/r', \quad \mathbf{A}' \equiv 0, \quad \text{где } r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

В лабораторной системе они определяются по формулам преобразования (15.6). Выразив предварительно расстояние  $r'$  через координаты и время  $x, y, z, t$ :

$$r' = \frac{R_*(x, y, z, t)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad R_* = \sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)(y^2 + z^2)}, \quad (1)$$

искомый результат для скалярного и векторного потенциалов можно привести к виду

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{e}{R_*(x, y, z, t)}, \quad \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{V}}{c} \varphi(x, y, z, t). \quad (2)$$

Поля  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  определяются из соотношений (13.3)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Магнитное поле, как следует из последней формулы (2), непосредственно связано с полем  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \left[ \varphi(x, y, z, t) \frac{\mathbf{V}}{c} \right] = \left[ \text{grad } \varphi \times \frac{\mathbf{V}}{c} \right] = \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \right],$$

так как  $\mathbf{V} \parallel \mathbf{A}$ . Для электрического поля (после вычисления соответствующих производных) получается выражение, которое с использованием

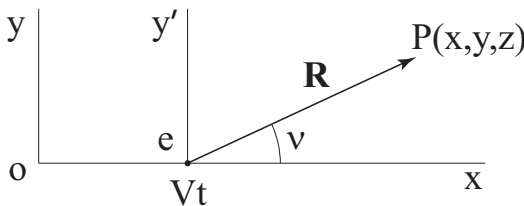


Рис. 15.2

радиуса-вектора

$$\mathbf{R} = (x - Vt)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

от мгновенного положения заряда  $(Vt, 0, 0)$  в момент  $t$  до точки наблюдения  $P$  (на рис. 15.2 точка  $P$  для определённости взята в плоскости  $x, y$ ) можно привести к виду

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{R}}{R_*^3}.$$

Введя угол  $\vartheta$  между скоростью  $\mathbf{V}$  и радиусом-вектором  $\mathbf{R}$ , величину  $R_*$  можно выразить через  $R$ :

$$R_* = R \sqrt{\cos^2 \vartheta + (1 - V^2/c^2) \sin^2 \vartheta} = R \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin^2 \vartheta$$

и окончательные выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  представить в виде

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - V^2/c^2}{(1 - V^2/c^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E} \right]. \quad (15.31)$$

Отсюда видно, что электрическое поле во всем пространстве радиально относительно мгновенного положения движущегося заряда и осесимметрично. По величине  $E_R$  зависит от угла  $\vartheta$  между  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{R}$ . Вдоль линии движения заряда (т. е. при  $\nu = 0, \pi$ ) поле ослаблено в  $1 - V^2/c^2$  раз по сравнению с кулоновым полем  $E_{\text{кул}} = e/R^2$ , а в перпендикулярном направлении усилено в  $\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$  раз. При  $V \sim c$  поле  $E_R$  велико только в узком интервале углов  $\Delta\nu \sim \sqrt{1 - V^2/c^2}$  вблизи экваториальной плоскости  $\nu = \pi/2$ .

Магнитное поле, как следует из второй формулы (15.31), в каждой точке ортогонально электрическому полю и характеризуется силовыми линиями в виде окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных линии движения заряда, и с центрами на этой линии. По величине поле  $B$  пропорционально  $E_R(R, \nu)$ , причем коэффициент пропорциональности равен  $V/c$ .

## 15.6. Тензор электромагнитного поля. Ковариантный вид уравнений Максвелла

В косвенном виде закон преобразования полей заключен в соотношении (15.29). Но нам необходимо иметь прямые законы преобразования  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при переходе из одной инерциальной системы в другую. К этому вопросу мы сейчас и перейдем, определив предварительно ковариантный

вид самих уравнений Максвелла. Для этого заметим, что компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  связаны с результатами дифференцирования элементов 4-вектора  $A^i$ , и, следовательно, являются элементами 4-объекта, образованного из 4-векторов  $\nabla_i$  и  $A^i$ .

Проверкой легко убедиться, что соответствующим 4-объектом является антисимметричный 4-тензор

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad (15.32)$$

называемый тензором электромагнитного поля. Подставив значения  $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$  в определение (15.32), определяем смысл каждого из компонент  $F_{ik}$ . Например,

$$F_{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_1 - \frac{\partial}{\partial x} A_0 = -\frac{\partial A_x}{c \partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x.$$

Результат можно записать в виде таблиц, в которых первый индекс  $i = 0, 1, 2, 3$  нумерует строки, а второй – столбцы:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.33)$$

Отсюда видим, что пространственные компоненты тензора  $F_{ik}$  (т. е. компоненты с  $i, k = 1, 2, 3$ ) связаны с магнитным полем. Компоненты вектора  $\mathbf{E}$  составляют временные компоненты тензора  $F_{ik}$ .

Теперь можем перейти к установлению ковариантного вида уравнений Максвелла. Начнем с неоднородных уравнений (13.2), переписав их в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} j^0, \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Видно, что правые их части составляют 4-вектор  $(4\pi/c)j^i$ , а левые части образованы из производных компонент тензора  $F_{ik}$ , т. е. из элементов тензора 3-го ранга  $\nabla_k F^{lm}$ . Следовательно, чтобы рассматриваемые уравнения сложились в ковариантное 4-уравнение, 4-вектор их левых частей должен быть результатом свёртывания тензора  $\nabla_k F^{lm}$  по паре

индексов  $k, l$  (или по  $k, m$ ). Имея перед глазами таблицу (15.33) для  $F^{ik}$ , легко увидеть, что результат свёртки  $\nabla_k F^{ik}$  обеспечивает 4-вектор со знаками, согласованными с уравнениями (15.34). Следовательно, ковариантная форма уравнений (13.2) имеет вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (15.35)$$

Обратимся теперь к однородным уравнениям (13.1). Оказывается, эта четверка уравнений может быть представлена в виде равенства

$$\nabla_i F_{kl} + \nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li} = 0, \quad (15.36)$$

в котором каждое последующее слагаемое левой части есть результат круговой перестановки индексов предыдущего. Нетрудно увидеть, что данная сумма представляет собой антисимметричный по любой паре индексов тензор третьего ранга; обозначим его  $T_{ikl}$ . (Действительно, если, например, переставим индексы  $i$  и  $k$ , то из  $T_{ikl}$  получим

$$T_{kil} = \nabla_k F_{il} + \nabla_l F_{ki} + \nabla_i F_{lk},$$

только знаком отличающийся от  $T_{ikl}$ , поскольку тензор  $F_{ik}$  является антисимметричным.) Следовательно, тензор  $T_{ikl}$  имеет всего четыре независимых отличных от нуля компонент, за которые можно принять, к примеру,  $T_{012}, T_{013}, T_{023}, T_{123}$ , в каждом из которых среди индексов отсутствуют номера 3, 2, 1, 0 соответственно.

Таким образом, уравнение (15.36) равносильно четырем независимым равенствам. Каждое из них соответствует одному из уравнений (13.1), в чем мы убедимся, вычислив, например,

$$T_{123} = \nabla_1 F_{23} + \nabla_3 F_{12} + \nabla_2 F_{31} = \frac{\partial}{\partial x}(-B_x) + \frac{\partial}{\partial z}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial y}(-B_y) = -\operatorname{div} \mathbf{B}.$$

## 15.7. Ковариантная форма уравнения движения материальной точки

В качестве повторения, относящегося к курсу механики, здесь осуществим релятивистское обобщение классического (ньютонова) уравнения движения материальной частицы с массой покоя  $m$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \quad (\mathbf{p} = m\mathbf{v}). \quad (15.37)$$

### 15.7. Ковариантная форма уравнения движения материальной точки<sup>23</sup>

Для этого возьмем 4-вектор  $p^i = mu^i$ , который с введением обозначений

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (15.38)$$

записывается в виде

$$p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}). \quad (15.39)$$

Обратим внимание, что в предельном случае  $v \ll c$  вектор  $\mathbf{p}$  из (15.38) переходит в классический импульс  $m\mathbf{v}$ , а скаляр  $\mathcal{E}$  приобретает значение  $mc^2 + mv^2/2$ , только на постоянную  $mc^2$  отличающуюся от классической кинетической энергии частицы. Естественно поэтому, что величины (15.38) называются релятивистскими энергией и импульсом частицы, а  $p^i$  является 4-вектором энергии-импульса, для которого инвариантный квадрат длины

$$p^i p_i = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \quad (15.40)$$

Таким образом, релятивистски инвариантный физический закон, обобщающий уравнение (15.37), записывается в следующей ковариантной форме:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i. \quad (15.41)$$

Если 4-силу  $f^i$  представить как

$$f^i = \left( \frac{(1/c)f^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \quad (15.42)$$

временная и пространственная компоненты 4-уравнения (15.41) приобретают вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = f^0, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}. \quad (15.43)$$

Отсюда видно, что трехмерный вектор  $\mathbf{f}$ , определяющий пространственную компоненту  $f^i$ , является силой, действующей на частицу. Поскольку производная  $d\mathcal{E}/dt$  тождественно связана с силой  $\mathbf{f}$  и скоростью  $\mathbf{v}$  соотношением<sup>3</sup>

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}), \quad (15.44)$$

<sup>3</sup>Как следует из инварианта (15.40),  $\mathcal{E}d\mathcal{E}/dt = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/dt$ ; после замен  $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$  и  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$  отсюда получается равенство (15.44)

отсюда следует, что

$$f^0 = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}),$$

и, следовательно, 4-сила (15.42) имеет структуру

$$f^i = \left( \frac{(1/c)(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (15.45)$$

(часто называется 4-силой Минковского), и, как легко убедиться, удовлетворяет условию

$$(f^i u_i) = 0. \quad (15.46)$$

Таким образом, точно так же, как в классической механике уравнение энергии  $\frac{d}{dt}(mv^2/2) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$  является следствием уравнения движения  $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}$ , в релятивистской механике временная компонента 4-уравнения движения (15.41) является простым следствием его пространственных компонент.

В заключение обратимся к заряженной частице, движущейся в заданном электромагнитном поле. Здесь действующей силой является сила Лоренца

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]); \quad (15.47)$$

при этом  $f^0 = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})$ .

Поскольку поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и скорость  $\mathbf{v}$ , входящие в (15.47), являются компонентами 4-объектов  $F^{ik}$ ,  $u^i$ , нетрудно подстановкой убедиться, что 4-сила (15.45) выражается формулой

$$f^i = \frac{e}{c} F^{ik} u_k,$$

а уравнение (15.41) имеет вид

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (15.48)$$

## 15.8. Преобразование Лоренца для поля

Итак, компоненты полей  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  составляют 4-тензор  $F^{ik}$ . Вспомнив, что элементы тензора преобразовываются как произведения координат  $x^i x^k$ , закон преобразования которых известен, легко получить формулы



преобразования для любой из компонент полей. В книге, предназначенной для начинающих, этот элементарный процесс продемонстрируем на двух характерных элементах:  $F^{10}$ , т. е.  $E_x$ , и  $F^{20}$  ( $E_y$ ). Для первого из них выпишем произведение

$$\begin{aligned} x^1 x^0 &= \frac{(x'^1 + (V/c)x'^0)(x'^0 + (V/c)x'^1)}{1 - V^2/c^2} = \\ &= \frac{x'^1 x'^0 + (V/c)(x'^1 x'^1 + x'^0 x'^0) + (V/c)^2 x'^0 x'^1}{1 - V^2/c^2}, \end{aligned}$$

и формулу преобразования получим в виде

$$F^{10} = \frac{F'^{10} + V/c(F'^{11} + F'^{00}) + (V/c)^2 F'^{01}}{(1 - V^2/c^2)}.$$

Так выглядит формула для названного элемента произвольного тензора 2-го ранга. Мы же рассматриваем *антисимметричный тензор* электромагнитного поля, в котором  $F^{00} = F^{11} = 0$ ,  $F^{01} = -F^{10}$ ; для него закон преобразования сводится к

$$F^{10} = F'^{10}, \text{ т. е. } E_x = E'_x.$$

Для  $F^{20}$  формула преобразования, следующая из цепочки

$$x^2 x^0 = x'^2 \frac{x'^0 + (V/c)x'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x'^2 x'^0 + (V/c)x'^2 x'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

имеет вид

$$F^{20} = \frac{F'^{20} + (V/c)F'^{21}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \text{ откуда } E_y = \frac{E'_y + (V/c)B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Аналогичный простой путь приводит к остальным результатам. В совокупности формулы преобразования полей приобретают вид:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + (V/c)B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - (V/c)B'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (15.49)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - (V/c)E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + (V/c)E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (15.50)$$

Здесь мы получили формулы для перехода из инерциальной системы  $S'$  в систему  $S$ . Обратные преобразования получаются из (15.49), (15.50)

перестановкой штрихованных величин с нештрихованными и заменой  $V$  на  $-V$ .

Полученные формулы легче запоминаются, если их представить в виде закона сохранения

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} \quad (15.51)$$

для продольных компонент (т. е. компонент вдоль направления скорости  $\mathbf{V}$ ), и законов преобразования

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (15.52)$$

для поперечных компонент. Эти формулы показывают, что поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  относительны, их величины и соотношения между ними различны в разных системах отсчета. Например, чисто электрическое или чисто магнитное поле в одной системе отсчета представляется совокупностью электрического и магнитного полей в другой системе. Причем, как следует из равенств (15.51), (15.52), они взаимно перпендикулярны между собой и связаны определенным соотношением

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{E}] \quad (\text{если } \mathbf{B}' = 0), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{если } \mathbf{E}' = 0). \quad (15.53)$$

*Пример.* Получить формулы (15.31) для поля равномерно движущегося заряда непосредственно из законов преобразования полей (15.51), (15.52).

В подвижной системе  $S'$ , связанной с зарядом,

$$\mathbf{E}' = e \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' \equiv 0.$$

Тогда для электрического поля в точке  $(x, y)$  лабораторной системы в момент времени  $t$  имеем:

$$E_x = E'_x = \frac{x'}{r'} E'(r') = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{e}{r'^3},$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{y'}{r'} E'(r') \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{e}{r'^3},$$

откуда видно, что вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль радиус-вектора  $\mathbf{R}$  (см. рис. 15.2). Выразив  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  через  $x, y, t$  в виде

$$r' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \sqrt{(x - Vt)^2 + (1 - \frac{V^2}{c^2})y^2},$$

и перейдя к координатам  $R, \nu$ , для искомого поля получаем выражение

$$\mathbf{E}(R, \nu) = \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{1 - V^2/c^2}{(\sqrt{\cos^2 \nu + (1 - V^2/c^2) \sin^2 \nu})^3},$$

совпадающее с первой из формул (15.31). Вторая из них (для магнитного поля) в рассматриваемом случае  $\mathbf{B}' = 0$  у нас уже выписана в цепочке (15.53).

В заключение обратим внимание на то ослабление поля  $E_R$  в  $1 - V^2/c^2$  раз по сравнению с кулоновым  $E_{\text{кул}} = e/R^2$  (на линиях  $\nu = 0, \pi$ ), о котором говорилось в конце параграфа § 15.5.

На первый взгляд данное обстоятельство кажется противоречащим условию сохранения продольной компоненты  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ . Чтобы снять это недоразумение, отметим, что условие  $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$  относится к одним и тем же точкам 4-пространства. При этом, если какая-то точка находится на оси  $x$  на расстоянии  $R$  от заряда, то в системе покоя заряда та же точка находится на большем расстоянии  $R/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  и, следовательно, имеет там поле  $E'_{\parallel} = \frac{e}{R^2} (1 - \frac{V^2}{c^2})$ , равное  $E_{\parallel}$ .

## 15.9. Инварианты поля

Из компонент тензора электромагнитного поля можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе из одной инерционной системы в другую. Мы, например, знаем, что из любого тензора второго ранга свёрткой по паре индексов получается скаляр. Но в рассматриваемом случае тензора  $F_{ik}$  этот инвариант (след тензора) равен нулю и поэтому бессодержателен.

Можно организовать тензор 4-го ранга  $F_{ik}F^{lm}$ , а затем свёрткой по двум парам индексов  $(i, l)$  и  $(k, m)$  получить скаляр  $F_{ik}F^{ik}$ . Для тензора (15.33) этот скаляр, как легко вычислить, равен  $2(B^2 - E^2)$ . Следовательно, разность квадратов напряженностей магнитного и электриче-

ского полей составляет первую инвариантную величину

$$B^2 - E^2 = \text{inv} . \quad (15.54)$$

Второй инвариант обычно получают с использованием так называемого совершенно антисимметричного единичного тензора 4-го ранга  $e^{iklm}$  в виде  $e^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \text{inv}$ . Нам пока этот путь недоступен, поэтому мы здесь приведем только его результат в виде инвариантности скалярного произведения

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = \text{inv} . \quad (15.55)$$

В справедливости этого утверждения  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}')$  можно убедиться непосредственно из законов преобразования (15.51), (15.52). Пусть это упражнение по векторной алгебре будет читателю заданием для самостоятельного выполнения. Работа упростится, если в соотношениях (15.51), (15.52) векторы  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{E}'$ , входящие в векторные произведения, предварительно заменить на  $\mathbf{B}'_{\perp}$ ,  $\mathbf{E}'_{\perp}$ .

Примем без доказательства, что других независимых инвариантов у тензора электромагнитного поля нет.

Из инвариантности двух приведенных выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е.  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе.

Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчета  $E > B$  (или  $E < B$ ), то и во всякой другой системе будет  $E > B$  (или  $E < B$ ). Если в какой-либо системе отсчета векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  образуют острый (или тупой) угол, то они будут образовывать острый (или тупой) угол и во всякой другой системе.

## 15.10. Ковариантность выражения для силы Лоренца и законов сохранения

1. Начатое в § 15.4. рассмотрение ковариантности законов электродинамики завершим ковариантной формулировкой для силы Лоренца и законов сохранения энергии и импульса. Рассмотрим для этого взаимодействие электромагнитного поля с находящейся в нём материальной

средой в виде системы свободных зарядов, занимающих ограниченную область пространства и характеризующихся объемными плотностями заряда и тока  $\rho, \mathbf{j}$ . В этом случае силовое воздействие со стороны поля задается плотностью силы Лоренца

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (15.56)$$

и не усложнено влиянием связанных зарядов и молекулярных токов, возникающих при наличии вещества в рассматриваемой системе. Обратив внимание, что  $\rho, \mathbf{j}$ , входящие в формулу (15.56), составляют 4-вектор  $j^i$  (15.25), а поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — тензор  $F^{ik}$  (15.33), нетрудно сконструировать 4-вектор

$$f^i = \frac{1}{c} F^{ik} j_k, \quad (15.57)$$

пространственные компоненты которого составляют трёхмерный вектор (15.56).<sup>4</sup> Временная компонента

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{1}{c}(F^{01}j_1 + F^{02}j_2 + F^{03}j_3) = \frac{1}{c}[(-E_x)(-j_x) + (-E_y)(-j_y) + (-E_z)(-j_z)] = \\ &= \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})}{c} \end{aligned}$$

связана с мощностью  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})$ , развиваемой электрическим полем над зарядами в единице объема.

Таким образом, в записанном в ковариантной форме (15.57) выражении для плотности силы Лоренца

$$f^i = \left( (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})/c, \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c \right) = \left( (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})/c, \mathbf{f} \right) \quad (15.58)$$

пространственная часть определяет скорость изменения импульса заряженных частиц, приходящихся на единицу объема, а временная часть — скорость изменения их механической энергии. Следовательно, законы сохранения полной энергии (механической и электромагнитной) и полного импульса, полученные ранее порознь (в главе 6 для энергии, в Приложении 2 к этой книге — для импульса) имеет возможность объединить в единый ковариантный закон сохранения.

<sup>4</sup>Имея перед глазами таблицу (15.33), легко выписать, например,

$$f^1 = \frac{1}{c}(F^{10}j_0 + F^{12}j_2 + F^{13}j_3) = \frac{1}{c}[c\rho E_x - B_z(-j_y) + B_y(-j_z)] = \rho E_x + \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_x.$$

2. Для выполнения этой задачи правую часть равенства (15.57) преобразуем с помощью уравнений Максвелла (15.35), (15.36) и приведём к 4-дивергенции симметричного тензора второго ранга. Используя равенство

$$j^k = \frac{c}{4\pi} \nabla_l F^{lk},$$

следующее из уравнения (15.35), для  $f_i$  получаем

$$f_i = \frac{1}{c} F_{ik} j^k = \frac{1}{4\pi} F_{ik} \nabla_l F^{lk},$$

или, после тождественного преобразования,

$$4\pi f_i = \nabla_l (F_{ik} F^{lk}) - F^{lk} \nabla_l F_{ik}. \quad (15.59)$$

Воспользовавшись перестановкой немых индексов  $l \rightleftharpoons k$  и антисимметричностью тензора  $F^{lk}$ , второе слагаемое в (15.59) можно преобразовать

$$F^{lk} \nabla_l F_{ik} = F^{kl} \nabla_k F_{il} = -F^{lk} \nabla_k F_{il} = F^{lk} \nabla_k F_{li}$$

и в результате записать в виде полусуммы

$$F^{lk} \nabla_l F_{ik} = \frac{1}{2} F^{lk} (\nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li}).$$

Как следует из уравнения (15.36),

$$\nabla_l F_{ik} + \nabla_k F_{li} = -\nabla_i F_{kl},$$

так что

$$F^{lk} \nabla_l F_{ik} = -\frac{1}{2} F^{lk} \nabla_i F_{kl} = \frac{1}{2} F^{lk} \nabla_i F_{lk} = \frac{1}{4} \nabla_i (F^{mn} F_{mn}).$$

В результате соотношение (15.59) принимает вид

$$f_i = -\nabla_l \Lambda_i^l, \quad (15.60)$$

где тензор  $\tilde{\Lambda}$  введён компонентами

$$\Lambda_i^l = \frac{1}{4\pi} \left( F_{ik} F^{kl} + \frac{1}{4} \delta_i^l (F^{mn} F_{mn}) \right). \quad (15.61)$$

Для контравариантных компонент из (15.60) имеем

$$f^i = -\nabla_l \Lambda^{li}, \quad (15.62)$$

$$\Lambda^{li} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{lk} F_k^i + \frac{1}{4} g^{li} (F^{mn} F_{mn}) \right) \quad (15.63)$$

(здесь  $g^{li} = \delta^{li}$  — метрический тензор (15.23)).

При написании индексов  $i, l$  одного над другим в обозначении  $\Lambda_i^l$  (15.61) мы исходили из того, что тензор  $\tilde{\Lambda}$  симметричен, в чем легко убедиться из выражения (15.63), опуская и поднимая немой индекс в первом его слагаемом. Кроме того, след тензора равен нулю:

$$\Lambda_i^i = 0 \quad (\text{т. к. } g_i^i = \delta_i^i = 4).$$

Таким образом, 4-вектор  $f^i$  выражен через 4-дивергенцию симметричного тензора  $\Lambda^{ik}$ , называемого *тензором энергии-импульса электромагнитного поля*.

**3.** Выразим компоненты тензора  $\Lambda^{ik}$  через напряженности электрического и магнитного полей. С помощью таблиц (15.33) вначале убедимся, что скаляр, входящий в (15.63),  $F^{mn} F_{mn} = 2(B^2 - E^2)$ . Тогда для временных компонент тензора получим значения:

$$\Lambda^{00} = \frac{1}{4\pi} [-F^{0k} F_k^0 + \frac{1}{2}(B^2 - E^2)] = \frac{1}{4\pi} [E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z + \frac{1}{2}(B^2 - E^2)],$$

т. е.

$$\Lambda^{00} = (1/8\pi)(E^2 + B^2) = w, \quad (15.64)$$

$$\Lambda^{0\alpha} = \Lambda^{\alpha 0} = -\frac{1}{4\pi} F^{0k} F_k^\alpha = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_\alpha. \quad (15.65)$$

Пространственные компоненты  $\tilde{\Lambda}$  образуют трёхмерный тензор с составляющими  $\Lambda^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}$ ,<sup>5</sup> где

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{xx} = -\frac{1}{4\pi} [F^{1k} F_k^1 - \frac{1}{2}(B^2 - E^2)] = -\frac{1}{4\pi} [E_x^2 + B_x^2 - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)]$$

(т. к.  $F^{1k} F_k^1 = E_x^2 - B_z^2 - B_y^2$ ),

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{xy} = \frac{1}{4\pi} (E_x E_y + B_x B_y)$$

и т. д., или

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} [E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (E^2 + B^2)]. \quad (15.66)$$

<sup>5</sup>Для индексов, пробегающих значения 1, 2, 3 в этом параграфе используются греческие буквы.

(Здесь не следует забывать, что компоненты  $g_{\alpha\beta}$  метрического тензора (15.22) равны  $-1$  при  $\alpha = \beta$ , и  $0$  при  $\alpha \neq \beta$ .)<sup>6</sup>

4. Разделив 4-мерный закон сохранения (15.62) на временную и пространственную составляющие, убедимся, что соотношение (15.62) является ковариантной записью известных законов сохранения (6.91), (Приложение 2), и что тензор энергии-импульса  $\tilde{\Lambda}$  имеет следующую пространственно-временную структуру:

$$\Lambda^{ik} = \begin{pmatrix} w & c\mathbf{g} \\ \mathbf{S}/c & -\tilde{T} \end{pmatrix}. \quad (15.67)$$

Действительно, как следует из соотношений (15.58), (15.64) – (15.66), временная составляющая (15.62)

$$\frac{1}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda^{k0} = -\left( \frac{\partial \Lambda^{00}}{c \partial t} + \frac{\partial \Lambda^{\alpha 0}}{\partial x^\alpha} \right) = -\frac{\partial w}{c \partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \right)$$

представляет собой закон сохранения энергии (номер из Части 1)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}),$$

причем вектор Пойнтинга определен составляющими нулевого столбца тензора энергии-импульса:  $S_\alpha = c\Lambda^{\alpha 0}$ .

Пространственные составляющие закона сохранения (15.62)

$$f^\alpha = -\frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda^{k\alpha} = -\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda^{0\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda^{\beta\alpha} \right)$$

описывают закон сохранения импульса электромагнитного поля

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Lambda}^\alpha = -f_\alpha. \quad (15.68)$$

Здесь  $g_\alpha = (1/c)\Lambda^{0\alpha}$ , т. е. вектор плотности импульса поля  $\mathbf{g}$  составляют элементы нулевой строки тензора  $\tilde{\Lambda}$ . Из симметрии  $\Lambda^{0\alpha} = \Lambda^{\alpha 0}$  следует, что  $g_\alpha = (1/c^2)S_\alpha$ , т. е. *плотность импульса электромагнитного поля и вектор Пойнтинга связаны между собой соотношением*

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (15.69)$$

<sup>6</sup>Иногда в формуле (15.66) вместо  $(1/2)g_{\alpha\beta}$  пишут  $-(1/2)\delta_{\alpha\beta}$ ; но в этом случае необходимо специально оговаривать, что  $\delta_{\alpha\beta}$  — символы Кронекера и не являются ковариантными компонентами единичного тензора  $\delta_\alpha^\beta$ .



Равенство (15.68) показывает, что локальное изменение плотности импульса поля в некотором объемчике  $dV$  происходит как за счет передачи импульса заряженным частицам в этом объеме (правая часть равенства), так и за счет переноса импульса через границы  $dV$ . Вектор плотности потока  $\alpha$ -компоненты импульса

$$\Lambda^\alpha = \Lambda^{\beta\alpha} e_\alpha,$$

входящий в (15.68), определен компонентами трёхмерного тензора потока импульса  $\Lambda^{\beta\alpha}$ . Введя тензор натяжений Максвелла

$$T_{\beta\alpha} = -\Lambda^{\beta\alpha} = -\Lambda_{\beta\alpha},$$

определяемый, согласно (15.66), соотношением

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + B^2)]$$

(здесь  $\delta_{\alpha\beta}$  — символы Кронекера), закон сохранения импульса можно переписать в виде

$$f_\alpha = -\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta},$$

совпадающем с равенством (7) из Приложения 2.

Таким образом, поставленная задача нами завершена.

## 15.11. Четырёхмерный волновой вектор. Эффект Доплера

Заметив, что компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  составляют тензор  $F^{ik}$  (или  $F_{ik}$ ), поля в произвольной плоской монохроматической волне, распространяющейся в пустоте с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ , можно представить в виде тензорного поля

$$F^{mn}(\mathbf{r}, t) = f^{mn} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (15.70)$$

задаваемого через соответствующий тензор  $f^{mn}$  с постоянными элементами.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Например, для линейно поляризованной волны с полями  $\mathbf{E}(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{B}(x, t) = B_0 e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{e}_z$  ( $B_0 = E_0$ ), бегущей вдоль оси  $x$ , этот тензор

Из инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразования Лоренца следует, что в другой инерциальной системе  $S'$  рассматриваемые поля также должны составлять плоскую монохроматическую волну с параметрами  $\mathbf{k}'$ ,  $\omega'$  и с тензором

$$F'^{mn}(\mathbf{r}', t') = f'^{mn} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega't')}, \quad (15.71)$$

Из закона преобразования компонент тензора, записанного в виде формулы (\*) из п. 4 § 15.2., следует, что поля (15.70), (15.71) связаны соотношениями

$$f^{mn} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = \alpha_j^m \alpha_l^n f'^{jl} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega't')}.$$

Чтобы эти соотношения выполнялись в любой точке пространства-времени, фазовые множители в обеих частях равенства должны быть одинаковыми:

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}'\mathbf{r}' - \omega't'. \quad (15.72)$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{k}, \omega$  составляют единый четырехмерный волновой вектор

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right); \quad (15.73)$$

при этом равенство (15.72) выражает инвариантность скалярного произведения  $k^i x_i$  двух 4-векторов.

Воспользуемся результатом (15.73) для релятивистского обобщения эффекта Доплера, заключающегося, напомним, в изменении частоты волны при изменении относительной скорости наблюдателя и источника излучения. Пусть волна в «неподвижной» системе  $S$  характеризуется волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ . Тогда параметры волны в системе  $S'$ , движущейся относительно  $S$  со скоростью  $\mathbf{V}$ , определяются из формул преобразования компонент  $k^i$ , обратных к соотношениям (15.6). Рассмотрим световую волну, для которой  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ ,  $|\mathbf{k}'| = \omega'/c$ . Приняв, что векторы  $\mathbf{k}, \mathbf{V}$  составляют плоскость  $(x, y)$  (см. РИС.), и,

в соответствии с (15.33) имеет вид

$$f^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E_0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 & 0 \\ E_0 & E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

следовательно,  $k^3 = k'^3 = 0$ , для остающихся компонент имеем:

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c} \frac{\omega}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \frac{\omega'}{c} \cos \alpha' = \frac{\frac{\omega}{c} \cos \alpha - \frac{V}{c} \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \frac{\omega'}{c} \sin \alpha' = \frac{\omega}{c} \sin \alpha.$$

Разделив последнее из этих равенств на предыдущее, получаем формулу

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{V}{c}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

для преобразования угла между волновым вектором и направлением относительной скорости, которую мы обсуждать не будем. Первое равенство дает формулу

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

для доплеровского смещения с релятивистской поправкой в виде квадратного корня в знаменателе.

В случае  $\alpha = 0$  (наблюдатель вместе с системой  $S'$  движется по направлению волны)

$$\omega' = \omega \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} < \omega,$$

т. е. наблюдаемая частота меньше собственной частоты волны  $\omega$ . При  $\alpha = \pi$  (наблюдатель движется против волны)

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > \omega$$

и имеет место обратное соотношение между частотами.

Если  $\alpha = \pi/2$ , то только благодаря релятивистской поправке возникает различие между  $\omega$  и  $\omega'$  (говорят — имеет место поперечное доплеровское смещение), причем

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \approx \omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right), \quad \frac{\omega' - \omega}{\omega} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c}\right)^2,$$

т. е. относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения  $V/c$ .

## Глава 16

# Излучение релятивистских зарядов

Излучение движущихся зарядов при малых ( $v \ll c$ ) скоростях движения частично было затронуто в главе 13 при рассмотрении дипольного приближения. Теперь мы приступаем к обсуждению названного вопроса, не ограничивая себя условиями на величину скорости. Начнём с рассмотрения скалярного и векторного потенциалов для поля, создаваемого одним зарядом, движущимся по заданному закону.

### 16.1. Потенциалы Лиенара-Вихерта

Для их получения запаздывающие потенциалы (13.7), (13.8), описывающие поле произвольного распределения токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  и зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , перепишем в виде (на примере векторного потенциала):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) \delta\left[\tau - t + \frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{c}\right] d\tau dV', \quad (16.1)$$

предусматривающем интегрирование как по пространству  $dV' = dx' dy' dz'$ , так и по времени  $d\tau$ .<sup>1</sup> Аргумент временной  $\delta$ -функции под интегралом (16.1) выбран так, чтобы результат интегрирования по  $\tau$  для каждого

---

<sup>1</sup>Используемое здесь обозначение  $d\tau$  не имеет отношения к собственному времени, которое в главе 15 связывалось с этим символом.

элемента объема  $dV'$  обеспечивал нужное запаздывание для функции  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ , так что выражение (16.1) тождественно векторному потенциалу (13.7).

В интересующем нас случае одного заряда  $e$ , движущегося по заданному закону  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$ , имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) = e\mathbf{v}(\tau) \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Подставим это выражение в (16.1) и поменяем порядок интегрирования. Наличие пространственной  $\delta$ -функции  $\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)]$  известным образом упрощает интегрирование по объёму и результат для искомой величины приобретает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{e\mathbf{v}(\tau)}{R_e(\mathbf{r}, \tau)} \delta\left[\tau - t + \frac{R_e(\mathbf{r}, \tau)}{c}\right] d\tau. \quad (16.2)$$

Здесь  $R_e(\mathbf{r}, \tau) = R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0(\tau)) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|$  есть расстояние от заряда в момент времени  $\tau$  до точки наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (см. рис. 16.1).

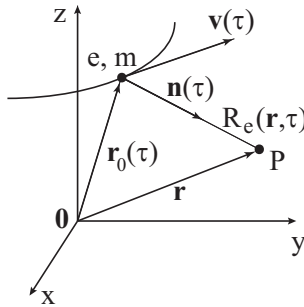


Рис. 16.1

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся свойством дельта-функции  $\delta[f(\tau)]$ , как сложной функции от аргумента  $f(\tau)$  :

$$\delta[f(\tau)] = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{|f'(\tau_0)|}$$

(для аргумента  $f(\tau)$  с одним нулём в точке  $\tau_0$ ). Это свойство означает, что  $\delta[f(\tau)]$  только в точке  $\tau = \tau_0$  отлично от нуля, причём для любой

непрерывной в окрестности  $\tau_0$  функции  $\Phi(\tau)$  справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) \delta[f(\tau)] d\tau = \frac{\Phi(\tau_0)}{|f'(\tau_0)|}.$$

В случае интеграла (16.2) аргументом  $\delta$  — функции является

$$f(\tau) = \tau - t + R_e(\mathbf{r}, \tau)/c.$$

Нуль этой функции (для него здесь вместо  $\tau_0$  используем другой символ  $t'$ ) определяется из уравнения

$$t' + \frac{R_e(\mathbf{r}, t')}{c} = t \quad (16.3)$$

и, следовательно, является аналогом тому моменту времени, который в главе 13 везде отмечался этим символом и назывался моментом времени излучения (при этом  $t$  означает момент времени приема этого излучения в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ).

Производная  $f'(\tau) = 1 + \partial R_e(\mathbf{r}, \tau)/\partial \tau$  выражается через скорость изменения расстояния  $R_e$  от заряда до точки наблюдения  $\mathbf{r}$ . Как нетрудно увидеть из рис. 16.1, эта величина определяется проекцией скорости  $\mathbf{v}(\tau)$  на направление луча от заряда к точке наблюдения, т. е.

$$\frac{\partial R_e(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} = -\mathbf{n}(\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau), \quad (16.4)$$

где  $\mathbf{n}(\tau)$  — единичный вектор в этом направлении, зависящий от положения заряда в момент  $\tau$ . Следовательно,

$$f'(\tau) = 1 - \frac{\mathbf{n}(\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau)}{c}.$$

Таким образом, окончательный результат для вектор-потенциала (16.2) будет такой:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_e(\mathbf{r}, t') \left(1 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right)}.$$

Но мы его с аналогичным результатом для скалярного потенциала запишем покороче:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR_e \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'}, \quad (16.5)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R_e \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \Big|_{t'}, \quad (16.6)$$

подчеркивая, что входящие сюда  $\mathbf{v}$ ,  $R_e$ ,  $\mathbf{n}$  зависят от момента времени  $t'$ , причём  $t'$  и  $t$  связаны соотношением (16.3).<sup>2</sup>

Отметим в заключение важную для излучения релятивистских зарядов формулу

$$dt = dt' \left(1 - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right), \quad (16.7)$$

связывающую промежутки времени излучения  $dt'$  и приёма этого излучения  $dt$ . Формула непосредственно вытекает из соотношений (16.3) и (16.4).

## 16.2. Поля движущегося заряда

Теперь можно перейти к определению полей (13.3)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (16.8)$$

выражающихся через найденные потенциалы. Соответствующие вычисления в данном случае затруднены тем, что потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , как функции  $\mathbf{r}$ ,  $t$ , заданы зависимостями типа  $f(\mathbf{r}, t')$  с функцией  $t'(\mathbf{r}, t)$ , определенной неявным образом соотношением (16.3). Поэтому при вычислении производных по координатам точки  $\mathbf{r}$  и моменту  $t$  наблюдения типа

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

$$\text{grad } f(\mathbf{r}, t') = \text{grad } f(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}} + \frac{\partial f(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} \text{grad } t' \quad (*)$$

нам понадобятся **вспомогательные формулы для величин  $\partial t'/\partial t$  и  $\text{grad } t'$** , вывод которых составляет первый шаг к решению задачи данного параграфа.

---

<sup>2</sup>Не будем забывать, что величины  $R_e$ ,  $\mathbf{n}$  зависят ещё и от  $\mathbf{r}$ . Поэтому по необходимости мы их будем записывать либо в виде  $R_e(t')$ ,  $\mathbf{n}(t')$ , либо с указанием обоих аргументов.

Обратимся к соотношению (16.3). При постоянном  $\mathbf{r}$  отсюда следует связь  $dt' + \partial R_e(\mathbf{r}, t')/\partial t' dt' = dt$  между дифференциалами  $dt'$ ,  $dt$ , которая при учёте (16.4) даёт

$$dt' \left( 1 - \frac{\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \right) = dt. \quad (16.9)$$

Это равенство запишем в виде первого искомого соотношения

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}} \Big|_{t'}. \quad (16.10)$$

Заметим при этом, что формулы (16.9), (16.10) имеют самостоятельное значение, определяя связь между продолжительностями времени излучения ( $dt'$ ) в точке  $\mathbf{r}_0(t')$  и времени наблюдения этого излучения ( $dt$ ) в точке  $\mathbf{r}$ . Для релятивистских частиц различие между этими величинами весьма существенно и во многом определяет характеристики поля излучения, как будет видно из дальнейшего.

Для фиксированного момента  $t$  величина  $t'$ , определяемая уравнением (16.3), зависит от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки наблюдения. Для этой скалярной зависимости мы ищем вектор  $\text{grad } t'$ . Без вычислений понятно, что этот вектор имеет направление, противоположное  $\mathbf{n}(t')$ , поскольку очевидно, что наибо́льший рост  $t'$  (снижение времени запаздывания  $t - t'$ ) достигается при смещении точки  $\mathbf{r}$  в направлении на мгновенное положение излучающего заряда (см. рис. 16.1, принимая, что момент  $\tau$  выбран совпадающим с  $t'$ ). А вычисления сводятся к следующим. Из соотношения (16.3) получаем

$$\text{grad } t' + (1/c) \text{grad } R_e(\mathbf{r}, t') = 0. \quad (**)$$

Согласно правилу (\*)  $\text{grad } R_e(\mathbf{r}, t') = \text{grad } R_e(\mathbf{r}, t')|_{t'=\text{const}} + \frac{\partial R_e}{\partial t'} \text{grad } t'$ , причём  $\text{grad } R_e(\mathbf{r}, t')|_{t'=\text{const}} = \mathbf{n}(t')$ ,  $\frac{\partial R_e}{\partial t'} = -\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')$ . Подстановка этих значений в равенство (\*\*) приводит к второй искомой формуле

$$\text{grad } t' = \frac{-\mathbf{n}/c}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}} \Big|_{t'}. \quad (16.11)$$

Сделаем **второй шаг**. Представив общий множитель выражений (16.5), (16.6) в виде

$$\chi(\mathbf{r}, t') = \frac{1}{R_e(\mathbf{r}, t') - \mathbf{R}_e(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{v}(t')/c}, \quad (16.12)$$



где  $\mathbf{R}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') = R_e(\mathbf{r}, t')\mathbf{n}(t')$ , потенциалы запишем как

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c}\chi(\mathbf{r}, t')\mathbf{v}(t'), \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = e\chi(\mathbf{r}, t').$$

Вычислив соответствующие производные, для поля  $\mathbf{E}$  (16.8) получим промежуточное выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -e\left\{\frac{\dot{\mathbf{v}}(t')}{c^2}\chi(\mathbf{r}, t')\frac{\partial t'}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{v}(t')}{c^2}\frac{\partial t'}{\partial t} + \text{grad } t'\right)\frac{\partial \chi}{\partial t'} + \text{grad } \chi \Big|_{t'=\text{const}}\right\}. \quad (16.13)$$

Используя значения временных и пространственных производных

$$\frac{\partial R_e(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = -\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t'), \quad \frac{\partial \mathbf{R}_e(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = -\mathbf{v}(t')$$

(знак минус во второй формуле связан с тем, что  $\mathbf{R}_e$  есть радиус-вектор от заряда в точку наблюдения, а не наоборот),

$$\text{grad } R_e(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}} = \mathbf{n}(t'), \quad \text{grad } (\mathbf{R}_e(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{v}(t')) = \mathbf{v}(t'),$$

величины  $\frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t')}{\partial t'}$  и  $\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}}$ , входящие в выражение (16.13), приведём к виду

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = [\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t') - \frac{v^2(t') - \mathbf{R}_e(\mathbf{r}, t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t')}{c}]\chi^2(\mathbf{r}, t'), \quad (16.14)$$

$$\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}} = -[\mathbf{n}(t') - (1/c)\mathbf{v}(t')]\chi^2(\mathbf{r}, t'). \quad (16.15)$$

**Последний шаг.** Подставив равенства (16.10), (16.11), (16.12), (16.14), (16.15) в выражение (16.13), искомый результат для поля  $\mathbf{E}$  легко теперь приводится к виду

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R_e^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \Big|_{t'} + \frac{e}{R_e} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \dot{\mathbf{v}}]]}{c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \Big|_{t'}. \quad (16.16)$$

Поле  $\mathbf{B}$ , как

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \text{rot } [\chi(\mathbf{r}, t')\mathbf{v}(t')] = \frac{e}{c} \{\chi(\mathbf{r}, t') \text{rot } \mathbf{v}(t') + [\text{grad } \chi(\mathbf{r}, t') \times \mathbf{v}(t')]\},$$

с учетом

$$\text{rot } \mathbf{v}(t') = [\text{grad } t' \times \dot{\mathbf{v}}(t')],$$

$$\text{grad } \kappa(\mathbf{r}, t') = \text{grad } \kappa(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}} + \frac{\partial \kappa(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} \text{grad } t'$$

сводится к промежуточному выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & \frac{e}{c} \{ \kappa(\mathbf{r}, t') [\text{grad } t' \times \dot{\mathbf{v}}(t')] + \\ & + [(\text{grad } \kappa(\mathbf{r}, t') \Big|_{t'=\text{const}} + \frac{\partial \kappa(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} \text{grad } t') \times \mathbf{v}(t')] \}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда ранее выписанные заготовки (16.11), (16.12), (16.14), (16.15), результат вычислений приводим к виду

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (16.17)$$

Таким образом, магнитное поле везде перпендикулярно к электрическому; по модулю они отличаются между собой, поскольку в общем случае в составе  $\mathbf{E}$  имеется составляющая, направленная вдоль  $\mathbf{n}$ .<sup>3</sup>

Электрическое поле (16.16) состоит из двух частей. Первый член зависит только от скорости (а не от ее ускорения) и с расстоянием меняется как  $1/R_e^2$ . Второй член зависит от ускорения, с расстоянием спадает как  $1/R_e$  и при больших  $R_e$  (т. е. в волновой зоне, как говорилось в главе 13) является превалирующим. Здесь поля  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  взаимно перпендикулярны, равны по модулю и описывают *поле излучения* рассматриваемой частицы с вектором Пойнтинга, направленным радиально и спадающим как  $1/R_e^2$ . Обратим внимание для дальнейшего, что в *ближней зоне* поля имеют более сложную структуру с вектором Пойнтинга, отличным от чисто радиального.

*Пример 1.* Для случая заряда, движущегося с постоянной скоростью, выполнить переход от общих результатов (16.16), (16.17) к формулам (15.31). (Иными словами, формулы (16.16), (16.17) требуется освободить от промежуточных параметров  $\mathbf{n}(t')$ ,  $R_e(t')$ , характеризующих положение заряда в ретардированный момент времени.)

Для этого обратимся к рис. 16.2, где положения заряда в моменты  $t'$ ,  $t$  отмечены точками  $A'$ ,  $A$ , а  $P$  означает точку наблюдения. Рисунок

---

<sup>3</sup>Обратим внимание, что, как следует из полученных формул, поле произвольно движущегося заряда в точке  $\mathbf{r}$ , в момент времени  $t$  определяется положением, скоростью и ускорением заряда в некоторый предшествующий момент времени  $t'$  (часто называемый *ретардированным*), подчиняющийся требованию (16.3). Только в случае равномерно движущегося заряда, как мы видели раньше (см. формулы (15.31)), поля можно связать с точкой, которую заряд занимает в момент наблюдения. Переход от общих формул к результату (15.31) ниже показан в качестве примера.

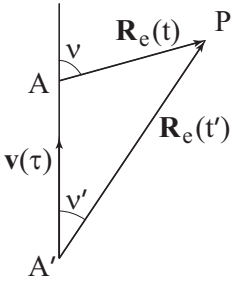


Рис. 16.2

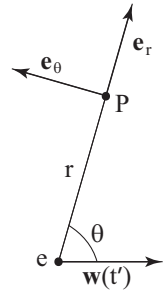


Рис. 16.3

содержит также все необходимые обозначения. С их помощью электрическое поле в точке  $P$ , определяемое первым слагаемым (16.16), представим в виде

$$\mathbf{E}_p(t) = e(1 - \beta^2) \frac{\mathbf{R}_e(t') - R_e(t')\boldsymbol{\beta}}{(R_e(t') - \mathbf{R}_e(t') \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (\text{a})$$

Заметим, что в рассматриваемом случае числитель в выражении  $\mathbf{E}_p$  равен вектору  $\mathbf{R}_e(t)$  :

$$\mathbf{R}_e(t') - R_e(t')\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}_e(t). \quad (\text{б})$$

Действительно, т. к. согласно (16.3)  $R_e(t') = c(t - t')$ , то  $\overrightarrow{R_e(t')}\boldsymbol{\beta} = (t - t')\mathbf{v}$  и при  $\mathbf{v} = \text{const}$  совпадает с вектором перемещения  $A'A$ . Отсюда следует результат (б).

Скалярная величина из знаменателя дроби также выражается через векторы  $\mathbf{R}_e(t)$  и  $\boldsymbol{\beta}$ . Справедливо равенство<sup>4</sup>

$$(R_e(t') - \mathbf{R}_e(t') \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = R_e^2(t)(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta). \quad (\text{в})$$

После подстановки равенств (б), (в), выражение (а) для электрического поля приобретает требуемую форму

$$\mathbf{E}_p(t) = e \frac{\mathbf{R}_e(t)}{R_e^3(t)} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (16.18)$$

<sup>4</sup>Это геометрическое соотношение легко доказывается справа-налево, если предварительно воспользоваться равенством (б) и заменой  $R_e^2(t)\beta^2 \sin^2 \vartheta$  на  $R_e^2(t')\beta^2 \sin^2 \vartheta' = R_e^2(t')\beta^2 - (\mathbf{R}_e(t') \cdot \boldsymbol{\beta})^2$ .

Для получения искомого результата для магнитного поля

$$\mathbf{B}_p(t) = [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_p(t)] \quad (16.19)$$

выражение (а) для поля  $\mathbf{E}_p(t)$  необходимо векторно умножить слева на  $\mathbf{n}(t')$ . После замены

$$[\mathbf{n}(t') \times (\mathbf{R}_e(t') - R_e(t')\boldsymbol{\beta})] = [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{R}_e(t') - R_e(t')\boldsymbol{\beta})]$$

результат приобретает нужную форму. (Последнее равенство доказывается простым раскрытием внутренних скобок с учётом  $\mathbf{R}_e(t') = R_e(t')\mathbf{n}(t')$ .)

Перед тем, как перейти к следующему вопросу, сделаем ещё пример, уместный именно в данном месте. Его результаты в качестве предварительного материала нам понадобятся в § 16.5; там мы их и обсудим.

*Пример 2.* Выписать поля Лиенара-Вихерта для заряда, в момент  $t'$  имеющего скорость и ускорение, параллельные между собой ( $\mathbf{v}(t') \parallel \mathbf{w}(t')$ ). Получить соответствующие выражения для компонент вектора Пойнтинга в окружающем пространстве.

Точку наблюдения  $P$  зададим сферическими координатами  $r, \theta$ , совмещая начало координат с положением заряда в момент  $t'$  и отсчитывая угол  $\theta$  от направления вектора  $\mathbf{w}(t')$  (см. рис. 16.3). Тогда, после замены  $R_e, \mathbf{n}$  соответственно на  $r, \mathbf{e}_r$ , формулы (16.16), (16.17) для электрического и магнитного полей в точке  $P$  в момент времени  $t = t' + r/c$  легко приводятся к виду

$$\mathbf{E}_p = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{B}_p = B_\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\text{где} \quad E_r(r, \theta) \Big|_{t=t'+r/c} = \frac{e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2},$$

$$E_\theta(r, \theta) \Big|_{t=t'+r/c} = B_\alpha(r, \theta) \Big|_{t=t'+r/c} = \left[ \frac{e}{r^2} \beta(1 - \beta^2) + \frac{e}{r} \frac{w}{c^2} \right] \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^3}.$$

Отсюда для компонент вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi} B_\alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{e}_\alpha]$$

получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} S_r(r, \theta) \Big|_{t=t'+r/c} &= \frac{c}{4\pi} \frac{e^2}{r^2} \left[ \frac{\beta(1 - \beta^2)}{r} + \frac{w}{c^2} \right]^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^6}, \\ S_\theta(r, \theta) \Big|_{t=t'+r/c} &= -\frac{c}{4\pi} \frac{e^2}{r^3} \left[ \frac{\beta(1 - \beta^2)}{r} + \frac{w}{c^2} \right] \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^5}. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Заметим, что в приведенных формулах  $\beta, w$  означают  $\beta(t'), w(t')$ . Следует также иметь в виду, что если в момент  $t'$  ускорение направлено против скорости, величина  $\beta$  отрицательна.

### 16.3. Четырѐхвектор энергии-импульса излучения релятивистской частицы

1. Обратимся к излучению заряда, движущегося со скоростью не малой по сравнению со скоростью света. Формулы дипольного излучения, справедливые при  $v \ll c$ , к этому случаю непосредственно неприменимы. Но у нас есть возможность рассматривать частицу в специально выбранной *сопутствующей* системе отсчета  $S_0$ , в которой скорость частицы в некоторый момент времени  $t'_0$  равна нулю, а ускорение  $w_0(t'_0)$  отлично от нуля. Следовательно, излучение в этой системе отсчета дипольно и для энергии излучения справедлива формула (13.32)

$$J|_t = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2(t')}{c^3}. \quad (16.21)$$

Обратим внимание, что в качестве энергии, уносимой излучением за единицу времени, здесь принимается поток вектора Пойнтинга *поля излучения* через сферу большого радиуса  $r$  с центром, совпадающим с положением заряда в момент  $t'$  (время излучения). Рассматриваемый поток вычисляется в момент  $t$  наблюдения излучения, где  $t = t' + r/c$ , и  $J$  называется *полной интенсивностью излучения*.

Это повторение здесь приводится для того, чтобы ниже иметь возможность заметить, что для релятивистского заряда излучение характеризуется энергетической величиной, иначе связанной с вектором Пойнтинга поля излучения.

Для сопутствующей системы отсчета результат (16.21) представим в виде

$$d\mathcal{E}_{(0)} = \frac{2}{3} \frac{e^2 w_0^2(t'_0)}{c^3} dt'_0, \quad (16.22)$$

явно содержащем обозначение  $d\mathcal{E}_{(0)}$  для энергии, излучаемой частицей за время  $dt'_0 = d\tau$ . (Нижним индексом (0) здесь и далее отмечается отнесенность соответствующей величины к системе  $S_0$ .) Отметим, что наряду с энергией излучение уносит от заряда и импульс. Для определения величины полного излучаемого частицей импульса обратим вни-

мание, что излучение, порождённое частицей за время  $dt'_0$ , в последующий момент времени  $t_0$  сосредоточено в сферическом слое толщины  $cdt'_0$ . Центр сферы находится в точке, занимаемой зарядом в момент  $t'_0$ ,

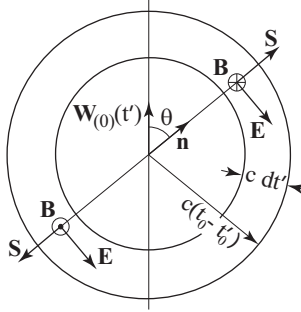


Рис. 16.4

радиус сферы  $r = c(t_0 - t'_0)$  (см. рис. 16.4). Вспомнив, что плотность импульса электромагнитного поля (15.69)

$$\mathbf{g} = (1/c^2)\mathbf{S}$$

пропорциональна вектору Пойнтинга, легко убедиться, что суммарный импульс поля в рассматриваемом слое равен нулю. Следовательно, излучаемый частицей за время  $dt'_0$  импульс

$$d\mathbf{P}_{(0)} = 0. \quad (16.23)$$

Действительно, в поле излучения, определяемом формулами (13. 28)

$$\mathbf{B} = e \frac{[\mathbf{w}_0(t'_0) \times \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}],$$

вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$  равен  $(c/4\pi)B^2\mathbf{n}$ . Поскольку  $B^2 \sim \sin^2\theta$ , в двух симметричных точках, выделенных на рис. 16.4, векторы  $\mathbf{S}$  равны по величине, противоположны по направлению и взаимно компенсируют друг друга, подтверждая тем самым справедливость результата (16.23).

**2.** Чтобы вернуться в лабораторную систему отсчета и здесь определить излученные энергию и импульс, необходимо построить соответствующий 4-вектор

$$\mathcal{P}^i = \frac{dP^i}{d\tau} = \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \right),$$

который бы в сопутствующей системе  $S_0$  принимал значение

$$\mathcal{P}_{(0)}^i = \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{(0)}}{dt'_0}, 0, 0, 0 \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{2}{3} \frac{e^2 w_0^2}{c^3}, 0, 0, 0 \right), \quad (16.24)$$

согласующийся с требованиями (16.22), (16.23). Для этого вспомним, что инвариантный квадрат 4-ускорения (15.13) в сопутствующей системе переходит в квадрат собственного ускорения:

$$\frac{du^k}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} = -w_0^2.$$

Отсюда понятно, что искомый 4-вектор равен

$$\mathcal{P}^i = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} \frac{du^k}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} u^i, \quad (16.25)$$

поскольку в системе  $S_0$ , в которой  $u_{(0)}^i = (c, 0, 0, 0)$ , компоненты  $\mathcal{P}_{(0)}^i$  приобретают необходимые значения (16.24). Полученный вектор

$$\mathcal{P}^i = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dP^i}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt'}, \frac{d\mathbf{P}}{dt'} \right)$$

описывает полную энергию  $(d\mathcal{E}/dt')$  и импульс  $(d\mathbf{P}/dt')$ , излучаемые в единицу времени  $t'$ .

Зная компоненты этого 4-вектора в сопутствующей системе, из законов преобразования (15.6) нетрудно найти искомые величины в лабораторной системе. Для этого сопутствующую систему, движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$  заряда, примем за подвижную систему  $S'$  и будем считать, что скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{V}$  направлена вдоль оси  $x$ . Тогда из первой формулы (15.6) получаем

$$\mathcal{P}^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{(1/c)d\mathcal{E}_{(0)}/dt'_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{d\mathcal{E}_{(0)}}{dt'_0}, \quad (16.26)$$

Последующие три формулы дают равенства

$$\frac{dP_x}{dt'} = \frac{v}{c^2} \frac{d\mathcal{E}_{(0)}}{dt'_0}, \quad \frac{dP_y}{dt'} = 0, \quad \frac{dP_z}{dt'} = 0,$$

составляющие одно векторное соотношение

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathcal{E}_{(0)}}{dt'_0}. \quad (16.27)$$

Итак, как мы выяснили, неравномерно движущийся заряд, кроме энергии, в лабораторной системе отсчета излучает также и импульс, определяемые соотношениями (16.26), (16.27). Представим их в виде следующей пары:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{d\mathcal{E}_{(0)}}{dt'_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2 w_0^2}{c^3}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt'}. \quad (16.28)$$

**3.** Перед тем, как продвинуться дальше, здесь на короткое время остановимся, чтобы разобраться в названиях, встречающихся в литературе применительно к величине  $d\mathcal{E}/dt'$ . Начнем с замечания, что первая из формул (16.28), отвечающая излучению энергии, повторяет структуру соотношения (16.22) и отсюда, казалось бы, следует, что  $d\mathcal{E}/dt'$  имеет смысл полной интенсивности излучения, представляя собой поток вектора Пойнтинга через соответствующую сферическую поверхность, вычисляемый в момент  $t$  приема излучения. Ниже мы увидим, что это предположение неверно. Тем не менее в литературе иногда за этой величиной сохраняют обозначение  $J$  и название «полная интенсивность излучения», неявно оговаривая при этом его отличие от соответствующего потока вектора Пойнтинга. Еще одно название, правда, неудачное — *скорость потери энергии частицей на излучение*, — с давних пор используется применительно к величине  $d\mathcal{E}/dt'$ . Но это — действительно неудачное название, поскольку скорость потери энергии на излучение, т. е. механическая энергия, теряемая излучающей частицей за единицу времени, является независимой энергетической характеристикой процесса излучения. Ниже она будет определена и обозначена символом  $-d\mathcal{E}_{\text{мех}}/dt'$ . В общем случае эти две величины не равны между собой <sup>5</sup>, т. е.  $d\mathcal{E}/dt' \neq -d\mathcal{E}_{\text{мех}}/dt'$ .

Устранение фактического отождествления двух названных энергетических характеристик, имеющего место в литературе <sup>6</sup>, существенно упрощает понимание излучения релятивистских зарядов, как будет

<sup>5</sup>В этом легко убедиться, обратившись к сопутствующей системе, в которой положительная мощность излучения  $(d\mathcal{E}_{(0)}/dt'_0) = (2/3)e^2 w_0^2/c^3$  очевидно не может быть обеспечена за счет механической энергии частицы, которая здесь минимальна (равна  $mc^2$ ), а мощность, развиваемая внешними силами, при нулевой скорости частицы тождественно равна нулю.

<sup>6</sup>Краткую библиографию см. в статье автора (Вестник НГУ, Физика, 2012, вып. 3).



видно из последующего. А пока отметим, что физической сущности  $d\mathcal{E}/dt'$  отвечает имеющееся в литературе (см., например, книги Гинзбурга В. Л. и Джексона Дж.) название *мощность излучения*, и мы им будем здесь пользоваться. Если сформулировать кратко, под этим термином подразумевается энергия, излучаемая частицей за единицу времени  $t'$ . (Более подробно его смысл обсуждается в § 16.5).

4. Как видно из (16.28), мощность излучения есть величина *инвариантная*, определяемая квадратом собственного ускорения. Излучения энергии и импульса связаны между собой вторым из соотношений (16.28). Для частицы, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  и ускорением  $\mathbf{w}$ , квадрат собственного ускорения, как показано в § 15.2, определяется из инвариантного квадрата 4-вектора  $w^i$  и выражается формулой (15.13). Следовательно, мощность излучения такой частицы определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2 w^2 - [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^2/c^2}{3c^3 (1 - v^2/c^2)^3} \Big|_{t'}. \quad (16.29)$$

Для заряда, движущегося в заданном электромагнитном поле, собственное ускорение  $\mathbf{w}_0$  определяется непосредственно через электрическое поле  $\mathbf{E}_{(0)}$  в сопутствующей системе, как

$$\mathbf{w}_0 = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{(0)}.$$

Отсюда, воспользовавшись законами (15.51), (15.52) преобразования продольной и поперечной компонент электрического поля, для  $w_0^2$  получаем

$$w_0^2 = \frac{e^2}{m^2} (\mathbf{E}_{(0)})^2 = \frac{e^2}{m^2} \left\{ \frac{(\mathbf{E}_\perp + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{c})^2}{1 - v^2/c^2} + E_\parallel^2 \right\}.$$

Простые преобразования

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{E}_\perp + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{c} \right)^2 + E_\parallel^2 &= \left( \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{c} \right)^2 = \left( \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{c} \right)^2, \\ E_\parallel^2 \left( \frac{v^2}{c^2} \right) &= \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{v} \right)^2 \frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2, \end{aligned}$$

позволяют результат привести к виду

$$w_0^2 = \frac{e^2}{m^2} \frac{(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c)^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}/c)^2}{1 - v^2/c^2}. \quad (16.30)$$

Отсюда для мощности излучения получаем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \frac{(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c)^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}/c)^2}{1 - v^2/c^2} \Big|_{t'}. \quad (16.31)$$

Следовательно, полное излучение энергии за время пролета частицы через данное электромагнитное поле определяется интегралом

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c)^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}/c)^2}{1 - v^2/c^2} \Big|_{t'} dt'. \quad (16.32)$$

Выражение для полной потери импульса  $\Delta\mathbf{P}$ , как следует из второй формулы (16.28), отличается лишним множителем  $\mathbf{v}/c^2$  под знаком интеграла.

## 16.4. Угловое распределение излучения

Для получения формулы для углового излучения воспользуемся выражениями для полей Лиенара-Вихерта. На большом расстоянии от частицы (в волновой зоне) поле  $\mathbf{E}$  определяется вторым слагаемым формулы (16.16). Используя обозначения  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$  и раскрыв двойное векторное произведение, отсюда получаем

$$\mathbf{E} \Big|_t = \frac{e}{c^2 R_e} \left( \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\mathbf{w})}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^3} - \frac{\mathbf{w}}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^2} \right) \Big|_{t'}.$$

Тогда для интенсивности излучения в телесный угол  $d\Omega$

$$dJ = \frac{c}{4\pi} E^2 R_e^2 d\Omega$$

результат можно привести к виду

$$dJ \Big|_t = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{w^2}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^4} + 2 \frac{(\mathbf{n}\mathbf{w})(\boldsymbol{\beta}\mathbf{w})}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^5} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^6} \right\} \Big|_{t'} d\Omega, \quad (16.33)$$

в котором все входящие величины  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}$  берутся в ретардированный момент времени  $t'$ .

Заметим, что распределение (16.33) зависит от двух угловых координат, отсчитываемых соответственно от направления скорости  $\mathbf{v}(t')$  (эту

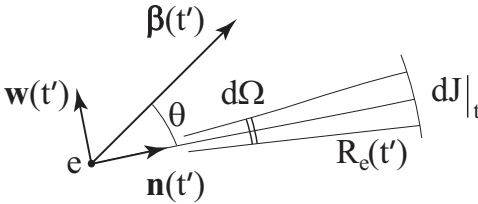


Рис. 16.5

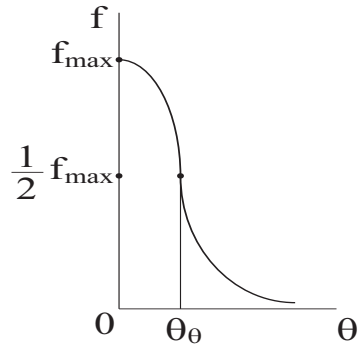


Рис. 16.6

координату мы обозначим символом  $\theta$ , как показано на рис. 16.5) и от вектора ускорения  $\mathbf{w}(t')$ . Поэтому в общем случае его анализировать довольно сложно. Только в ультрарелятивистском случае  $1 - \beta \ll 1$  рассматриваемое распределение принимает характерный вид с резким максимумом в направлении движения частицы с узким интервалом углов  $0 < \theta < \theta_0$ . (Из выражения (16.33) видно, что при  $\beta \approx 1$  максимум действительно достигается на направлении  $\theta = 0$ , на котором все знаменатели минимальны.) Для оценки угловой ширины рассматриваемого максимума обратимся к функции

$$f(\theta) = \frac{1}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{1 - \beta \cos \theta},$$

при значениях  $\beta \approx 1$  имеющей вид, схематически показанный на рис. 16.6. Значение угла  $\theta_0$ , отмеченного на рисунке, при котором функция  $f$  от максимального значения  $f(0) = f_{\max} = 1/(1 - \beta) \gg 1$  спадает до его половины, как легко убедиться,<sup>7</sup> определяется соотношением

$$\theta_0 = \sqrt{2(1 - \beta)}. \tag{16.34}$$

Отсюда имеем, что при увеличении угла  $\theta$  от 0 до значения  $\theta_0$  входящая в (16.33) дробь с минимальной степенью уменьшается в  $2^4 = 16$  раз. Поэтому понятно, что ультрарелятивистская частица излучает в основном в направлении своего движения в интервал углов  $0 \leq \theta < \theta_0$ .

<sup>7</sup>Для этого необходимо воспользоваться разложением  $\cos \theta_0 \approx 1 - (1/2)\theta_0^2$ , справедливым при  $\theta_0 \ll 1$ .

Часто малый параметр  $1 - \beta$  выражают через релятивистский фактор  $\mathcal{E}/mc^2$ , определяемый равенством  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . При  $\beta \approx 1$  из определения  $(1 - \beta)(1 + \beta) = 1/\gamma^2$  следует

$$1 - \beta = 1/2\gamma^2, \quad (16.35)$$

так что соотношение (16.34) для предельного угла принимает вид

$$\theta_0 = \frac{1}{\gamma}. \quad (16.36)$$

Обратим внимание, что в частном случае, когда скорость и ускорение частицы направлены вдоль одной прямой, распределение интенсивности (16.33) зависит только от одной угловой координаты  $\theta$  и сводится к простой формуле

$$dJ = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} d\Omega, \quad (16.37)$$

справедливой независимо от того, вдоль или против скорости направлено ускорение. Распределение (16.37) осесимметрично, обращается в нуль в направлениях по и против скорости, максимальная интенсивность  $dJ/d\Omega = \max$  достигается при угле  $0 < \theta_* < \pi/2$ , для которого, как легко убедиться,

$$\cos \theta_* = \frac{\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1}{4\beta}. \quad (16.38)$$

В зависимости от значения  $\beta$  диаграмма направленности (16.37) (см. рис. 16.7) меняется от чисто дипольной (при  $\beta \ll 1$ ) до остронаправ-

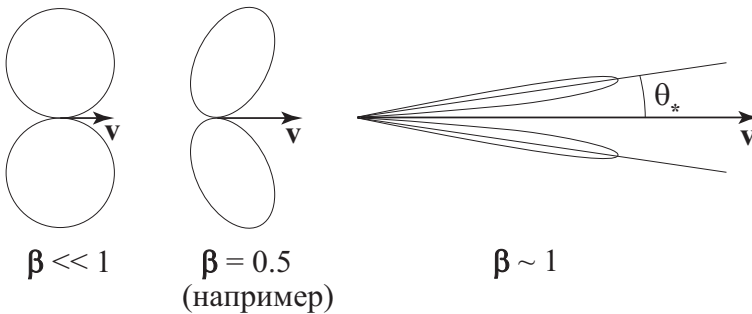


Рис. 16.7

ленной при  $\beta \rightarrow 1$ , когда угол  $\theta$  максимального излучения спадает до

значения<sup>8</sup>

$$\theta_* \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\gamma}.$$

Заметим, что перечисленный выше разброс в названиях  $d\mathcal{E}/dt'$  является отражением того факта, что в процессе релятивистского обобщения результатов (16.22), (16.23) физический смысл энергетической характеристики излучения  $d\mathcal{E}/dt'$  конкретно не выявляется. Её *величина* для заряда, движущегося с произвольными скоростью  $\mathbf{v}$  и ускорением  $\mathbf{w}$ , согласно (16.28) связанная с квадратом собственного ускорения, определяется формулой (16.29). Но для понимания физического смысла величины  $d\mathcal{E}/dt'$  важно установить её связь с полем излучения заряда. Именно эта связь определяет физический смысл мощности излучения.

Выше уже отмечалось, что поток вектора Пойнтинга поля излучения через сферу радиуса  $R_e(t')$ , вычисленный в момент  $t$ , не совпадает с  $d\mathcal{E}/dt'$ . Для получения потока энергии, соответствующего мощности излучения  $d\mathcal{E}/dt'$ , обратим внимание на то, что импульс излучения, испущенный зарядом в течение времени  $dt'$ , через элемент поверхности сферы проходит за промежуток времени (16.7)  $dt = dt' (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))$ , отличный от  $dt'$  и зависящий от положения элемента  $ds$ . Поэтому естественно ожидать, что энергия, излученная зарядом за время  $dt'$ , через поверхность сферы радиуса  $R_e(t')$  (в волновой зоне) проходит в виде потока энергии

$$d\mathcal{E} = \int_{(4\pi)} \left. \frac{dJ}{d\Omega} \right|_{t'} d\Omega dt = \int_{(4\pi)} \left. \frac{dJ}{d\Omega} (1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) \right|_{t'} d\Omega dt'$$

и, таким образом, мощность излучения выражается интегралом

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int_{(4\pi)} \left. (dJ/d\Omega) \right|_{t'} (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) d\Omega, \quad (16.39)$$

отличным от интенсивности излучения

---

<sup>8</sup>Для получения этой оценки левую часть равенства (16.38) заменим на  $1 - (1/2)\theta_*^2$ , а в правой  $\beta^2, \beta$  заменим тождественными величинами  $1 - 1/\gamma^2, 1 - (1 - \beta)$  и для последней воспользуемся оценкой (16.35). В результате (16.38) приведём к требуемому виду

$$1 - \frac{1}{2}\theta_*^2 \approx 1 - \frac{1}{10} \frac{1}{\gamma^2}.$$

$$J \Big|_t = \int_{(4\pi)} \frac{dJ}{d\Omega} \Big|_{t'} d\Omega.$$

После подстановки выражения (16.33) равенство (16.39) приводится к виду

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int_{(4\pi)} \left\{ \frac{w^2}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^3} + 2 \frac{(\mathbf{n}\mathbf{w})(\boldsymbol{\beta}\mathbf{w})}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^4} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n}\mathbf{w})^2}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^5} \right\} \Big|_{t'} d\Omega. \quad (16.40)$$

Естественно, высказанное предположение, что *мгновенное* значение мощности излучения определяется *видоизменённым потоком энергии* поля излучения через поверхность сферы, взятым в виде (16.39), требует доказательства. Для этого достаточно показать совпадение результата интегрирования (16.40) с величиной (16.29), что здесь продемонстрируем для общего случая ускорения  $\mathbf{w}$ , имеющего как продольную, так и поперечную компоненты по отношению к скорости заряда.

Пусть  $\boldsymbol{\beta}(t') = \beta(t')\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{w} = w_{\parallel}\mathbf{e}_z + w_{\perp}\mathbf{e}_x$ . При этом выражение (16.29) сводится к следующему:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{w_{\parallel}^2 + w_{\perp}^2(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^3} \Big|_{t'}. \quad (16.41)$$

Обратимся к интегралу (16.40). Входящий в него единичный вектор  $\mathbf{n}(t')$ , идущий от заряда в момент  $t'$  к точке наблюдения, задается углами  $\theta, \alpha$  сферической системы координат, привязанной к векторам  $\boldsymbol{\beta}(t')$ ,  $\mathbf{w}_{\perp}(t')$ , так что

$$\mathbf{n} = \sin\theta(\cos\alpha\mathbf{e}_x + \sin\alpha\mathbf{e}_y) + \cos\theta\mathbf{e}_z.$$

Элемент телесного угла  $d\Omega$  равен  $\sin\theta d\alpha d\theta$ . Заметим, что зависимость подынтегрального выражения от угловой координаты  $\alpha$  обусловлена лишь множителем  $\mathbf{n}\mathbf{w} = \sin\theta\cos\alpha w_{\perp} + \cos\theta w_{\parallel}$  и его квадратом. Отсюда нетрудно увидеть, что после интегрирования по переменной  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$  интеграл из (16.40) сводится к одномерному интегралу

$$\int_0^{\pi} 2\pi \left\{ \frac{w_{\parallel}^2 + w_{\perp}^2}{(1 - \beta^2)^3} + \frac{2\beta\cos\theta w_{\parallel}^2}{(1 - \beta\cos\theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2)[(1/2)\sin^2\theta w_{\perp}^2 + \cos^2\theta w_{\parallel}^2]}{(1 - \beta\cos\theta)^5} \right\} \sin\theta d\theta.$$

После интегрирования для  $d\mathcal{E}/dt'$  получается выражение, совпадающее с (16.29). Следовательно, интегральное представление  $d\mathcal{E}/dt'$  в виде (16.39) действительно соответствует локальной величине (16.29).

Как видим, в общем случае величины  $J$  и  $d\mathcal{E}/dt'$  отличаются между собой. Только для классической частицы  $\beta \ll 1$  (дипольное излучение) интеграл (16.39) сводится к соответствующему интегралу для  $J$ . При этом интенсивность излучения и мощность излучения между собой равны, зависят от величины ускорения и выражаются формулой (16.24).

## 16.5. Торможение излучением

1. Раньше, в §16.3, затрагивался вопрос о потере механической энергии движущимся зарядом за счет излучения. Было отмечено, что скорость потери энергии на излучение и мощность излучения между собой не равны. Теперь заметим, что названная потеря энергии движущегося заряда может происходить только в результате действия силы торможения. Следовательно, для независимого вычисления скорости потери энергии на излучение необходимо знать эту силу, обусловленную излучением.

Как оказывается, электрическое поле, порождённое неравномерно движущимся зарядом, способно оказать обратное силовое действие на заряд. Эта сила и будет силой торможения излучением. Для ее определения, следовательно, необходимо исследовать распределение поля  $\mathbf{E}$  движущегося заряда в близкой окрестности его мгновенного положения.

Ниже показано, что искомое распределение для случая движения с малыми скоростями  $v \ll c$  имеет вид:

$$\mathbf{E}_p(t) = \frac{e\mathbf{n}}{R_e^2} - \frac{e[\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}]}{2c^2 R_e} + \frac{2e\ddot{\mathbf{v}}}{3c^3}. \quad (16.42)$$

Здесь поле в точке  $P$  в момент времени  $t$  выражено через геометрические параметры  $R_e(t)$ ,  $\mathbf{n}(t) = \mathbf{R}_e(t)/R_e(t)$  (см. рис. 16.8), связывающие точку наблюдения с положением заряда в момент наблюдения, а также первую и вторую производные скорости  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ . Обратим внимание, что выражение (16.42) не содержит вектора скорости  $\mathbf{v}(t)$  (в окончательном ответе  $v/c$  принят равным нулю), нет здесь также слагаемых, исчезающих при  $R_e(t) \rightarrow 0$ .

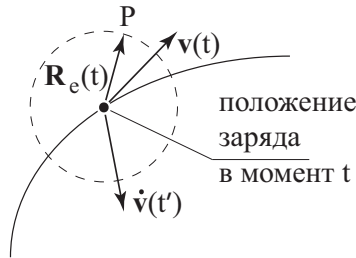


Рис. 16.8

В принципе искомое распределение содержится в формуле (16.16) поля Лиенара-Вихерга, в которой  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  выражается через положение, скорость и ускорение за-

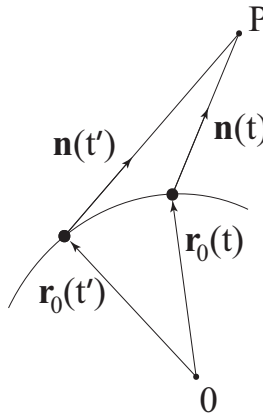


Рис. 16.9

ряда в ретардированный момент времени  $t'$  (см. рис. 16.9), определяемый соотношением (16.3)

$$t' + R_e(t)/c = t.$$

При  $v \ll c$  положение заряда в момент  $t'$  мало отличается от его положения в момент  $t$ , т. е.

$$|\mathbf{r}_0(t) - \mathbf{r}_0(t')| \simeq v(t - t') = v \frac{R_e(t')}{c} \ll R_e(t') \text{ (а также } R_e(t)). \quad (*)$$

Следовательно, геометрические параметры  $\mathbf{n}(t')$ ,  $R_e(t')$ , а также  $\mathbf{v}(t')$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(t')$ , входящие в (16.16), близки к соответствующим величинам в момент  $t$  и выражение (16.16) можно разложить в ряд Тейлора относительно момента времени  $t$  и придти к нужному ответу. Однако этот путь слишком долгов.



2. Искомый результат проще получается непосредственно из запаздывающих потенциалов (12.7), (12.8)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV', \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV'. \quad (16.43)$$

Для этого примем во внимание, что условие (\*) в данном случае одного заряда можно переписать в виде

$$R_e/c \ll T, \quad (**)$$

поскольку в качестве характерного времени изменения поля в точке  $P$  здесь выступает  $T = R_e/v$ . Воспользовавшись условием (\*\*), подынтегральные функции  $\rho(\mathbf{r}', t - R/c)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)$  разложим по степеням  $R/c$  (с удержанием третьей степени). После подстановки результата разложения

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t - R/c) = \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} (-R/c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t^2} (R/c)^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t^3} (-R/c)^3 \end{aligned}$$

и аналогичного выражения для  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)$ , интегралы (16.43) перейдут в соответствующие суммы. Одну из них здесь приведём:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\mathbf{r}', t) dV' + \\ + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t) dV' - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t) dV'. \end{aligned} \quad (16.44)$$

(Выражение для  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  получается отсюда простой заменой  $\rho(\mathbf{r}', t)$  на  $(1/c)\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ .)

Вспомним далее, что для излучателя в виде рассматриваемого точечного заряда соответствующие функции имеют вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = ev(t)\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)], \quad \rho(\mathbf{r}', t) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)].$$

Подставим  $\rho(\mathbf{r}', t)$  в выражение (16.44). Поскольку второе слагаемое этой суммы обращается в нуль, в результате интегрирования получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R_e(\mathbf{r}, t)} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_e(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} R_e^2(\mathbf{r}, t). \quad (16.45)$$

(Здесь символ  $R_e = R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0(t)}$  выписан с указанием аргументов  $\mathbf{r}, t$ , чтобы подчеркнуть, что радиус-вектор  $\mathbf{R}_e = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$  соединяет мгновенное положение заряда в момент  $t$  с положением точки наблюдения  $P$  (см. рис. 16.9).)

Аналогичное выражение для векторного потенциала приобретает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}(t)}{cR_e(\mathbf{r}, t)} - \frac{e}{c^2}\dot{\mathbf{v}}(t) + \frac{e}{2c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(R_e(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(t)\right) - \frac{e}{6c^4}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(R_e^2(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(t)\right). \quad (16.46)$$

Теперь можно приступить непосредственно к вычислению поля<sup>9</sup>  $\mathbf{E}_p(t) = -(1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t) - \text{grad } \varphi$ . Предварительно, не приводя вычислений, заметим, что последние два члена разложения в выражении (16.46) порождают только малый вклад в поле  $\mathbf{E}_p(t)$ , не учитываемый в главном результате (16.42). (Соответствующие слагаемые либо обращаются в нуль при  $R_e \rightarrow 0$ , либо малы из-за  $v/c \ll 1$ .)

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_p(t) = & -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e\mathbf{v}(t)}{cR_e(\mathbf{r}, t)} - \frac{e}{c^2}\dot{\mathbf{v}}(t)\right] - e \text{grad } \frac{1}{R_e(\mathbf{r}, t)} - \\ & - \frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{grad } R_e(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3} \text{grad } R_e^2(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

После вычисления соответствующих производных, замены  $\mathbf{n} = \mathbf{R}_e/R_e$  и исключения малых слагаемых, пропорциональных  $v/c$ ,  $(v/c)^2$ , приходим к искомому результату (16.42).

Первое из слагаемых в (16.42) — это кулоновское поле заряда, второе описывает добавку, обусловленную ускорением заряда (говорят — «инерция поля»). Эти поля при приближении к частице стремятся к бесконечности. Из (16.42) видно, что вблизи мгновенного положения заряда имеется еще одно дополнительное поле — однородное, не зависящее от расстояния  $R_e$ . Создаваемая этим полем сила

$$\mathbf{f}_\tau = \frac{2}{3}\frac{e^2\ddot{\mathbf{v}}}{c^3} \quad (16.47)$$

(т. е. сила самодействия заряда через посредство излученного чуть раньше электромагнитного поля) и есть сила торможения излучением. Как

<sup>9</sup>Вспомним, что приближенные выражения для скалярного и векторного потенциалов можно использовать для определения полей  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  только в случае, если  $\varphi, \mathbf{A}$  совместно удовлетворяют условию (12.4) калибровки Лоренца. В качестве упражнения убедитесь, что выражения (16.45), (16.46) удовлетворяют этому условию.

следует из приведенного анализа, формула (16.47) дает точное выражение для силы торможения в той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится (т. е. в сопутствующей системе).

3\*. Необходимо заметить, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения не является вполне удовлетворительным и приводит к результату, например, явно противоречащему закону сохранения энергии. Рассмотрим уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (16.47),

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Его общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \tau \dot{\mathbf{v}}(0)(e^{t/\tau} - 1) \quad \left(\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} = \frac{2}{3} \frac{r_e}{c}\right),$$

использовав в качестве произвольных постоянных скорость  $\mathbf{v}(0)$  и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}(0)$  заряда в начальный момент времени. Видно, что кроме естественного движения с постоянной скоростью  $\mathbf{v}(0)$ , решением допускается также движение с ускорением, экспоненциально растущим с характерным временем  $\tau$  (для электрона имеющим порядок  $r_e/c \approx 10^{-23}c$ ). Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-либо поле, по выходе из поля должен неограниченно самоускоряться, что несовместимо с законом сохранения энергии.

Для устранения выявленного несоответствия принимают, что сила торможения (16.47) не является самостоятельной. Её следует рассматривать только вместе с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля, причем по величине она должна быть мала по сравнению с последней.

Для выяснения условий, при которых сила торможения (16.47) удовлетворяет названному требованию, обратимся к движению заряда во внешнем поле. При малых скоростях уравнение движения без учёта силы торможения имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Продифференцировав по времени, отсюда получаем выражение для второй производной скорости по времени, в сопутствующей системе отсчёта равное

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}].$$

Подставив сюда  $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}/m$ , получаем

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2 c} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Соответственно этому сила торможения (16.47) будет состоять из двух членов:

$$\mathbf{f}_T = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2 c^4} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (16.48)$$

Если в качестве внешнего поля примем поле электромагнитной волны частоты  $\omega$ , то  $\dot{\mathbf{E}} = \partial\mathbf{E}/\partial t$  пропорциональна  $\omega\mathbf{E}$  и, следовательно, первый член порядка величины  $\frac{e^3\omega}{mc^3} E$ ; второй же — порядка  $\frac{e^4}{m^2 c^4} EB$ . Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой  $eE$  даёт, во-первых:

$$\frac{e^2}{mc^3} \omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны  $\sim c/\omega$ ,

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \quad (16.49)$$

Таким образом, формула (16.47) для силы торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда  $e^2/mc^2$  (по сравнению с классическим радиусом электрона  $r_e$  в случае электрона). Видно отсюда, что расстояния порядка  $e^2/mc^2$  оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой.

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения (16.48) с силой  $eE$ , находим условие

$$B \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}. \quad (16.50)$$

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле было не слишком велико. Поля порядка  $(mc^2/e^2)^2 e$  тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям.

Напомним во избежание недоразумений, что полученные ограничения относятся к той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится.

## 16.6. Сила торможения и баланс энергии-импульса при излучении

1. Знание силы торможения позволяет приступить к установлению связи между теми двумя энергетическими характеристиками излучения, которые назывались в начале предыдущего параграфа. Для этого заметим, что потеря механической энергии  $\mathcal{E}_{\text{мех}} = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$  заряда за счёт излучения может происходить только в результате действия силы торможения. Мощность  $(\mathbf{f}_T \cdot \mathbf{v})$ , развиваемая этой силой, однозначно определяет скорость изменения энергии  $\mathcal{E}_{\text{мех}}$  за счёт излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{мех}}}{dt'} = \mathbf{f}_T(t') \cdot \mathbf{v}(t'). \quad (16.51)$$

Используя точное выражение (16.47) для силы торможения излучением, справедливое в сопутствующей системе отсчета, из (16.51) получим независимое соотношение для скорости потери энергии на излучение

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\text{мех}}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t')) = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{\mathbf{v}}(t'))^2 - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt'}(\mathbf{v}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t')),$$

которое можно представить в виде следующего баланса энергии при излучении:

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\text{мех}}}{dt'} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'} + \frac{d\mathcal{E}_B}{dt'}. \quad (16.52)$$

Отсюда видно, что скорость потери энергии на излучение не совпадает с мощностью излучения, причем разница между ними прячется в виде энергии поля в ближней зоне (*буферное поле* по Мешкову-Чирикову). Видно, что скорость передачи энергии буферному полю определяется выражением

$$\frac{d\mathcal{E}_B}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt'}(\mathbf{v}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t')). \quad (16.53)$$

Подчеркнём еще раз, что выражения (16.47), (16.53) справедливы для случая  $v \ll c$ , для которого, заметим,  $dt'$  и  $d\tau$  равны.

2. Теперь несложно этот баланс энергии (16.52) обобщить для релятивистских скоростей в виде четырёхмерного баланса энергии-импульса, включающего в себе 4-силу торможения  $f_T^i$ , 4-вектор скорости передачи энергии-импульса буферному полю  $\mathcal{W}_B^i$ , а также известный нам 4-вектор  $\mathcal{P}^i$  (16.25).

Для выполнения этой задачи вспомним, во-первых, что любая 4-сила имеет структуру, определяемую формулой (15.45). Отсюда следует, что при  $v/c \ll 1$  искомая 4-сила

$$f_{\text{T}}^i = ((1/c)(\mathbf{f}_{\text{T}} \cdot \mathbf{v}), \mathbf{f}_{\text{T}}) \quad (16.54)$$

складывается из элементов, для этого случая уже определённых выражением (16.47). Во-вторых, соотношение (16.52) перепишем с использованием определения (16.51) и выражения (16.53) в виде

$$\frac{1}{c}(\mathbf{f}(t') \cdot \mathbf{v}(t')) = -\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt'} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \left( \frac{2e^2}{3c^3} \mathbf{v}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t') \right) \quad (16.55)$$

и заметим, что каждый элемент этого равенства представляет собой временную компоненту соответствующего 4-вектора

$$f_{\text{T}}^i, \quad -\mathcal{P}^i \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt'} \left( \frac{2e^2}{3c^3} \frac{du^i}{dt'} \right).$$

(Последний из них получается из выражения (15.11) для 4-ускорения  $w^i = du^i/dt'$ , для которого  $w^0 = (1/c)(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})$ .) Из сказанного напрашивается предположение, что соотношение (16.55) является временной компонентой четырёхмерного равенства

$$f_{\text{T}}^i = -\mathcal{P}^i + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2}. \quad (16.56)$$

В его справедливости легко убедиться, обратив внимание на значения пространственных компонент входящих сюда 4-векторов. Все они известны при  $v \ll c$  и в сопутствующей системе отсчета задаются соотношениями <sup>10</sup> (16.47), (16.24) (т. е.  $\mathcal{P} = 0$ ) и  $(2e^2/3c^3)\dot{\mathbf{w}} = (2e^2/3c^3)\ddot{\mathbf{v}}$ . Вместе они удовлетворяют (16.56).

Таким образом, мы выяснили, что в сопутствующей системе все компоненты 4-вектора  $f_{\text{T}}^i$  и известных 4-векторов  $\mathcal{P}^i$ ,  $d^2 u^i/d\tau^2$  связаны соотношением (16.56) Следовательно, оно справедливо в любой системе отсчета. Подставив сюда выражение (16.25) для  $\mathcal{P}^i$ ,  $f_{\text{T}}^i$  приведём к виду

$$f_{\text{T}}^i = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2} \frac{du^k}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} u^i \right). \quad (16.57)$$

При этом легко убедиться, что  $f_{\text{T}}^i$  действительно представляет 4-силу, т. е. удовлетворяет необходимому условию (15.46)

$$f_{\text{T}}^i u_i = 0.$$

<sup>10</sup>Последнее из них следует из выражения (15.15) для 4-вектора  $d^2 u^i/d\tau^2$ .

Пусть это будет *упражнением* для самостоятельного выполнения.<sup>11</sup> В окончательном виде 4-мерный баланс энергии-импульса при излучении заряда запишем в виде

$$f_{\tau}^i = -\mathcal{P}^i - \mathcal{W}_B^i, \quad (16.58)$$

где

$$\mathcal{W}_B^i = \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_B}{d\tau}, \frac{d\mathbf{P}_B}{d\tau} \right) = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} \quad (16.59)$$

есть 4-вектор скорости передачи энергии-импульса от заряда буферному полю.

Таким образом, принятие скорости потери энергии частицей в качестве *независимой* энергетической характеристики процесса излучения, связанной с мощностью силы торможения, дало нам возможность вполне элементарно получить 4-мерный баланс энергии-импульса при излучении заряда. Выражение для 4-силы торможения излучением возникает при этом просто в качестве промежуточного результата.

*Упражнение* Воспользовавшись структурой (15.45) для 4-силы, из результата (16.57) получить выражение для трехмерной силы торможения  $\mathbf{f}_{\tau}$  релятивистской частицы через параметры движения  $\mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w}$  и  $\ddot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{w}}$ .

После подстановки выражений (15.13), (15.15), (15.9) и приведения подобных членов, пространственные компоненты 4-силы (16.57) приводят к искомому результату

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\tau} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3} \left\{ \left[ \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}}}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + 3 \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c^2} \right)^2 \right] \mathbf{v} + \right. \\ \left. + 3 \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{w} + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2 \dot{\mathbf{w}} \right\}. \end{aligned} \quad (16.60)$$

<sup>11</sup>Указание. Вспомнить инвариантное значение (15.10) квадрата 4-скорости, воспользоваться преобразованием

$$\frac{d^2 u^i}{d\tau^2} u^i = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{du^i}{d\tau} u^i \right) - \frac{du^i}{d\tau} \frac{du_i}{d\tau}$$

и ортогональностью (15.14) 4-векторов скорости и ускорения  $(du^i/d\tau)u_i = 0$ .

## 16.7. Сила торможения излучением для заряда, движущегося в заданном электромагнитном поле

Теперь выразим силу торможения через напряженности полей, в которых частица движется. Для этого, в качестве первого шага, формулу (16.57) перепишем, выразив  $du^i/d\tau$ ,  $d^2u^i/d\tau^2$  через тензор действующего на частицу внешнего электромагнитного поля. Как следует из уравнения движения (15.48),

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{ik} u_k \quad \left( \frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_k{}^l u_l = \frac{e}{mc} F_{kl} u^l \right).$$

Отсюда

$$\frac{du^k}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} = \frac{e^2}{m^2 c^2} (F^{kl} u_l) (F_{km} u^m).$$

Для вычисления второй производной  $d^2u^i/d\tau^2$  заметим, что в общем случае  $F^{ik}$  зависит от координат  $x^i$ , так что

$$\frac{dF^{ik}}{d\tau} = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{d\tau} = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u^l.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2u^i}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} \left( \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u^l u_k + F^{ik} \frac{du^k}{d\tau} \right) = \frac{e}{mc} \left( \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u^l u_k + \frac{e^2}{m^2 c^2} F^{ik} F_{kl} u^l \right). \quad (16.61)$$

После подстановки полученных выражений формула (16.57) приобретает искомый вид

$$f_{\tau}^i = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \frac{e}{mc} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u^l u_k + \frac{e^2}{m^2 c^2} F^{ik} F_{kl} u^l + \frac{e^2}{m^2 c^4} (F^{kl} u^l) (F_{km} u^m) u^i \right\}. \quad (16.62)$$

Перейдём к завершающему этапу. Обозначив входящие в (16.62) 4-векторы как

$$K^i = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u^l u_k, \quad M^i = F^{ik} F_{kl} u^l, \quad N^i = (F^{kl} u^l) (F_{km} u^m) u^i,$$

искомое выражение запишем в виде линейной комбинации их пространственных компонент

$$\mathbf{f}_{\tau} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( \frac{2e^3}{3mc^4} \mathbf{K} + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} \mathbf{M} + \frac{2e^4}{3m^2 c^7} \mathbf{N} \right).$$



Пространственные компоненты  $K^i$  распишем подробно, начиная с  $K^1$  :

$$\begin{aligned}
 K^1 &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x^l} u^l u_0 + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^l} u^l u_2 + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^l} u^l u_3 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ \left( \frac{\partial E_x}{c \partial t} c + \frac{\partial E_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} v_y + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial E_x}{\partial z} v_z \right) \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \left( \frac{\partial B_z}{c \partial t} c + \frac{\partial B_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} v_z \right) \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial B_y}{c \partial t} c + \frac{\partial B_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial B_y}{\partial z} v_z \right) \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} = \\
 &= \frac{c}{1-v^2/c^2} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \right]_x + \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]_z \frac{v_y}{c} - \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]_y \frac{v_z}{c} \right\}.
 \end{aligned}$$

Проведя аналогичные вычисления для  $K^2$ ,  $K^3$ , убеждаемся, что пространственные компоненты  $K^i$  составляют вектор

$$\mathbf{K} = \frac{c}{1-v^2/c^2} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \right] + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]] \right\}.$$

Для векторов  $M^i$ ,  $N^i$  простые шаги приводят к результатам:

$$\mathbf{M} = \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{c} \mathbf{E} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{c} [\mathbf{B} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{v}]] \right\},$$

$$\mathbf{N} = -\frac{c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \left\{ (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}])^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 \right\} \mathbf{v}.$$

(При вычислении последнего полезно обратить внимание, что коэффициент при  $u^i$  представляет собой квадрат 4-вектора  $F^{kl} u_l$ , т. к.  $F_{km} u^m = F_k{}^m u_m$ .) Таким образом, окончательное выражение приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_\tau &= \frac{2e^3}{3mc^3} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} \right] + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]] \right\} + \\
 &+ \frac{2e^4}{3m^2 c^4} \left\{ [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{c} \mathbf{E} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{c} [\mathbf{B} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{v}]] \right\} - \\
 &- \frac{2e^4}{3m^2 c^5} \frac{1}{1-v^2/c^2} \left\{ (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}])^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 \right\} \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{16.63}$$

(Не содержит описки, имеющейся в «Теории поля» Ландау-Лифшица на стр. 288.)

Обратим внимание, что когда скорость частицы приближается к скорости света, главным в формуле (16.63) становится<sup>12</sup> последнее слагаемое, пропорциональное  $\gamma^2$ :

$$\mathbf{f}_T = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\gamma^2\left\{(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}])^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2\right\}\frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (16.64)$$

Соответственно и в выражении (16.62) можно пренебречь двумя первыми членами, составляющими, как видно из (16.61), 4-вектор  $d^2u^i/d\tau^2$ . Это значит, что в балансе энергии-импульса (16.58) слагаемое  $\mathcal{W}_B^i$  (16.59), ответственное за передачу 4-импульса от заряда буферному полю, можно опустить. Таким образом, *в ультрарелятивистском случае мощность излучения полностью обеспечивается силой торможения.* (Иначе говоря, отождествление скорости потери энергии частицей и мощности излучения справедливо.) В этом нас убеждает и непосредственное сравнение результата  $-(\mathbf{f}_T \cdot \mathbf{v})$ , получающегося из соотношения (16.64), с мощностью излучения (16.31).

## 16.8. Излучение заряда, движущегося в однородном электрическом поле при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$

Обратимся к особому случаю, когда магнитное поле отсутствует и частица движется в электрическом поле со скоростью  $\mathbf{v}$ , параллельной  $\mathbf{E}$ . В этом случае последние два члена в выражении (16.63) сокращаются и, если, к тому же, электрическое поле стационарно, сила торможения равна

$$\mathbf{f}_T = \frac{2e^3}{3mc^3} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \frac{2e^3}{3mc^3} \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} v_x \frac{dE_x}{dx} \mathbf{e}_x. \quad (16.65)$$

При этом, как видно из выражения (16.31), интенсивность излучения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} E_x^2$$

не зависит от энергии частицы.

Наибольший интерес представляет случай однородного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{const}$ , когда независимо от величины скорости сила  $\mathbf{f}_T = 0$ . Тогда,

<sup>12</sup>Кроме особого случая  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = 0$

## 16.9. Излучение заряда, движущегося в однородном электрическом поле 67

как следует из баланса энергии-импульса (16.58), мощность излучения и импульс, уносимый излучением за единицу времени  $t'$ , т. е.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} E_0^2, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt'}, \quad (16.66)$$

обеспечиваются полностью за счет буферного поля и никак не связаны с потерей энергии-импульса излучающей частицы. При этом, конечно, возникает вопрос, каким образом в буферном поле оказываются запасенными необходимые энергия и импульс, и откуда они берутся. Ниже мы увидим, что эти энергия и импульс составляют просто промежуточное звено в процессе передачи энергии-импульса от ускоренно движущегося заряда полю излучения. Излучаемые энергия и импульс на самом деле отнимаются от излучающего заряда, но этот «отъем» происходит не тогда, когда заряд движется в однородном электрическом поле. Все происходит до и после попадания заряда в область однородного поля. Естественно, эта область не может считаться бесконечной.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим движение заряда вдоль оси  $x$ , где электрическое поле  $\mathbf{E} = E_x e_x$ , причем на некотором интервале от  $x_1$  до  $x_2 = x_1 + l$  это поле однородно и равно  $E_0$ . До вхождения в эту область и после нее заряд движется в неоднородном поле  $E_x(x)$ , где сила торможения отлична от нуля.

Излученные за время  $(t'_2 - t'_1)$  пребывания заряда в области однородного поля  $(x_1, x_2)$  энергия и импульс согласно (16.66) равны

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'}(t'_2 - t'_1) = \frac{2e^4}{3m^2c^3} E_0^2(t'_2 - t'_1), \quad (16.67)$$

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt'} \int_{t'_1}^{t'_2} v(t') dt' = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt'}(x_2 - x_1) = \frac{2e^4}{3m^2c^5} E_0^2(x_2 - x_1). \quad (16.68)$$

Отметим, что протяженность однородного поля  $\Delta x = l$  и время  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  пребывания заряда в этой области, входящие в формулы (16.67), (16.68), связаны соотношением

$$\Delta x = \frac{c}{eE_0} (\sqrt{p_2^2 + m^2c^2} - \sqrt{p_1^2 + m^2c^2}), \quad p_2 = p_1 + eE_0\Delta t', \quad (16.69)$$

где  $p_1, p_2$  — импульс частицы на входе и выходе из зоны однородного поля.

Эта связь определяется релятивистским уравнением движения заряда  $dp/dt' = eE_0$  под действием постоянной силы  $f_x = eE_0$ , откуда  $p(t') = p_1 + eE_0(t' - t'_1)$ . Воспользовавшись соотношением

$$\frac{v}{c} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}, \quad (16.70)$$

связывающим скорость и импульс материальной частицы, для  $\Delta x = \int_{t'_1}^{t'_2} v(t') dt'$  имеем

$$\Delta x = c \int_0^{\Delta t'} \frac{p(\tau) d\tau}{\sqrt{p^2(\tau) + m^2 c^2}} = c \int_0^{\Delta t'} \frac{p_1 + eE_0 \tau}{\sqrt{(p_1 + eE_0 \tau)^2 + m^2 c^2}} d\tau.$$

Отсюда получается требуемое соотношение (16.69).

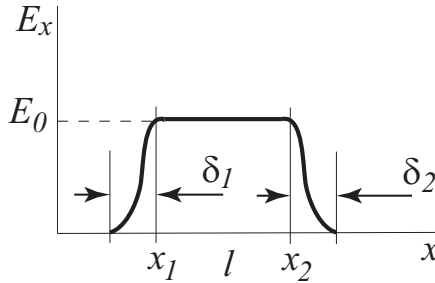


Рис. 16.10

Теперь обратимся к области неоднородного поля и вычислим обусловленные силой торможения потери здесь энергии и импульса заряженной частицы. На характер поля вне области однородности наложим непринципиальное ограничение, упрощающее процесс вычислений. Будем считать, что неоднородное поле занимает узкие зоны ширины  $\delta \ll l$ , примыкающие к области  $x_1 < x < x_2$ , в которых  $E_x$  резко падает от  $E_0$  до нуля, как схематически изображено на рис. 16.10. В силу этого энергию и импульс, излученные на этих отрезках траектории, можно не принимать во внимание, а при вычислении силы торможения по формуле (16.65) скорость частицы  $v_x$  в пределах каждого из этих слоев можно считать неизменной и равной  $v_1, v_2$ , соответственно связанной с импульсами  $p_1, p_2$ . Следовательно, суммарные изменения механических энергии и импульса частицы за счет силы торможения, определяемые интегралами по времени  $\Delta \mathcal{E}_{\text{мех}} = \int f_{\text{Тх}} v(t') dt'$  и  $\Delta p_{\text{мех}} = \int f_{\text{Тх}} dt'$ , после перехода к интегрированию по координате  $x$  сводятся к

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{мех}} = \int_{x_1 - \delta}^{x_1} f_{\text{Тх}} dx + \int_{x_2}^{x_2 + \delta} f_{\text{Тх}} dx, \quad \Delta p_{\text{мех}} = \int_{x_1 - \delta}^{x_1} \frac{f_{\text{Тх}}}{v_x} dx + \int_{x_2}^{x_2 + \delta} \frac{f_{\text{Тх}}}{v_x} dx.$$

В результате интегрирования получаем

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{мех}} = \frac{2e^3}{3mc^3} E_0 \left( \frac{v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \right) = \frac{2e^3}{3mc^3} E_0 (p_1 - p_2),$$

$$\Delta p_{\text{мех}} = \frac{2e^3}{3mc^3} E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \right) =$$

$$= \frac{2e^3}{3mc^3} E_0 \frac{\sqrt{p_1^2 + m^2 c^2} - \sqrt{p_2^2 + m^2 c^2}}{mc},$$

где последний шаг выполнен с помощью тождества

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{mc}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}},$$

следующего из соотношения (16.70). После замены

$$p_1 - p_2 = -eE_0 \Delta t', \quad \sqrt{p_1^2 + m^2 c^2} - \sqrt{p_2^2 + m^2 c^2} = -\frac{eE_0}{c} \Delta x \quad (\text{см. (16.70)}),$$

окончательный результат для рассматриваемых величин приобретает вид

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{мех}} = -\frac{2e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \Delta t', \quad \Delta p_{\text{мех}} = -\frac{2e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \Delta x.$$

Сравнение их с величинами (16.67), (16.68) подтверждает, что потерянные за счет силы торможения энергия и импульс частицы действительно в точности компенсируют энергию и импульс, унесенные излучением, порожденным частицей за время движения в однородном поле. И это несмотря на то, что в одной из двух областей неоднородного поля (на входе в область  $E_x = E_0$  или на выходе из нее, в зависимости от знака заряда) «сила торможения» (16.65) фактически является ускоряющей силой. Последнее обстоятельство, следовательно, не должно нас смущать, поскольку суммарно действие силы  $\mathbf{f}_T$  обеспечивает нужную компенсацию энергии и импульса.

## 16.9. Синхротронное излучение

1. Так называют излучение релятивистских электронов, движущихся по круговой орбите в магнитном поле.<sup>13</sup> Название связано с тем,

<sup>13</sup>В литературе встречается и другое название этого излучения — магнитотормозное.

что впервые излучение ускоренно движущихся электронов *визуально* наблюдалось («электронный свет») в камере циклического ускорителя — синхротрона (США, 1947).

Экспериментальные и теоретические исследования, посвященные синхротронному излучению (СИ), в настоящее время составляют самостоятельный раздел физики и имеют обширный спектр применений в физическом эксперименте. Физика синхротронного излучения приобрела важное значение также в астрофизике при анализе природы нетеплового излучения, возникающего в космическом пространстве.

**2.** Наше краткое обсуждение СИ касается тех его простейших свойств, которые объясняются на основе классической электродинамики и опираются на результаты предыдущих параграфов. Начнём рассмотрение с движения релятивистского заряда с массой  $m$  и зарядом  $e$  в однородном магнитном поле. Ограничимся частным случаем движения по

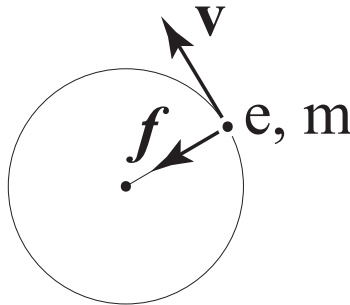


Рис. 16.11

круговой орбите в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  $\mathbf{B}$  (см. рис. 16.11). Поскольку сила Лоренца

$$\mathbf{f} = (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

действующая на заряд, перпендикулярна скорости и работы над зарядом не совершает, его энергия и релятивистская масса  $m\gamma$  не меняются со временем. При этом релятивистское уравнение движения  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$  переходит в классическое уравнение

$$m\gamma\mathbf{w} = \mathbf{f}.$$

Следовательно, центростремительное ускорение  $w = v^2/R$ , связанное с

радиусом орбиты  $R$ , подчиняется равенству

$$m\gamma \frac{v^2}{R} = \frac{evB}{c}.$$

Отсюда для радиуса  $R$ , часто называемого ларморовским, частоты орбитального движения («ларморовской частоты»)  $\omega_b = v/R$  и для ускорения получаем выражения, связывающие их с величиной поля  $B$  :

$$R = \frac{m\gamma v c}{eB} = \frac{pc}{eB}, \quad (16.71)$$

$$\omega_b = \frac{eB}{m\gamma c}, \quad (16.72)$$

$$w = \frac{v}{c} \frac{eB}{m\gamma}. \quad (16.73)$$

Эти формулы нам понадобятся

**3.** Обратимся к мощности излучения. Ее величина

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \beta^2 \gamma^2 B^2 \quad (16.74)$$

непосредственно следует из выражения (16.31)<sup>14</sup> при  $E = 0$ ,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ .

Как мы видели в § 16.7, мощность излучения и скорость потери энергии излучающей частицы в общем случае не равны. В предыдущем параграфе мы имели случай, когда скорость потери энергии на излучение вовсе равна нулю при мощности излучения, отличной от нуля. А теперь мы встречаемся с ситуацией, когда эти две энергетические характеристики излучения тождественны. Действительно, как следует из формулы (16.63), при  $E = 0$ ,  $\mathbf{B} = \text{const}$ ,  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$  сила торможения равна<sup>15</sup>

$$\mathbf{f}_T = -\frac{2e^4 B^2}{3m^2 c^4} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

При этом мощность, развиваемая частицей против этой силы

$$-\mathbf{f}_T \cdot \mathbf{v} = \frac{2e^4 B^2}{3m^2 c^3} \frac{(v/c)^2}{1 - v^2/c^2},$$

<sup>14</sup>Этот результат можно получить также из равенства (16.29), подставляя в него ускорение (16.73) и учитывая  $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ .

<sup>15</sup>Данный результат нетрудно получить и из формулы (16.60), воспользовавшись тем, что  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ , и заметив, что для движения по круговой орбите с постоянной скоростью  $\dot{\mathbf{w}} = -(v/R)\omega_b \mathbf{v}$ .

т. е. скорость потери энергии на излучение, в точности совпадает с мощностью излучения. Следовательно, о величине  $d\mathcal{E}/dt'$  (16.74) мы здесь можем говорить как о скорости потери энергии на излучение. Умножив её на период обращения, можем определить потерю энергии электрона за один оборот

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt'} \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^3 \beta^2 \gamma^3}{mc^2} B.$$

Если значение поля  $B$  выразить через радиус орбиты (16.71),  $\Delta\mathcal{E}$  можно представить в виде

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{R} \beta^3 \gamma^4 mc^2, \quad (16.75)$$

где  $r_e = e^2/mc^2 \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$  см — классический радиус электрона. Отсюда видно, что потеря энергии на излучение за один оборот пропорциональна четвертой степени энергии и обратно пропорциональна радиусу орбиты только в первой степени. ДАЛЬШЕ АНАЛОГ Мешкова-Чирикова и Гинзбурга-Погосова.

**4. О диаграмме направленности СИ.** Как мы видели в § 16.4, из каждого положения на орбите ультрарелятивистский электрон излучает

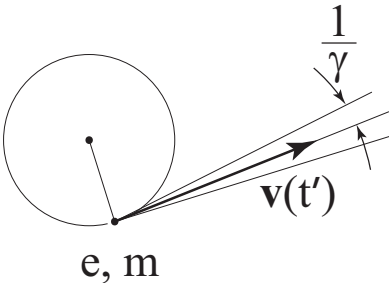


Рис. 16.12

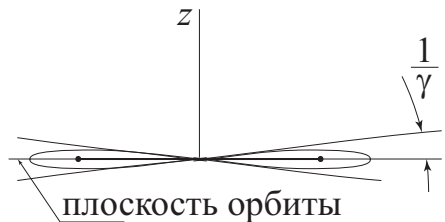


Рис. 16.13

в острый конус с углом при вершине порядка  $1/\gamma$  (рис. 16.12). Поэтому результирующее излучение будет приниматься только вблизи плоскости орбиты. Оно осесимметрично и обладает диаграммой направленности, схематически представленной на рис. 16.13. Заметим, что последняя качественно отличается от диаграммы направленности излучения электрона, движущегося с малой скоростью  $v \ll c$ . Соответствующая картина, полученная при изучении дипольного излучения, содержится на рис. 13.5.



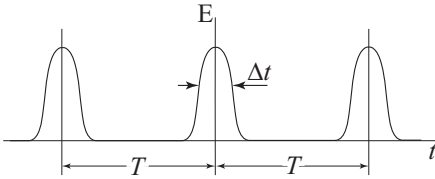


Рис. 16.14

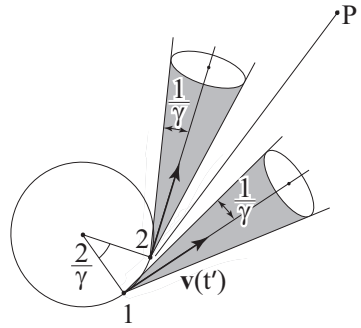


Рис. 16.15

**5. О спектральном составе СИ.** До наблюдателя, находящегося в плоскости орбиты (или вблизи нее), излучение доходит в виде периодической серии импульсов, как схематически изображено на рис. 16.14. Период между импульсами совпадает <sup>16</sup> с периодом вращения  $T = 2\pi/\omega_{\text{в}}$ , длительность импульса  $\Delta t$  определяется прохождением иглообразного луча через точку наблюдения. Как следует из анализа, приведенного в § 8.2, рассматриваемый процесс характеризуется линейчатым спектром с частотами, кратными  $\omega_{\text{в}}$ . Ширина спектра и вид его огибающей определяются формой и продолжительностью отдельного импульса.

Для оценки  $\Delta t$  воспользуемся рис. 16.15. Здесь точками 1, 2 отмечены два последующих положения электрона на орбите. К ним привязаны два острых конуса, в которых содержится излучение, выпущенное электроном из соответствующих положений. Принято, что угловое расстояние  $\delta\alpha$  между точками 1, 2 равно  $2/\gamma$ . Тогда для точки наблюдения  $P$ , изображённой на рисунке, импульс излучения начинается и заканчивается, когда электрон проходит положения, соответственно, 1, 2. Время  $\Delta t'$ , в течение которого электрон преодолевает это расстояние, в  $2\pi/\delta\alpha$

<sup>16</sup>В этом легко убедиться, воспользовавшись соотношением (16.9)

$$dt = dt' - (1/c)\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')dt'$$

Здесь достаточно заметить, что для фиксированной точки наблюдения комплекс  $-(\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t'))$ , как видно из равенства (16.4), представляет собой полный дифференциал  $dR_e(t')$  функции  $R_e(t')$  (см. рис. 16.1), *периодической* с периодом  $T$  в случае замкнутой орбиты.

раз меньше периода вращения, т. е.

$$\Delta t' = \frac{2}{\gamma 2\pi} T = \frac{2}{\gamma \omega_B}.$$

Искомый промежуток  $\Delta t$  приема этого излучения связан с  $\Delta t'$  соотношением (16.9), которое в рассматриваемом случае сводится к  $\Delta t = (1 - \beta)\Delta t'$ . С учетом оценки (16.35) отсюда получаем

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B}.$$

По длительности импульса ширину спектра оценим из соотношения неопределенности  $\Delta\omega\Delta t \sim 1$  и получим

$$\Delta\omega \sim \omega_B \gamma^3.$$

Следовательно, рассматриваемый спектр, линейчатый, как было сказано выше, простирается до очень высоких номеров гармоник порядка  $\gamma^3$ . Практически, из-за близости соседних линий, спектр можно рассматривать как сплошной (тем более, что он размывается квантовыми флуктуациями энергии благодаря зависимости частоты обращения от энергии частицы). КОНКРЕТНЫЕ ДАННЫЕ ИЯФа. В заключение

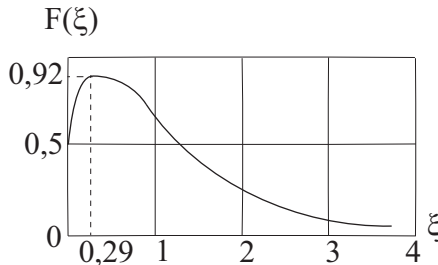


Рис. 16.16

приведем точный результат (см., например, Ландау-Лифшиц «Теория поля», стр. 276) для спектрального распределения мощности СИ, который в наших обозначениях<sup>17</sup> запишется в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 B}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right). \quad (16.76)$$

<sup>17</sup>В «Теории поля» мощность излучения названа полной интенсивностью излучения и обозначена символом  $I$ .

Здесь  $\omega_c = (3/2)\omega_B\gamma^3$  — характерная частота излучения, связанная с ларморовской частотой  $\omega_B$  и релятивистским фактором  $\gamma$ , а безразмерная функция  $F$ , определяющая спектральную мощность (16.76), изображена на рис. 16.16.

Отсюда видно, что максимум спектральной мощности находится вблизи значения  $\omega = (1/2)\omega_B\gamma^3$ .

# Глава 17

## Геометрическая оптика

Глава посвящена обоснованию и некоторым результатам применения так называемого *приближения геометрической оптики* к задаче распространения электромагнитных волн в *неоднородной* среде. Рассмотрены простейшие вопросы инструментальной оптики.

### 17.1. Вводные замечания

1. Ограничимся случаем монохроматических волн, когда зависимость всех полей от времени описывается множителем  $e^{-i\omega t}$ , диэлектрическая проницаемость среды имеет определенный смысл (см. § 7.4), связывая соответствующие комплексные амплитуды полей соотношением  $\hat{\mathbf{D}} = \epsilon \hat{\mathbf{E}}$ . Магнитную проницаемость  $\mu$  примем тождественно равной единице, считая  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . При этих ограничениях уравнения Максвелла для комплексных амплитуд полей сводятся к двум роторным уравнениям

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad (17.1)$$

(Соответствующие дивергентные уравнения

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})) = 0 \quad (17.2)$$

являются следствиями основных уравнений (17.1).) Понятно, что в случае неоднородной среды, характеризуемой произвольной функцией  $\epsilon(\mathbf{r})$ , определение полей  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$  в волне, как решений системы (17.1), в

общем случае труднореализуемо. Но для практически важного случая электромагнитных волн оптического диапазона очень часто оказывается справедливо сильное неравенство

$$\lambda_0 \ll L, \quad (17.3)$$

т. е. характерный размер  $L$  неоднородности среды намного больше соответствующей длины волны. При этом ограничении среда рассматривается как *слабонеоднородная* и для описания распространения света в ней широко используется подход геометрической оптики<sup>1</sup>. В его *первом приближении* исследование волнового поля  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$  заменяется геометрией световых лучей, по которым распространяется волна и переносится энергия. Обеспечивая менее полное описание волнового поля, данный подход освобождает от необходимости решения выписанных уравнений Максвелла.

**2.** Для исследования поля  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  вдоль луча в геометрической оптике получается соответствующее *уравнение второго приближения*. Для этого необходим результат исключения поля  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$  из системы (17.1), (17.2). (Напомним, что в случае  $\epsilon = \text{const}$  результат имеет простой вид  $\Delta \hat{\mathbf{E}} + \epsilon \omega^2 / c^2 \hat{\mathbf{E}} = 0$  и называется уравнением Гельмгольца.) В общем случае подобное уравнение имеет сложную структуру и здесь не приводится.<sup>2</sup> Нам оно понадобится только для частного случая волны, распространяющейся в «двумерной» среде с проницаемостью  $\epsilon = \epsilon(x, y)$  и с полем  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{E}_z(x, y) \mathbf{e}_z$ , имеющим одну компоненту. Поскольку это поле тождественно удовлетворяет уравнению  $\text{div } \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$ , процесс исключения  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$  из системы (17.1) становится столь же простым, как в случае  $\epsilon = \text{const}$ , и приводит к уравнению Гельмгольца

$$\Delta \hat{E}_z(x, y) + k_0^2 \epsilon(x, y) \hat{E}_z(x, y) = 0 \quad (17.4)$$

с переменным коэффициентом.

## 17.2. Уравнение эйконала

**1.** Первое приближение геометрической оптики основывается на понятии эйконала. Для его введения повторим некоторые результаты решения уравнений (17.1), (17.2) для случая однородной среды  $\epsilon = \text{const}$ ,

<sup>1</sup>Особые случаи, когда условие (17.3) не выполняется, в данном Пособии не обсуждаются.

<sup>2</sup>Его можно найти в книге М. Борн, Э. Вольф «Основы оптики.»

относящиеся к плоской монохроматической волне. Соответствующие формулы выпишем с сохранением временной экспоненты:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \hat{\mathbf{B}}_0 = \frac{[\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}_0]}{\omega/c}.$$

В этих формулах  $\hat{\mathbf{E}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_0$  постоянны и взаимно перпендикулярны. Фаза волны задается выражением  $\Phi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ . Поверхность постоянной фазы (волновая поверхность), определяемая уравнением  $\Phi = \text{const}$ , представляет собой плоскость, перпендикулярную волновому вектору  $\mathbf{k}$  и перемещающуюся вдоль этого вектора с фазовой скоростью  $u = \omega/k$ . Волновой вектор  $\mathbf{k}$  связан с частотой  $\omega$  и показателем преломления  $n$  соотношениями

$$k = k_0 n, \quad k_0 = \omega/c, \quad n = \sqrt{\epsilon}, \quad (17.5)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновое число в пустоте, отвечающее частоте  $\omega$  (число волн, укладываемых на длине  $2\pi$  см). Отметим, что приближение геометрической оптики опирается на тот факт, что это число очень велико.

2. В случае слабонеоднородной среды (17.3) интуитивно представляется, что любую локальную область с размерами порядка нескольких десятков длин волн приближенно можно рассматривать как однородную и структуру волны в ней считать мало отличающейся от плоской монохроматической волны. Соответствующее решение уравнений (17.1) представляют в виде гармонической волны с полями, задаваемыми в виде

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{ik_0\psi(\mathbf{r})}, \quad \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}) e^{ik_0\psi(\mathbf{r})}. \quad (17.6)$$

Здесь амплитуды  $\hat{\mathbf{E}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_0$  уже не постоянны; они рассматриваются как медленноменяющиеся функции пространственных координат, испытывающие существенные изменения лишь на характерном расстоянии  $L$ , удовлетворяющем условию 17.3. Фаза волны (без временной слагаемой) отлична от линейной функции типа  $\mathbf{k}\mathbf{r}$  и записывается в виде произведения большого параметра  $k_0$  и скалярной вещественной функции  $\psi(\mathbf{r})$ , имеющей размерность длины и называемой *эйконалом*. Поверхность, определяемая уравнением  $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ , представляет собой волновую поверхность. Естественно, этой поверхности постоянной фазы в общем случае (17.6) не соответствует постоянное значение  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ , как в случае плоской монохроматической волны, распространяющейся в однородной среде.

Выделение в фазе волны множителя  $k_0$  приводит к тому, что  $\psi$  (точнее, как увидим ниже,  $\text{grad } \psi$ ) становится также медленноменяющейся функцией, в чем нетрудно убедиться, мысленно выделив в пространстве две фазовые поверхности с фазами, отличающимися на величину

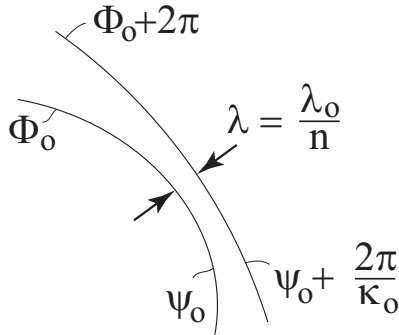


Рис. 17.1

$2\pi$  (см. рис. 17.1). (Рисунок подсказывает, что в общем случае волновые поверхности не обязаны быть плоскими. Такими они подразумеваются только в пределах малых областей.) Локально эти поверхности отстоят друг от друга на расстоянии  $\lambda_0/n$  по нормали. Как отмечено на рисунке, им отвечают значения  $\psi$ , отличающиеся всего на малую величину  $2\pi/k_0$ . Таким образом, если

$$|\text{grad } \Phi| = \frac{2\pi}{\lambda_0/n} = nk_0, \quad \text{то} \quad |\text{grad } \psi| = \frac{2\pi}{k_0\lambda_0/n} = n.$$

Видим, что  $|\text{grad } \psi|$  является функцией, испытывающей заметные изменения лишь на расстояниях порядка  $L$ .

**3.** Продолжим качественное исследование предполагаемых решений (17.6). Обратимся к поведению одного из полей, например, электрического, в малой окрестности произвольной точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ . Примем, что здесь  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$ , а функцию  $\psi(\mathbf{r})$  возьмем с удержанием двух первых членов разложения Тейлора в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}_0) + \text{grad } \psi(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

(Запись  $\text{grad } \psi(\mathbf{r}_0)$  здесь и далее означает  $\text{grad } \psi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}$ .) Тогда поле  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  примет вид

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{ik_0(\text{grad } \psi(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r})} \quad \left( \hat{\mathbf{E}}_0 = \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) e^{ik_0[\psi(\mathbf{r}_0) - (\text{grad } \psi(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0)]} = \text{const} \right)$$

поля плоской монохроматической волны с амплитудой  $\hat{\mathbf{E}}_0$  и волновым вектором

$$\mathbf{k} = k_0 \text{grad } \psi(\mathbf{r}_0). \quad (17.7)$$

Отсюда имеем, что волна, описываемая полями (17.6), в любой точке  $\mathbf{r}_0$  распространяется по направлению  $\text{grad } \psi(\mathbf{r}_0)$  и, как следует из сравнения выражений (17.5), (17.7), градиент функции  $\psi(\mathbf{r})$  по модулю должен равняться локальному значению показателя преломления:

$$|\text{grad } \psi(\mathbf{r})| = n(\mathbf{r}).$$

Таким образом, из качественных соображений мы получили то соотношение, которое называется *уравнением эйконала*<sup>3</sup> и является одним из основных уравнений геометрической оптики. Его обычно принято представлять в виде

$$(\text{grad } \psi(\mathbf{r}))^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (17.8)$$

4. Приведенные выше качественные рассуждения подразумевали, что исследуемые поля (17.6) удовлетворяют уравнениям Максвелла (17.1). Выясним теперь условия справедливости этого требования, подставив выражения (17.6) в соответствующие уравнения. Поскольку роторы полей, входящих в (17.6), определяются формулой

$$\text{rot } \hat{\mathbf{E}} = \{\text{rot } \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) + ik_0[\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})]\} e^{ik_0\psi(\mathbf{r})}$$

и её аналогом для  $\hat{\mathbf{B}}$ , результат подстановки легко приводится к виду

$$ik_0\{\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})\} = -\text{rot } \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}), \quad (17.9)$$

$$ik_0\{\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})\} = -\text{rot } \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}).$$

В рассматриваемом случае слабонеоднородной среды (17.3) левые части полученных уравнений в  $L/\lambda_0$  раз превышают правые. Тогда *в первом приближении* эти правые части вообще можно отбросить и для функций  $\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})$  получить систему однородных уравнений (уже алгебраических)

$$[\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})] - \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (17.10)$$

$$[\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})] + \epsilon(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.11)$$

<sup>3</sup>Понятно, что приведенные соображения не могут рассматриваться как вывод уравнения эйконала. Это сделано в следующем пункте.



Очевидным следствием этих уравнений являются соотношения

$$\text{grad } \psi \cdot \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{grad } \psi \cdot \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (17.12)$$

устанавливающие ортогональность  $\text{grad } \psi$  с полями  $\hat{\mathbf{E}}$  и  $\hat{\mathbf{B}}$  в любой точке пространства. Таким образом, в приближении геометрической оптики тройка векторов  $\text{grad } \psi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  составляют правую ортогональную систему векторов, аналогичную векторам  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  в плоской монохроматической волне.

Читателю известно, что однородная система (17.10), (17.11) алгебраических уравнений относительно компонент векторов  $\hat{\mathbf{E}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_0$  допускает нетривиальные решения лишь при условии равенства нулю определителя системы. В данном случае это условие выявляется и без вычисления определителя. Для этого нужно  $\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})$  из уравнения (17.10) выразить через  $\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$  и подставить в (17.11):

$$[\text{grad } \psi \times [\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})]] + \epsilon(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = 0.$$

Раскрыв двойное векторное произведение и воспользовавшись первым из условий (17.12), отсюда получаем уравнение для  $\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$

$$[(\text{grad } \psi)^2 - \epsilon(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) = 0$$

и, как следствие, искомое условие в виде требования

$$(\text{grad } \psi)^2 = \epsilon(\mathbf{r}),$$

которое выше уже было названо уравнением эйконала. Оно задает функцию  $\psi(\mathbf{r})$ , позволяющую определить систему поверхностей постоянных фаз из условия

$$\psi(x, y, z) = \text{const}.$$

Последовательная совокупность волновых поверхностей дает картину распространения волны и является, таким образом, первым из двух способов описания волны в геометрической оптике. Другой, более удобный способ описания волнового поля предусматривает использование *световых лучей*, представляющих собой траектории, ортогональные фронтам световой волны. Следовательно, в каждой точке пространства направление касательной к световому лучу совпадает с направлением вектора  $\text{grad } \psi$ . Таким образом, на языке векторного анализа световые лучи — это силовые линии векторного поля  $\text{grad } \psi$ .

Для иллюстрации вышесказанного ниже рассматривается простейший пример распространения волны, не допускающий точного решения, но позволяющий получить результаты как первого, так и второго приближений геометрической оптики. Результаты, относящиеся к первому приближению, составляют содержание следующего параграфа.

### 17.3. Пример прохождения волны в неоднородное полупространство

Пусть плоская монохроматическая ТЕ — волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_0 = k_0(\cos \varphi_0 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_0 \mathbf{e}_y)$  из пустоты (область 1) наклонно падает на полупространство  $x \geq 0$ , заполненное средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(x)$ , зависящей только от одной координаты (область 2). Здесь интерес для нас представляет волна, проходящая через это неоднородное полупространство.

В точной постановке задача определения поля  $\hat{\mathbf{E}}_2(x, y) = \hat{E}_z(x, y)\mathbf{e}_z$  в полупространстве  $x > 0$  сводится к уравнению (17.4)

$$\Delta \hat{E}_z(x, y) + \epsilon(x)k_0^2 \hat{E}_z(x, y) = 0. \quad (17.13)$$

Для произвольной  $\epsilon(x)$  его решение неизвестно.

При использовании подхода геометрической оптики искомое волновое поле, представляемое в виде

$$\hat{E}_z(x, y) = \hat{E}_2(x, y)e^{ik_0\psi(x, y)}, \quad (17.14)$$

в первом приближении описывается эйконалом  $\psi(x, y)$ . В данном случае уравнение (17.8) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = n^2(x). \quad (17.15)$$

В качестве условия на границе  $x = 0$  примем

$$\sin \varphi_0 \cdot y = \psi(0, y), \quad (17.16)$$

т. е. совпадение фаз падающей и проходящей волн (после сокращения  $k_0$ .)

Нелишне здесь убедиться, что условие (17.16) эквивалентно закону преломления

Снеллиуса

$$\sin \varphi_0 = n(0) \sin \varphi(0),$$

где  $\varphi(0)$  — угол преломления луча на границе  $x = 0$ . Для этого достаточно приравнять производные по  $y$  от обеих частей равенства (17.16) и заметить, что

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = \text{grad}_y \psi \Big|_{x=0} = |\text{grad } \psi| \Big|_{x=0} \cdot \sin \varphi(0) = n(0) \sin \varphi(0).$$

Решение задачи (17.15), (17.16) напрашивается в виде

$$\psi(x, y) = F(x) + \sin \varphi_0 y,$$

где  $F(0) = 0$ ,  $F' = \pm \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0}$ . Волне, уходящей от границы  $x = 0$  вправо, соответствует знак «плюс», поскольку  $F' = \text{grad}_x \psi$ . Следовательно, искомое решение для произвольного распределения  $n(x)$  есть

$$\psi(x, y) = \int_0^x \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \varphi_0} d\xi + \sin \varphi_0 y. \quad (17.17)$$

Теперь можно приступить к геометрическому описанию прошедшей волны. Начнём с фазовых поверхностей  $\psi = \psi_i = \text{const}$ . Им соответствуют кривые в плоскости  $(x, y)$ , задаваемые уравнением

$$y(x) = \left( \psi_i - \int_0^x \sqrt{n^2(\xi) - \sin^2 \varphi_0} d\xi \right) / \sin \varphi_0.$$

Направления лучей определяются векторным полем

$$\text{grad } \psi = \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0} \mathbf{e}_x + \sin \varphi_0 \mathbf{e}_y \quad (17.18)$$

и в каждой точке характеризуются углом  $\varphi$ , для которого

$$\sin \varphi = \frac{\text{grad}_y \psi}{|\text{grad } \psi|} = \frac{\sin \varphi_0}{n(x)}$$

зависит только от  $x$ -координаты точки наблюдения. Получается, таким образом, что в любой точке плоскости  $x = x_0$  угол  $\varphi(x_0)$  подчиняется условию

$$n(x_0) \sin \varphi(x_0) = \sin \varphi_0,$$

аналогичному закону преломления Снеллиуса. То есть угол  $\varphi(x_0)$  равен углу преломления при падении луча под углом  $\varphi_0$  из пустоты на границу среды с показателем преломления  $n(x_0)$  (как будто передний слой

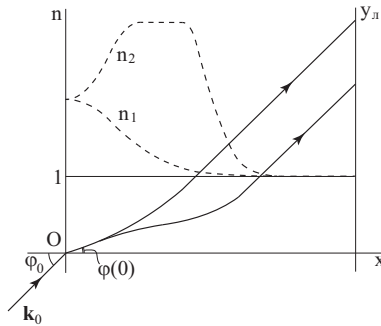


Рис. 17.2

$0 < x < x_0$  вовсе отсутствует). Отсюда на качественном уровне нетрудно представить изменение характера траектории луча в зависимости от вида кривой  $n(x)$ , как схематически показано на рис. 17.2. Здесь сплошные линии с номерами 1, 2 изображают траекторию луча соответственно для зависимостей  $n_1(x)$  и  $n_2(x)$ , проведенных штриховыми линиями и отличающихся характером перехода от значения  $n(0) > 1$  при  $x = 0$  до асимптотического значения  $n_\infty = 1$ . В первом случае этот переход имеет монотонный характер, а во втором монотонность нарушается. Соответствующие траектории 1 и 2 чётко откликаются на это изменение.

Траектория луча, как силовая линия векторного поля (17.18), определяется уравнением

$$\frac{dy_{\text{л}}}{dx} = \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0}}.$$

Отсюда для луча, начинающегося в точке  $(0, y_0)$ , имеем

$$y_{\text{л}} = y_0 + \int_0^x \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0}} d\xi. \quad (17.19)$$

Представленные на рис. 17.2 траектории 1 и 2, проходящие через точку  $(0, 0)$ , соответствуют именно этому решению (17.19).

## 17.4. Второе приближение геометрической оптики для конкретного примера

В § 17.1 для простейшего случая распространения волны с полем  $\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_z(x, y)\mathbf{e}_z$  в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon(x, y)$  показано, что уравнение для  $\hat{E}_z(x, y)$  имеет вид уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом (17.4). Но даже в случае, когда  $\epsilon = \epsilon(x)$  зависит только от одной координаты, как в примере из предыдущего параграфа, решение соответствующего уравнения

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{E}_z}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon(x) \hat{E}_z = 0 \quad (17.20)$$

построить сложно. Поэтому обратимся к приближению геометрической оптики. Решение для  $\hat{E}_z(x, y)$  будем искать в виде

$$\hat{E}_z(x, y) = \hat{E}_2(x, y)e^{ik_0\psi(x, y)}, \quad (17.21)$$

содержащем две неизвестные функции:  $\hat{E}_2(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ . Подставив выражение (17.21) в уравнение (17.20) и сгруппировав слагаемые по степеням большого параметра  $k_0$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}_2(x, y) + ik_0 [2 \text{grad } \hat{E}_2(x, y) \cdot \text{grad } \psi + \hat{E}_2(x, y) \Delta \psi] + \\ + k_0^2 [\epsilon(x) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2] \hat{E}_2(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Наличие двух свободных функций дает возможность приравнять нулю главный член (последнее слагаемое левой части) этого уравнения. В результате мы получаем независимое уравнение для функции  $\psi(x, y)$  (уравнение эйконала)

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \epsilon(x).$$

Остающиеся слагаемые дают уравнение для комплексной амплитуды электрического поля

$$(2 \text{grad } \hat{E}_2 \cdot \text{grad } \psi + \hat{E}_2 \Delta \psi) + (1/ik_0) \Delta \hat{E}_2 = 0.$$

Отбросив последний малый член, отсюда получаем уравнение

$$(2 \text{grad } \hat{E}_2 \cdot \text{grad } \psi + \hat{E}_2 \Delta \psi) = 0 \quad (17.22)$$

второго приближения геометрической оптики для рассматриваемой здесь частной задачи.

В конкретном примере из предыдущего параграфа, в котором

$$\text{grad } \psi = \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0} e_x + \sin \varphi_0 e_y, \quad \Delta \psi = \frac{d}{dx} \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0},$$

это уравнение принимает вид

$$2 \left( \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0} \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial x} + \sin \varphi_0 \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial y} \right) + \hat{E}_2 \frac{d}{dx} \sqrt{n^2(x) - \sin^2 \varphi_0} = 0.$$

Подчеркнутые члены объединим в слагаемое

$$2(n^2(x) - \sin^2 \varphi_0)^{1/4} \frac{\partial}{\partial x} [(n^2(x) - \sin^2 \varphi_0)^{1/4} \hat{E}_2(x, y)].$$

Тогда уравнение приобретает форму

$$\frac{\partial}{\partial x} \Lambda + \frac{\sin \varphi_0}{(n^2(x) - \sin^2 \varphi_0)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y} \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{dy_\pi}{dx} = 0, \quad (17.23)$$

эквивалентную закону сохранения  $d\Lambda/ds = 0$  величины в квадратной скобке предыдущего выражения вдоль луча (17.19), проходящего через произвольную точку  $y_\pi = y_0$  в плоскости  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y) \Big|_{y=y_\pi(x, y_0)} &= (n^2(x) - \sin^2 \varphi_0)^{1/4} \hat{E}_2(x, y_\pi(x, y_0)) = \\ &= (n^2(0) - \sin^2 \varphi_0)^{1/4} \hat{E}_2(0, y_0). \end{aligned} \quad (17.24)$$

Константа  $\hat{E}_2(0, y_0)$ , входящая в правую часть (17.24), выражается через амплитуду падающей волны соответствующей формулой Френеля (7.47) для амплитуды  $TE$  — волны. Мы её здесь выписывать не будем. Сказанным ограничимся относительно распределения поля проходящей волны, получающегося как результат второго приближения геометрической оптики.

## 17.5. Световые лучи

Определение световых лучей как траекторий, ортогональных фазовым поверхностям, и вытекающий отсюда способ их построения с помощью векторного поля  $\text{grad } \psi$  упоминались в конце §17.2. Таким образом,

для получения картины световых лучей мы пока нуждаемся в решении нелинейного уравнения в частных производных — уравнения эйконала. Трудность этого пути очевидна. Но, к счастью, существует метод и непосредственного построения траектории луча — без промежуточного этапа в виде решения уравнения эйконала. Для этого используется так называемое *уравнение луча*, аналогичное уравнению движения материальной точки в заданном силовом поле.

Выводу уравнения луча и граничных условий для него посвящен материал данного параграфа. Но перед этим мы убедимся в важном свойстве светового луча: в каждой точке пространства его направление совпадает с направлением усредненного потока энергии, выражаемого вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ .

### Плотность потока энергии в геометрической оптике

Из правила (7.19) вычисления среднего значения произведения в виде  $\langle [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \rangle = (1/2)Re[\hat{\mathbf{E}}_0 \times \hat{\mathbf{B}}_0^*]$ , если в нём  $\hat{\mathbf{B}}_0$  заменить соответствующим выражением из уравнения (17.10) и воспользоваться условием ортогональности  $(\text{grad } \psi \cdot \hat{\mathbf{E}}_0) = 0$ , для искомой величины получаем

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} Re[\hat{\mathbf{E}}_0 \times [\text{grad } \psi \times \hat{\mathbf{E}}_0^*]] = \frac{c}{8\pi} (\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r})) \text{grad } \psi. \quad (17.25)$$

Видим, что усредненный вектор Пойнтинга действительно направлен вдоль светового луча.

Заметим далее, что коэффициент при  $\text{grad } \psi$  в соотношении (17.25) связан с усредненной плотностью энергии электрического поля, поскольку

$$\langle W_e \rangle = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{8\pi} \langle (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{8\pi} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r})). \quad (17.26)$$

Соответствующая плотность энергии магнитного поля

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})|^2$$

характеризуется той же величиной (17.26), поскольку, как следует из уравнений (17.8), (17.10),  $|\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{r})|^2 = \epsilon(\mathbf{r}) |\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})|^2$ . Таким образом, справедливо равенство

$$\langle W_m \rangle = \langle W_e \rangle.$$

Отсюда следует, что суммарная усредненная плотность энергии

$$\langle W \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{8\pi} (\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r})),$$

и плотность потока (17.25) связана с плотностью энергии  $\langle W \rangle$  соотношением

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{\epsilon} \langle W \rangle \text{grad } \psi. \quad (17.27)$$

Если, воспользовавшись уравнением эйконала (17.8),  $\text{grad } \psi$  выразить через введённый ниже единичный вектор  $\mathbf{u}$  касательной к световому лучу:

$$\text{grad } \psi = n\mathbf{u} = \sqrt{\epsilon}\mathbf{u}, \quad (17.28)$$

то выражение (17.27) приобретает вид

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n} \langle W \rangle \mathbf{u}. \quad (17.29)$$

Следовательно, в приближении геометрической оптики средняя плотность энергии распространяется вдоль луча со скоростью  $c/n$ .

### Уравнение луча

Как уже отмечалось, касательная к световому лучу в каждой точке совпадает с  $\text{grad } \psi$ . Если точку на кривой характеризовать расстоянием

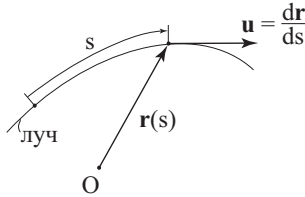


Рис. 17.3

$s$ , измеренным вдоль луча, то единичный вектор касательной (см. рис. 17.3) будет

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (17.30)$$

и, как следует из уравнения эйконала, имеем

$$n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad } \psi. \quad (17.31)$$

Конечно, это ещё не есть уравнение луча, т. к. содержит градиент неизвестной функции  $\psi(\mathbf{r})$ . Для его исключения надо взять производную от обеих частей полученного соотношения

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \text{grad } \psi. \quad (17.32)$$



Имея в виду, что производная по лучу определяется векторным оператором

$$\frac{d}{ds} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right),$$

нетрудно показать, что правая часть (17.32) не зависит от  $\psi$  и равна  $\text{grad } n$ . Для этого рассмотрим цепочку равенств

$$\frac{d}{ds} \text{grad } \psi = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \text{grad } \psi = \frac{1}{n} (\text{grad } \psi \cdot \nabla) \text{grad } \psi$$

и, воспользовавшись векторным тождеством  $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \text{grad}(a^2/2) - [\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}]$ , её продолжим:

$$\frac{d}{ds} \text{grad } \psi = \frac{1}{n} \text{grad}(\text{grad } \psi)^2/2.$$

Подставив сюда уравнение эйконала, получаем требуемый результат

$$\frac{d}{ds} \text{grad } \psi = \frac{1}{n} \text{grad}(n^2/2) = \text{grad } n,$$

что в совокупности с соотношением (17.32) приводит к искомому уравнению луча

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n. \quad (17.33)$$

Уравнение луча и уравнение эйконала являются двумя альтернативными описаниями геометрической оптики. Уравнение луча более удобно для определения траектории световых лучей в неоднородной среде. При этом его необходимо дополнить условием, которому подчиняется единичный вектор  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/ds$  на границе раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями.

### Граничные условия

Как следует из соотношения (17.31), поле единичных векторов  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , характеризующее световой пучок, после умножения на скалярную функцию  $n(\mathbf{r})$  становится потенциальным. Следовательно, циркуляция векторного поля  $n\mathbf{u}$  по любому замкнутому контуру равна нулю

$$\oint_C n(\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}) = 0. \quad (17.34)$$

Имея в виду, что приближение геометрической оптики применимо лишь для непрерывно изменяющихся  $n$  с характерным масштабом области

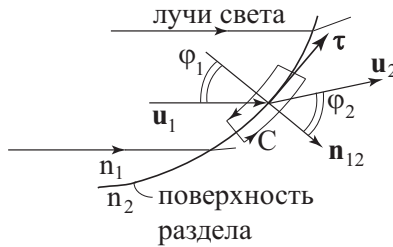


Рис. 17.4

изменения  $L \gg \lambda_0$ , вместо поверхности раздела двух сред будем рассматривать переходный слой, в котором  $n$  меняется от  $n_1$  до  $n_2$ , причем толщина  $\delta$  этого слоя удовлетворяет условию  $\lambda_0 \ll \delta \ll L$ .

Возьмем плоский контур  $C$  (см. рис. 17.4). Продольные стороны этого контура проходят по обе стороны переходного слоя. Пусть плоскость контура совпадает с плоскостью, образованной нормалью  $\mathbf{n}_{12}$  к границе раздела, и единичным вектором  $\mathbf{u}_1$  касательной к лучу в точке, примыкающей к поверхности раздела со стороны среды  $n_1$ . Тогда обычные рассуждения,<sup>4</sup> основанные на интегральном соотношении (17.34), приводят к условию непрерывности вектора  $n\mathbf{u}_\tau$  при переходе границы. Отсюда следует, во-первых, что вектор  $\mathbf{u}_2$  лежит в плоскости, образованной векторами  $\mathbf{u}_1, \mathbf{n}_{12}$ , и, во-вторых,  $n_1 u_{1\tau} = n_2 u_{2\tau}$ , что равносильно соотношению

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2. \quad (17.35)$$

Эти два утверждения составляют закон преломления Снеллиуса. Раньше, в § 7.8, он был получен для частного случая падения плоской волны на плоскую же границу раздела при произвольной длине волны. Теперь мы показали, что этот закон справедлив для луча при любой форме поверхности раздела, если только радиус поверхности и радиус кривизны волновой поверхности существенно превышают длину волны.

*Пример.* Решение (17.19), ранее полученное с помощью эйконала, теперь воспроизведем непосредственно из уравнения луча (17.33).

В рассматриваемом случае это векторное уравнение сводится к двум скалярным уравнениям для функций  $x(s), y(s)$

$$\frac{d}{ds} \left( n(x) \frac{dx}{ds} \right) = \frac{dn}{dx}, \quad (a)$$

<sup>4</sup>См. вывод граничного условия для тангенциальных компонент поля  $\mathbf{E}$  в § 1.8.

$$\frac{d}{ds} \left( n(x) \frac{dy}{ds} \right) = 0. \quad (b)$$

Начальными условиями являются:

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{ds}(0) = \cos \varphi(0), \quad (c)$$

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{ds}(0) = \sin \varphi(0), \quad (d)$$

где угол преломления  $\varphi(0)$  удовлетворяет закону Снеллиуса

$$n(0) \sin \varphi(0) = \sin \varphi_0. \quad (e)$$

Первый интеграл уравнения (b)

$$n(x) \frac{dy}{ds} = C_1, \quad (f)$$

где константа  $C_1$ , определяемая из начального условия (d), принимает значение

$$C_1 = n(0) \sin \varphi(0) = \sin \varphi_0, \quad (g)$$

фактически представляет собой соотношение, которое мы уже выписывали в § 17.3 для угла  $\varphi(x)$  в виде  $n(x_0) \sin(\varphi(x_0)) = \sin \varphi_0$ .

Воспользуемся первым интегралом (f), чтобы в уравнении (a) от  $s$  перейти к другой независимой переменной  $y$ . Для этого  $d/ds$  заменим на  $(C_1/n(x))d/dy$  и уравнение (a) перепишем в виде

$$\frac{C_1}{n(x)} \frac{d}{dy} \left( n(x) \frac{dx}{dy} \right) = \frac{dn}{dx}, \quad \text{т. е.} \quad C_1^2 \frac{d^2 x}{dy^2} = n \frac{dn}{dx}.$$

В результате получаем уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной  $y$ . Существующий стандартный прием его интегрирования мы несколько укоротим: умножим обе части уравнения на  $2dx/dy$  и проинтегрируем. В результате получим первый интеграл уравнения (a) в виде

$$C_1^2 \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 = n^2(x) + C_2, \quad (h)$$

где  $C_2$  — новая произвольная постоянная. Для её вычисления воспользуемся начальными условиями (c), (d), откуда следует, что

$$\left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \Big|_{x=0} = \left( \frac{\cos \varphi(0)}{\sin \varphi(0)} \right)^2.$$

Имея  $n(0)$  и значение  $C_1$  из (g), для константы получаем значение  $C_2 = -\sin^2(\varphi_0)$ . При этом первый интеграл (h) запишем как

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\sin^2(\varphi_0)}{n^2(x) - \sin^2(\varphi_0)}}.$$

Выбирая знак «плюс», удовлетворяющий начальным условиям (c),(d), для искомого луча отсюда получаем решение, повторяющее (17.19).

## 17.6. Примеры применения уравнения луча

Вернёмся к уравнению луча (17.33)

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n,$$

которое напоминает уравнение движения частицы в потенциальном силовом поле. Роль силы  $\mathbf{f} = -\text{grad } U$  здесь играет градиент показателя преломления.

Исследование траекторий луча с помощью этого уравнения в конкретных задачах часто осуществляется путем компьютерного моделирования. Мы здесь ограничимся рассмотрением нескольких простых частных случаев, представляющих, тем не менее, физический интерес.

1. Начнём с простейшего случая однородной среды  $n = \text{const}$ . При этом уравнение луча сводится к  $d^2\mathbf{r}/ds^2 = 0$  и имеет общее решение

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{a} + \mathbf{b}s, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} - \text{постоянные.}$$

Этому решению соответствует прямолинейный луч (см. рис. 17.5), проходящий через точку с радиус-вектором  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$  и параллельный век-

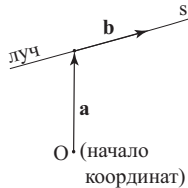


Рис. 17.5

тору  $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{b}$ . Из геометрического смысла переменной  $s$  очевидно, что  $\mathbf{b}$  — единичный вектор, т. е.  $|\mathbf{b}| = 1$ .

2. Случай сферически симметричного распределения  $n(r)$ ,  $r$  — расстояние от начала координат. Полное решение уравнения луча для данного случая мы не будем строить. Получим только первый интеграл этого уравнения, аналогичный моменту импульса в механике точки для случая центральных сил. Для этого уравнение (17.33) векторно умножим на  $\mathbf{r}$ , обратив внимание, что в рассматриваемом случае  $\text{grad } n \sim \mathbf{r}$  и  $[\mathbf{r} \times \text{grad } n] = 0$ . Дополнив левую часть полученного равенства

$$[\mathbf{r} \times \frac{d}{ds}(n\mathbf{u})] = 0$$

тождественно равным нулю слагаемым  $[d\mathbf{r}/ds \times n\mathbf{u}]$ , в результате приходим к искомому соотношению

$$\frac{d}{ds}[\mathbf{r} \times n\mathbf{u}] = 0,$$

эквивалентному закону сохранения

$$\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{r} \times n\mathbf{u}] = \text{const}$$

векторной величины  $\mathbf{\Lambda}$  вдоль луча, где  $\mathbf{u}$  — единичный вектор касательной к нему (см. (17.30)). Из неизменности направления  $\mathbf{\Lambda}$  вдоль луча следует, что *все лучи лежат в плоскостях, проходящих через начало координат (центр симметрии)*. А постоянство величины  $\Lambda$  означает, что для каждого луча справедливо условие

$$n(r)r \sin \varphi = nd = \text{const},$$

где  $d$  — перпендикуляр, опущенный из начала координат на направление касательной к лучу (см. рис. 17.6). Отсюда следует, что если  $n$  увеличивается при приближении к центру симметрии, то для сохранения произведения  $nd$  неизменным необходимо, чтобы множитель  $d$  уменьшался. Следовательно, луч должен искривляться в сторону центра, как изображено на рисунке.

Это соотношение позволяет объяснить явление *астрономической рефракции*, обусловленной тем, что плотность земной атмосферы и, следовательно, её показатель преломления убывают с высотой (см. рис. 17.7)

«Наблюдаемая высота небесного светила над горизонтом оказывается больше истинной. Эффект особенно значителен, когда светило наблюдается у горизонта (рефракция при этом достигает 0,5 градуса) и

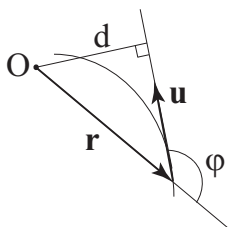


Рис. 17.6

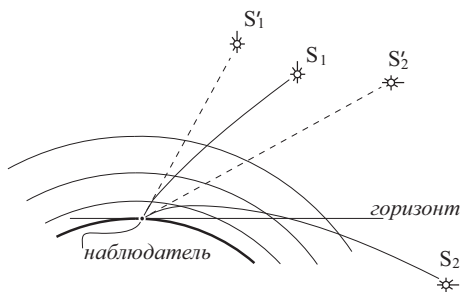


Рис. 17.7

быстро убывает с увеличением высоты. Этим объясняется сплюснутая форма солнечного диска при восходе и закате. Благодаря рефракции мы видим Солнце в течение нескольких минут после того, как оно уже зашло.» (Из Бутикова.)

**3.** В качестве последнего примера использования уравнения луча покажем, что в общем случае произвольной зависимости  $n(x, y, z)$  главная нормаль к лучу лежит в плоскости, образованной векторами  $\mathbf{u}$  и  $\text{grad } n$ . Выразим также кривизну луча через  $\text{grad } n$ .

Вопрос сформулируем так: если в некоторой точке  $P$  пространства указан вектор  $\text{grad } n$  и задано направление вектора  $\mathbf{u}$  касательной к лучу, то как по этим данным определить направление главной нормали и радиус кривизны луча  $R$  в названной точке? Для ответа воспользуемся определением вектора  $\mathbf{u}$  (17.30) и уравнение луча перепишем в виде

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{u} + n \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \text{grad } n.$$

Из этого векторного равенства следует, что три входящих в него вектора  $\mathbf{u}$ ,  $\text{grad } n$  и  $d\mathbf{u}/ds$  лежат в одной плоскости. Поскольку последний из этих векторов (производная единичного вектора касательной по длине кривой) равен  $\mathbf{N}/R$ , где  $\mathbf{N}$  — единичный вектор главной нормали, то из сказанного вытекает, что  $\mathbf{N}$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\text{grad } n$ .<sup>5</sup> Предыдущее равенство, переписанное в виде

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{u} + \frac{n}{R} \mathbf{N} = \text{grad } n \quad (17.36)$$

теперь можно рассматривать как разложение  $\text{grad } n$  в точке  $P$  по двум взаимно ортогональным ортам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{N}$ . Следовательно, при заданных векторах  $\mathbf{u}$  и  $\text{grad } n$  третий из векторов  $\mathbf{N}/R$  однозначно определяется как по направлению, так и по величине. Как видно из рис. 17.8, изменение направления луча на противоположное не сказывается на векторе  $\mathbf{N}/R$  и, следовательно, на кривизне луча, схематично также изображенного прерывистой линией на этих схемах. Отсюда понятно, что центр кривизны находится на той стороне от вектора  $\mathbf{u}$ , где находится конец вектора  $\text{grad } n$ , и луч всегда искривляется в сторону возрастания коэффициента преломления.

Искривлением лучей света в неравномерно нагретом воздухе объясняется явление *миража*, когда в жаркой пустыне возникает иллюзия

<sup>5</sup>Случай, когда векторы  $\mathbf{u}$  и  $\text{grad } n$  лежат на одной прямой (при этом  $\text{grad } n = dn/ds \mathbf{u}$ ), интереса не представляет, поскольку, как видно из последующего соотношения (17.36), луч при этом не искривлен, его радиус кривизны  $R = \infty$ .

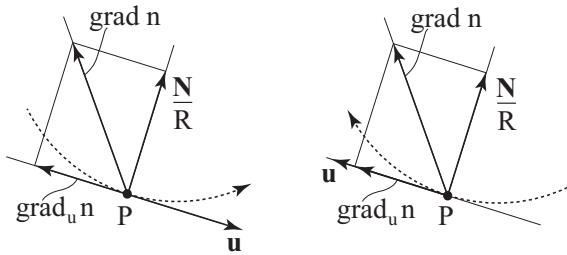


Рис. 17.8

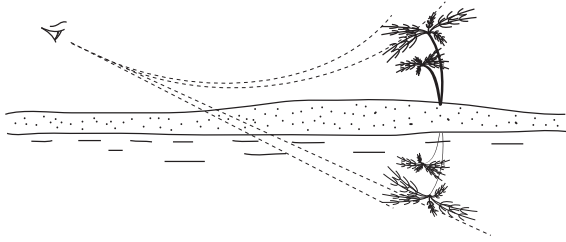


Рис. 17.9

находящейся на горизонте водной глади или вдали на асфальте нагретого солнечными лучами шоссе видны «лужи», исчезающие при приближении к ним. Прилегающие к раскалённой земле слои воздуха нагреты сильнее, поэтому плотность воздуха и его показатель преломления возрастают с высотой. Лучи света, входящие в такой слой под небольшими углами, искривляются и, не достигнув земли, выходят обратно под такими же углами (см. рис. 17.9). Мы настолько привыкли к прямолинейному распространению света, что подсознательно считаем источник расположенным на прямолинейном продолжении попадающих в глаз лучей даже тогда, когда они искривлены; мы видим расположенные над горизонтом удалённые предметы как бы отражёнными горизонтальной зеркальной поверхностью («водной гладью»).



## 17.7. Принцип Ферма

Уравнение луча (17.33) и граничное условие в виде закона преломления (17.35) Снеллиуса, определяющие траекторию светового луча, в предыдущих параграфах получены исходя из уравнений Максвелла в приближении геометрической оптики. Теперь обратимся к вариационному принципу Ферма, как наиболее общему закону, управляющему траекторией луча света между двумя заданными точками, и покажем, что названные выше уравнение и граничное условие соответствуют требованию этого принципа.

Принцип Ферма формулируется с использованием понятия оптической длины пути  $\ell$  между двумя точками. В однородной среде под этой длиной подразумевается произведение геометрической длины пути  $s$  и показателя преломления, т. е.  $\ell = ns$ . В случае неоднородной среды оптическая длина пути складывается из элементарных оптических длин  $d\ell = nds$  и выражается интегралом

$$\ell = \int_A^B nds, \quad (17.37)$$

взятым вдоль кривой, соединяющей точки  $A, B$ . (сослаться на рис.) Если пространственную кривую, соединяющую точки  $A$  и  $B$ , представить параметрической функцией  $\mathbf{r}(\xi) = x(\xi)\mathbf{e}_x + y(\xi)\mathbf{e}_y + z(\xi)\mathbf{e}_z$  (параметр  $\xi$  меняется в фиксированных пределах  $[\xi_A, \xi_B]$ ) и для производных использовать обозначения типа  $\dot{x} = dx/d\xi$ , то функционал (17.37) можно записать в виде

$$\ell = \int_{\xi_A}^{\xi_B} n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\xi. \quad (17.38)$$

Тогда задача определения функции  $\mathbf{r}(\xi)$ , задающей траекторию *реального луча* между точками, сводится к требованию, чтобы вариация функционала (17.38) равнялась нулю. При этом вариационная задача принимает привычный вид

$$\delta \int_{\xi_A}^{\xi_B} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) d\xi = 0,$$

где функция Лагранжа

$$L = n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (17.39)$$

Отсюда видно, что принцип Ферма имеет точно ту же форму, что и принцип наименьшего действия Гамильтона. Решение этой вариационной задачи вам хорошо знакомо из курса аналитической механики. Оно дается тремя уравнениями Эйлера, одно из которых для  $x$ -координаты траектории луча здесь выпишем:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

После подстановки выражения (17.39) и замены

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\xi = ds,$$

рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Объединив его с аналогичными уравнениями для  $y$  и  $z$  — координат, мы приходим к векторному уравнению

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n,$$

совпадающему с уравнением луча (17.33). Тем самым мы убеждаемся, что это уравнение является следствием принципа Ферма.

Убедимся в заключение, что известные законы отражения-преломления света также могут быть выведены из принципа Ферма. Покажем это на

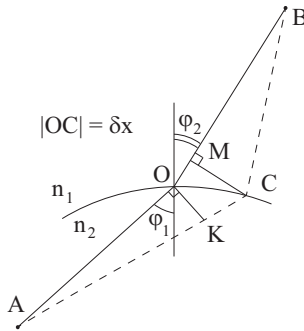


Рис. 17.10

примере закона преломления. Для этого рассмотрим луч, проходящий

через точку  $A$  среды 1 и точку  $B$  среды 2 с показателями преломления  $n_1 = \text{const}$ ,  $n_2 = \text{const}$ . Пусть границу раздела сред луч пересекает в точке  $O$ . Необходимо показать, во-первых, что ломаный луч  $AOB$  образует плоскость, проходящую через нормаль к поверхности раздела в точке  $O$ , как изображено на рис. 17.10. Во-вторых, необходимо убедиться, что углы падения и преломления связаны соотношением (17.35)

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2.$$

Как следует из принципа Ферма, оптическая длина реального луча  $AOB$  должна иметь экстремальное значение и, следовательно, при переходе к любому близкому воображаемому пути в первом приближении не должна изменяться. Возьмём, например, возможный путь в виде ломаной  $ACB$  (на рис. 17.10 показан штриховой линией), где точка  $C$  также находится на поверхности раздела, но смещена на величину  $\delta x$  от точки  $O$  в плоскости рисунка. При этом суммарное изменение оптической длины пути между точками  $A$  и  $B$  в первом приближении по степеням  $\delta x$  составит

$$\delta \ell = n_1 |KC| - n_2 |OM| = (n_1 \sin \varphi_1 - n_2 \sin \varphi_2) \delta x$$

(необходимые обозначения содержатся на рисунке). Следовательно, требование  $\delta \ell = 0$  приводит к нужному равенству (17.35).

Нам остается рассмотреть возможный путь, полученный смещением точки  $O$  на расстояние  $\delta y$  в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Легко увидеть, что изменение оптической длины пути при этом пропорционально  $(\delta y)^2$  и, следовательно, условие  $\delta \ell = 0$  для траектории  $AOB$  выполняется. Таким образом, истинная траектория луча, соединяющего точки  $A$  и  $B$ , действительно лежит в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности раздела в точке  $O$ , в чём и нужно было убедиться.

Исследование поведения лучей в среде с непрерывно изменяющимся показателем преломления  $n(\mathbf{r})$  на этом завершим. Дальнейшие шаги будут относиться к случаю, когда среда состоит из отдельных областей с постоянными свойствами и изменение свойств происходит только на границах раздела отдельных областей. В пределах однородных областей свет распространяется прямолинейно; изменение направления происходит на границах, где справедливы законы отражения-преломления. Вследствие этого исследование поведения лучей во многих оптических устройствах, имеющих важное практическое значение, в частности, для формирования светового пучка (светотехника) и для образования изоб-

ражения (оптотехника), состоит просто из последовательного использования законов отражения и преломления.

Заметим, что полученные на этом пути конкретные рекомендации, необходимые для создания совершенных оптических систем, составляют предмет специальных курсов и подробно здесь изложены быть не могут. Мы ограничимся рассмотрением простейших вопросов из этого круга. Начнем с понятий, характеризующих свойства оптических пучков в однородных средах и их изменения в результате отражений-преломлений на границах раздела.

## 17.8. Гомоцентричность и астигматизм оптического пучка

1. Пучок лучей, исходящих из светящейся точки, называется *гомо-*

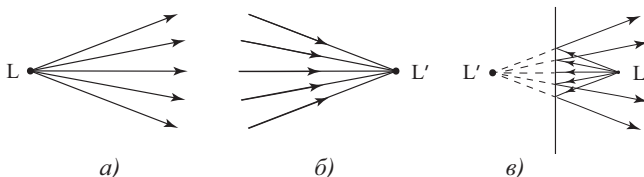


Рис. 17.11

*центрическим*, т. е. имеющим общий центр (рис. 17.11(а)). Если после отражения или преломления этот пучок превращается в пучок, сходящийся также в одну точку, то и последний представляет собой гомоцентрический пучок и центр его является *изображением* светящейся точки (рис. 17.11(б)). (Светящаяся точка и её изображение везде в этой главе будут иметь обозначения  $L$  и  $L'$ .) В том случае, когда в результате отражения-преломления гомоцентрический пучок превращается в расходящийся (также гомоцентрический) пучок лучей, как бы исходящих из одной точки, эту точку называют *мнимым изображением* светящейся точки. Этот случай на простейшем примере отражения от плоского зеркала представлен на рис. 17.11(в). Здесь точки  $L$  и  $L'$  симметричны относительно плоскости зеркала.

Понятно, что оптическая система может создать изображение предмета (действительное или мнимое), если гомоцентрические пучки, исхо-

дящие из его точек, после прохождения оптической системы остаются гомоцентрическими и такие изображения называются *стигматическими*. Однако «в чистом виде» подобные случаи редки и обычно после прохождения оптической системы гомоцентрический пучок превращается в пучок лучей, не пересекающихся строго в одной точке. Такой пучок называется *астигматическим*.

2. Простейший случай преобразования гомоцентрического пучка в астигматический имеет место при преломлении на плоской границе раздела двух прозрачных сред с различными показателями преломления. Этим примером, в котором получаемый астигматический пучок обладает осью симметрии, мы ограничимся для знакомства с характерной особенностью этих пучков — наличием так называемых фокальных линий вместо точечного изображения.

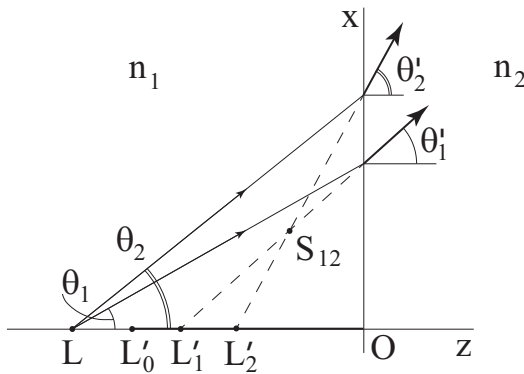


Рис. 17.12

Схема процесса представлена на рис. 17.12. Здесь граница  $z = 0$  разделяет области с показателями  $n_1$ ,  $n_2$ , причём, для определенности, принято, что  $n_1 > n_2$ . Гомоцентрический пучок исходит из точки  $L$ , находящейся на оси  $z$  с координатой  $z_L < 0$ . Пучок этот осесимметричен. Лучи, показанные на рисунке, принадлежат определённой радиальной плоскости, проходящей через ось  $z$ .

Сначала мы сосредоточим внимание на лучах, падающих на границу раздела под определённым углом, например,  $\theta_1$ . (То есть сгруппируем все падающие лучи по их углам падения.) Совокупность этих лучей составляет коническую поверхность с вершиной  $L$  и углом  $\theta_1$  при вершине. После преломления эта совокупность лучей превращается также

в конический пучок. Но теперь его вершиной является точка  $L'_1$ , а угол при вершине равен  $\theta'_1$ . Таким образом, весь конический пучок лучей, падающих под фиксированным углом  $\theta_1$ , после преломления образует конический пучок с углом при вершине  $L'_1$ , равным  $\theta'_1$ , и является гомоцентрическим. Следовательно, точка  $L'_1$  является изображением точки  $L$ , порождённым всеми лучами, падающими под углом  $\theta_1$ .

Конические пучки лучей, исходящих из  $L$  под другими углами, после прохождения границы раздела также превращаются в гомоцентрические пучки, но каждый из них имеет свой центр  $L'$ , не совпадающий с  $L'_1$ . Набор всех этих точечных изображений составляет отрезок оси  $z$  от  $z'_0 = (n_2/n_1)z_L$  до  $z' = 0$ , выделенный на рисунке. Левый край этого отрезка соответствует лучам, падающим под малыми углами  $\theta \ll 1$  и обозначен буквой  $L'_0$ , а правому краю соответствует угол полного внутреннего отражения  $\theta_*$ , существующий в рассматриваемом случае  $n_1 > n_2$ . Отметим, что в оптике подобные линии точечных изображений часто называют *фокальными линиями*, а сами точки — фокальными точками. Следовательно, полученная в рассматриваемом примере первая фокальная линия представляет собой отрезок прямой.

**3\***. Впоследствии, при оценке величины сферической аберрации тонкой линзы, нам понадобится функция  $z'(\theta)$ , определяющая положение фокальной точки, соответствующей конусу лучей, от угла при его вершине для малых значений  $\theta$ . Для её нахождения воспользуемся геометрическим соотношением  $z' \operatorname{tg} \theta' = z_L \operatorname{tg} \theta$  (см. рис. 17.12) и законом Снеллиуса  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta'$ . Выразив тангенсы, входящие в первое из этих соотношений, через синусы в виде  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , откуда получаем для произвольных  $\theta$ :

$$z' = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{1 - n_{12}^2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right)^{1/2} z_L, \quad n_{12} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Для бесконечно малых углов имеем

$$z'_0 = (n_2/n_1)z_L,$$

как уже отмечалось в связи с точкой  $L'_0$  на рис. 17.12. При небольших отклонениях  $\theta$  от значения  $\theta = 0$  искомый результат следует из разложения

$$\left( \frac{1 - n_{12}^2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(1 - n_{12}^2)\theta^2.$$

Получающееся выражение

$$z' = \frac{n_2}{n_1} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2} \theta^2 \right) z_L$$

можно представить в виде суммы

$$z' = z'_0 + \delta z,$$

где

$$\delta z = \frac{1}{2} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1 n_2} \theta^2 z_L = \frac{x_p^2}{2z_L} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1 n_2} \quad (17.40)$$

имеет смысл смещения рассматриваемой фокальной точки (или соответствующего «изображения») относительно точки  $z'_0$  нулевого приближения. В последней из формул (17.40)  $\delta z$  выражено через поперечную  $x$ -координату точки пересечения Р падающего луча с границей раздела  $z = 0$ , т. е.  $x_p = -\theta z_L$ . Видно, что смещение  $\delta z$  по порядку величины определяется характерным размером  $x_p^2/2z_L$ . Завершающие слова допишу позже.

4. Теперь обратимся к лучам, лежащим в фиксированной радиальной плоскости и обладающим разными значениями  $\theta$ . На рис. 17.12 изображены два таких луча с углами падения  $\theta_1, \theta_2$ , отличающимися на конечную величину  $\Delta\theta$ , и результаты их преломления. Видно, что их продолжения имеют одну точку пересечения  $S_{12}$ , не лежащую на оси  $z$ . Однако такие точки, через которые проходят всего по два луча и потому изображения не являются, интереса не представляют. Иное дело — соответствующие точки пересечения, порожденные падающими лучами в бесконечно малом интервале углов падения, например, от  $\theta_1$  до  $\theta_1 + \delta\theta_1$ . Эти пересечения составляют одну физическую точку-изображение с бесконечно малым размером, на рис. 17.13 отмеченную символом  $S_1$ . Понятно, что эта точка лежит на продолжении прелом-

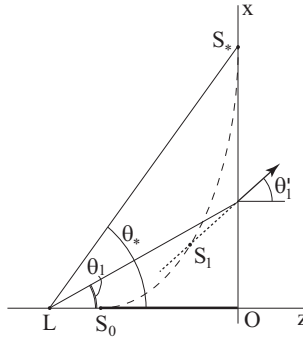


Рис. 17.13

лённого луча, идущего под углом  $\theta'_1$ . Её  $z$ -координата, как координата точки пересечения соответствующих прямых, выражается формулой

$$z_1 = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{\cos \theta'_1}{\cos \theta_1} \right)^3 z_L. \quad (*)$$

Для её вывода обратимся к рис. 17.13 и уравнения рассматриваемых прямых запишем в виде

$$x = (-z_L) \operatorname{tg} \theta_1 + z \operatorname{tg} \theta'_1 \quad \text{и} \quad x = (-z_L) \operatorname{tg}(\theta_1 + \delta\theta_1) + z \operatorname{tg}(\theta'_1 + \delta\theta'_1).$$

Приравняем их правые части, предварительно тангенсы из правой формулы разложив в ряд Тейлора

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \delta\theta_1) = \operatorname{tg}(\theta_1) + \frac{1}{\cos^2 \theta_1} \delta\theta_1, \quad \operatorname{tg}(\theta'_1 + \delta\theta'_1) = \operatorname{tg}(\theta'_1) + \frac{1}{\cos^2 \theta'_1} \delta\theta'_1.$$

После сокращений получаем равенство

$$z_L \frac{1}{\cos^2 \theta_1} \delta\theta_1 = z \frac{1}{\cos^2 \theta'_1} \delta\theta'_1$$

Подставив сюда связь

$$n_1 \cos \theta_1 \delta\theta_1 = n_2 \cos \theta'_1 \delta\theta'_1$$

между  $\delta\theta_1$  и  $\delta\theta'_1$ , следующую из закона преломления  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta'_1$ , приходим к формуле (\*).

Естественно, формулу (\*) можно легко переписать, выразив  $\cos \theta'_1$  через функции от угла  $\theta_1$ . Но практически в этом необходимости нет, поскольку мы не будем задерживаться на подробном исследовании рассматриваемого примера. Отметим лишь, что совокупность точек  $S_1$  из всех радиальных плоскостей составляет окружность с центром на оси  $z$ . Она представляет собой вторую фокальную линию для полученного астигматического пучка. При изменении угла  $\theta_1$  от 0 до критического угла полного внутреннего отражения  $\theta_*$  соответствующие изображения  $S_1$  перемещаются по кривой в радиальной плоскости, схематически представленной на рис. 17.13 штриховой линией (*каустическая линия*). Для её построения необходима формула (\*). Но крайние её точки  $S_0$  и  $S_*$ , лежащие соответственно на лучах  $\theta'_1 = 0$  и  $\theta'_1 = \pi/2$ , легко определяются из определения. Отметим, что точка  $S_0$  совпадает с точкой  $L'_0$  первой фокальной линии. Это означает, что когда исходящий из точки  $L$  пучок является бесконечно узким, падающим на границу раздела приблизительно по нормали, обе фокальные линии сливаются в одну точку  $L'_0$ ; при этом преломлённый пучок остается гомоцентрическим. Но если такой пучок падает на границу раздела *наклонно*, то после преломления он уже станет астигматическим. Удобно этот падающий пучок представлять в виде пучка, состоящего из лучей между коническими поверхностями  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_1 + \delta\theta$  и радиальными плоскостями с углом между ними  $\delta\alpha$ . Тогда фокальными линиями преломлённого астигматического пучка являются отрезки бесконечно малых длин  $\delta L'$ ,  $\delta S$ , расположенные на конечном расстоянии друг от друга, равном расстоянию между точками  $L'_1$ ,  $S_1$  из рис. 17.13. Видно, что чем больше угол падения  $\theta_1$ , тем эта астигматическая разность увеличивается.

Сказанное легко иллюстрируется результатом наблюдения. Если рассматривать предметы, находящиеся, например, под водой, в направлении, близком к нормальному по отношению к поверхности воды, то



изображение сохраняет чёткость, так как астигматизм в этих условиях мал; при рассматривании под косыми углами чёткость изображения портится из-за астигматизма.

## 17.9. Мнимое изображение, создаваемое тонкой призмой

Обратимся к примеру мнимого изображения, получаемого в результате двух преломлений на плоских границах тонкой призмы.

Пусть пучок от светящейся прямой линии падает на тонкую призму с малым углом  $\alpha \ll 1$  между преломляющими гранями, как показано на рис. ???. Светящаяся линия и призма перпендикулярны плоскости

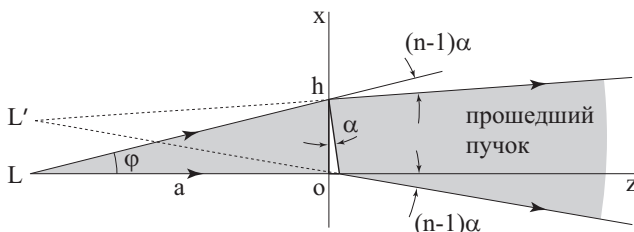


Рис. 17.14

$(x, z)$ , точка  $L$  задает положение источника света; падающий на призму пучок и результат его преломления на рисунке затемнены. Как следует из предыдущего параграфа, падающий пучок должен быть достаточно узким; для этого мы примем, что высота призмы  $h$  мала по сравнению с расстоянием  $a$  ( $h \ll a$ ) и, следовательно, все рассматриваемые на рис. 17.14, рис. 17.15 углы малы.

Известный результат для этого примера утверждает, что, во-первых, после прохождения призмы пучок отклоняется на угол  $(n - 1)\alpha$  и, во-вторых, как бы исходит из мнимого изображения  $L'$ , расположенного на удалении  $\Delta l = a(n - 1)\alpha$ , от  $L$ , как показано на рис. 17.14. Поскольку этот результат часто используется при изучении явления интерференции, мы здесь его получим более аккуратно, чем обычно, не игнорируя встречающиеся на пути некоторые тонкости.

Первую часть ответа легко усмотреть из соответствующих геометрических построений для лучей, представленных на фрагментах (а), (б) рис. 17.15, отличающихся соотношением между углами  $\varphi_1$  и  $\alpha$ . Здесь символами  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ , и  $\varphi_2$  обозначены углы наклона от направления оси

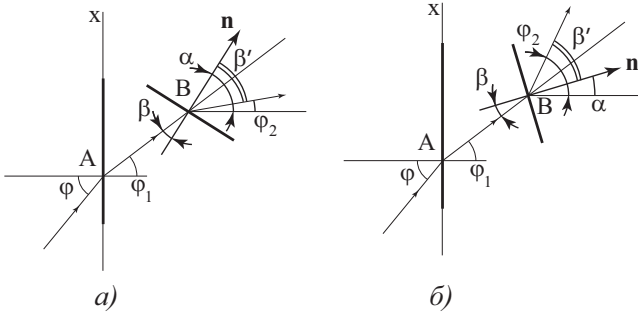


Рис. 17.15

$z$  соответственно для падающего луча, луча, преломлённого на вертикальной грани и луча, прошедшего через обе грани призмы. Направление, снабжённое векторным символом  $\mathbf{n}$ , есть направление нормали к выходной грани призмы. Угол падения единожды преломлённого луча на наклонную грань обозначен  $\beta$ , а соответствующий угол преломления  $\beta'$ . Как видно из рисунка (а), соответствующего случаю  $\varphi_1 > \alpha$ , справедливы равенства

$$\beta = \varphi_1 - \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \beta' + \alpha.$$

С учётом соотношений  $\beta' = \beta n$ ,  $\varphi_1 = \varphi/n$  отсюда получаем:

$$\varphi_2 = (\varphi_1 - \alpha)n + \alpha = \varphi - (n - 1)\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_2 - \varphi = -(n - 1)\alpha.$$

(Из рисунка (б), соответствующего случаю  $\varphi_1 < \alpha$ , получается тот же результат:  $\beta = \alpha - \varphi_1$ ,  $\varphi_2 = \alpha - \beta' = \alpha - (\alpha - \varphi_1)n = \varphi - (n - 1)\alpha$ .)

Таким образом, как мы убедились, все лучи, исходящие из точки  $L$ , после прохождения призмы действительно поворачиваются на один угол  $(n - 1)\alpha$  в сторону основания призмы.

Для доказательства второй части приведенного утверждения о существовании мнимого изображения необходимо, вообще говоря, проследить за геометрией преломлённого луча, включая прохождение точек  $A$

и  $B$  (рис. ??). на гранях призмы. Если же довольствоваться правдоподобными рассуждениями, то процедуру «доказательства» можно предельно упростить. Считать, что для тонкой призмы смещением луча на пути от  $A$  до  $B$  можно пренебречь и принять, что изменение угла от  $\varphi$  до  $\varphi - (n-1)\alpha$  происходит непосредственно в точке  $A$ . В этом предположении крайний преломлённый луч, соответствующий лучу, падающему на призму под углом  $\varphi = 0$ , проходит через начало координат (см. рис. ??) с углом наклона  $-(n-1)\alpha$  и подчиняется уравнению

$$x = -(n-1)\alpha z. \quad (a)$$

Любой другой преломлённый луч, проходящий через соответствующую точку  $A$  с координатами  $x_A = \varphi a$ ,  $z_A = 0$  с углом наклона  $\varphi - (n-1)\alpha$ , описывается уравнением

$$x = \varphi a + [\varphi - (n-1)\alpha]z. \quad (b)$$

С первым лучом (a) он пересекается в точке с координатами

$$x_* = a(n-1)\alpha, \quad z_* = -a, \quad (c)$$

не зависящими от угла  $\varphi$ , и, следовательно, определяющими положение мнимого изображения  $L'$ .

Читателю, не склонному принимать на веру результаты подобных упрощённых умозаключений, полезно будет более строгое рассмотрение. Теперь не будем игнорировать толщину призмы, которую у основания  $x = 0$  примем равной  $\Delta_0$ . Тогда первый из рассматриваемых преломлённых лучей будет выходить из точки  $x = 0$ ,  $z = \Delta_0$  и определяться уравнением

$$x = -(n-1)\alpha(z - \Delta_0). \quad (d)$$

Второй луч, получаемый в результате двух преломлений в точках  $A$  и  $B$ , где разворачивается от малого угла  $\varphi \neq 0$  до  $\varphi - (n-1)\alpha$ , описывается уравнением прямой

$$x - x_B = [\varphi - (n-1)\alpha](z - z_B), \quad (e)$$

проходящей через точку  $B$  с соответствующим углом наклона. Координаты точки  $B$ , как точки пересечения единой преломлённого луча  $x = \varphi a + (\varphi/n)z$  и выходной грани призмы  $z = \Delta_0 - \alpha x$ , выражаются формулами

$$x_B = \frac{a + (\Delta_0/n)}{1 + \alpha\varphi/n}, \quad z_B = \Delta_0 - \alpha\varphi \frac{a + (\Delta_0/n)}{1 + \alpha\varphi/n}. \quad (f)$$

Для точки пересечения рассматриваемых лучей (d), (e) с учётом формул (f) получаем результат

$$x_* = (n-1)\alpha(a + \Delta_0/n)(1 + O(\alpha\varphi, \alpha^2)), \quad z_* = \Delta_0 - (a + \Delta_0/n)(1 + O(\alpha\varphi, \alpha^2)).$$

Отсюда видно, что в первом приближении

$$x_* = (n-1)\alpha(a + \Delta_0/n), \quad z_* = \Delta_0 - (a + \Delta_0/n)$$

точка пересечения не зависит от угла  $\varphi$  и, следовательно, представляет собой мнимое изображение источника  $L$ . Близость полученного результата к результату нулевого приближения (с) позволяет использовать последнее в приложениях.

○ ○ ○

Вернемся к оптическим системам. Одним из самых распространенных элементов оптических систем являются линзы, составленные из сферических поверхностей. Поэтому следующий параграф будет посвящен исследованию фокусировки оптических пучков на сферической поверхности.

## 17.10. Преломление луча на сферической поверхности. Параксиальное приближение

1. Пусть сферическая граница (см. рис. 17.16) разделяет области с

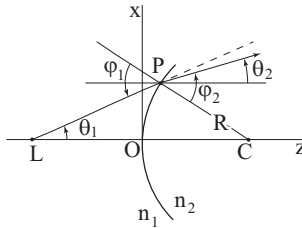


Рис. 17.16

показателями преломления  $n_1 = \text{const}$ ,  $n_2 = \text{const}$ .<sup>6</sup> Луч света, исходящий из точки  $L$  области 1, падает на поверхность раздела. Соединим точку  $L$  с центром сферы  $C$  и полученную прямую примем за ось  $z$  (ось симметрии). Плоскость, образованная падающим лучом и осью  $z$ , является меридиональной плоскостью для сферы; поперечную декартову координату в ней назовём  $x$ . Отметим, что в этой плоскости лежат также нормаль к границе раздела в точке падения  $P$  и преломленный

<sup>6</sup>Нам, конечно, более привычно средой 1 считать воздух ( $n_1 = 1$ ), а в качестве среды 2 принять стекло с  $n_2 > 1$ . Но для возможности обобщений здесь мы примем общие обозначения  $n_1, n_2$ .

луч. Направления лучей характеризуются углами  $\theta_1, \theta_2$  отклонения от направления оси  $z$  и углами падения-преломления  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Положительные направления углов на рис. 17.16 указаны стрелками.

Задачей данного пункта является определение направления преломленного луча, задаваемого углом  $\theta_2$ . Для этого служат закон Снеллиуса и геометрические соотношения

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2, \quad \varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2 = \arcsin(x_p/R), \quad (17.41)$$

связывающие углы перед и за границей раздела. Здесь  $x_p$  — координата точки пересечения луча со сферой,  $R$  — радиус сферы. Если принять, что радиусу сферы приписывается ещё и знак (так, чтобы вогнутой поверхности соответствовал отрицательный знак), тогда геометрические соотношения из системы (17.41) остаются справедливыми и для вогнутой поверхности, как нетрудно усмотреть из рис. 17.17, рис. 17.18. Здесь представлены соответствующие геометрии для двух случаев падения

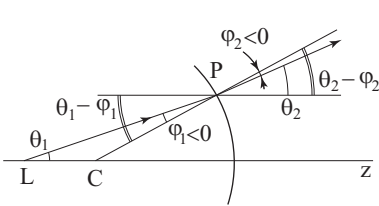


Рис. 17.17

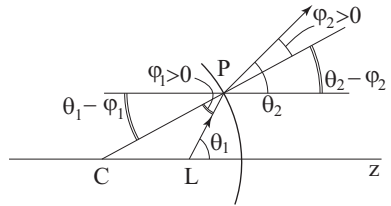


Рис. 17.18

луча на вогнутую поверхность, отличающихся лишь знаками угла падения (а, следовательно, и угла преломления). Эти знаки явно указаны на рисунках, так же как значения углов, выделенных здесь двойными скобками, которые в обоих случаях выражаются одинаковыми формулами  $(\theta_1 - \varphi_1)$  и  $(\theta_2 - \varphi_2)$ . Видно, что условие их равенства приобретает форму геометрического соотношения из (17.41), если радиус сферы будет подразумеваться отрицательным.

Для произвольных по величине углов простые зависимости  $\theta_2 = \theta_2(\theta_1, x_p/R)$  для направления преломленного луча из соотношений (17.41) получить невозможно. Если же ограничиться так называемым *параксиальным приближением*, т. е. рассматривать лучи, характеризующиеся малыми углами, и принадлежащие пучку с малым поперечным размером:

$$|\varphi| \ll 1, \quad |\theta| \ll 1, \quad x_p \ll |R|, \quad (17.42)$$

то соотношения (17.41) становятся линейными

$$n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2, \quad \varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2 = x_p/R.$$

При этом искомый результат легко приводится к виду

$$n_2\theta_2 = (n_1 - n_2)(x_p/R) + n_1\theta_1. \quad (17.43)$$

Это основное соотношение геометрической оптики для преломления луча на сферической поверхности, фактически определяющее её фокусирующие свойства.

**2.** Воспользуемся полученным соотношением для определения координаты<sup>7</sup>  $z_2$  точки  $L'$ , где преломлённый в точке  $P$  на сфере луч (или его

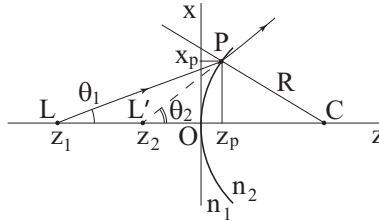


Рис. 17.19

продолжение) пересекает ось  $z$  (см. рис. 17.19). Для этого заметим, что малые углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  связаны с координатами  $z_1$ ,  $z_2$  соотношениями

$$\theta_1 = \frac{x_p}{-z_1 + z_p} = \frac{x_p}{-z_1} \left(1 + \frac{z_p}{z_1}\right), \quad \theta_2 = \frac{x_p}{-z_2 + z_p} = \frac{x_p}{-z_2} \left(1 + \frac{z_p}{z_2}\right),$$

в окончательном виде представленными с учётом малости  $|z_p| = x_p^2/2|R|$  по сравнению с  $|z_1|$ ,  $|z_2|$ . После подстановки в равенство (17.43) они приводят к искомой зависимости

$$\frac{n_2}{z_2} \left(1 + \frac{z_p}{z_2}\right) = \frac{n_1}{z_1} \left(1 + \frac{z_p}{z_1}\right) + \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (17.44)$$

<sup>7</sup>Обратим внимание, что в литературе по геометрической оптике положения точек на оптической оси обычно задают «расстояниями» (положительными или отрицательными) от определённых точек. Имея в виду, что только координаты точек имеют однозначный смысл, не требующий дополнительных договорённостей, в данном Пособии везде используются координаты точек. «Расстояния» упоминаются только в комментариях.

определяющей  $z_2$  при фиксированном значении  $z_1$ . Отсюда видно, что искомая координата  $z_2$ , вообще говоря, зависит от положения точки  $P$  на сфере.

Представляется естественным, что в параксиальном приближении (17.42) малую координату  $z_p$  из уравнения (17.44) можно исключить. Идеализированный вариант этого уравнения<sup>8</sup>

$$\frac{n_2}{z_2^{(0)}} = \frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (17.45)$$

получаемый в пренебрежении величиной  $z_p$ , обычно применяют вместо (17.44). Именно из этого приближения приходят к заключению, что все лучи, исходящие из точки  $L$  с координатой  $z_1$ , после прохождения сферической границы пересекают ось  $z$  в одной точке. Или, более точно, этот вывод формулируют так: после преломления на сферической поверхности гомоцентрический пучок остается гомоцентрическим, *если он удовлетворяет условию параксиальности*.

Конечно, при  $z_p \rightarrow 0$ , равносильном требованию  $\theta_1 \rightarrow 0$ , все соответствующие лучи собираются в точке с координатой  $z_2^{(0)}$ , определяемой формулой (17.45). Но нам интересно знать, какой разбег углов  $\Delta\theta_1$  вблизи  $\theta_1 = 0$  допустим, при котором приведенный вывод в определённом смысле (в каком именно?) справедлив. Иначе говоря, нужен более точный критерий, определяющий параксиальность пучка. Оценка для него будет получена в следующем параграфе, а пока заметим, что в зависимости от знаков и величин  $R$  и  $(n_2 - n_1)$  значение  $z_2^{(0)}$  (17.45) по знаку либо отличается от  $z_1$  (при этом изображение является действительным), либо совпадает — для мнимого изображения.

Ещё одно замечание относительно точек  $L$  и  $L'$ . Пока мы считали, что в точке  $L$  располагается источник, а  $L'$  соответствует изображению. Очевидно из приведенных рассуждений, что если источник света поместить в точку  $L'$ , то его изображением станет<sup>9</sup> точка  $L$ . Такие точки впредь будут называться *сопряжёнными*.

Повторим также ещё раз, что все геометрические результаты, относящиеся к траектории преломлённого луча, в параксиальном приближении получаются с использованием условия  $z_p = 0$ . Это означает, что при расчёте траектории излом луча считается происходящим не в точке  $P$

<sup>8</sup>Здесь обозначением  $z_2^{(0)}$  подчёркивается его соотнесённость к нулевому приближению искомой величины.

<sup>9</sup>В этом можно убедиться также из принципа Ферма, обратившись к следующему параграфу.

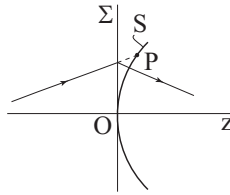


Рис. 17.20

пересечения со сферической поверхностью, а в плоскости, касающейся сферы в точке  $z = 0$ , как схематически изображено на рис. 17.20.

**3.** Найдём задний и передний фокусы преломляющей сферической поверхности. Обратимся для этого к параллельному пучку лучей, падающему на сферическую поверхность, получающемуся при  $z_1 = -\infty$ . После преломления этот пучок собирается в точке, которую называют *задним фокусом*  $F_2$  преломляющей поверхности, координату которой

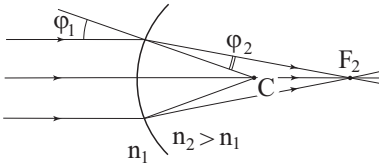


Рис. 17.21

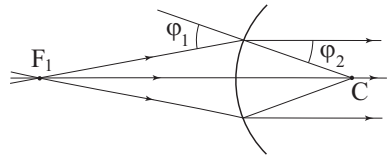


Рис. 17.22

удобно обозначить символом  $z_{2f}$ . Как следует из формулы (17.45),

$$z_{2f} = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}. \quad (17.46)$$

Наоборот, точка с координатой

$$z_{1f} = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \quad (17.47)$$

называется *передним фокусом*  $F_1$  преломляющей поверхности. Падающий гомоцентрический пучок с центром в этой точке после преломления уходит в виде параллельного пучка (т. е.  $z_2^{(0)} = \infty$ ).

Так же, как и изображения, фокусы могут быть действительными или мнимыми. Их положения в пространстве и характер можно определить непосредственно из построений с учетом граничного условия



$n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2$ . На рис. 17.21 и рис. 17.22 представлен случай, где падающий пучок встречает выпуклую поверхность раздела и показатели среды удовлетворяют условию  $n_2 > n_1$  (следовательно,  $\varphi_2 < \varphi_1$ .) Видно, что фокусы  $F_1, F_2$  расположены здесь в собственных областях 1,2 и являются действительными. При изменении знака  $R$  (то есть если пучок встречает вогнутую поверхность) и сохранении условия  $n_2 > n_1$ , как видно из рис. 17.23, рис. 17.24, фокусы становятся мнимыми, а рас-

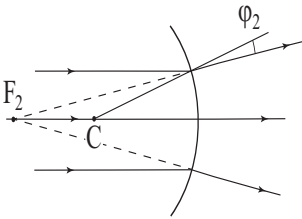


Рис. 17.23

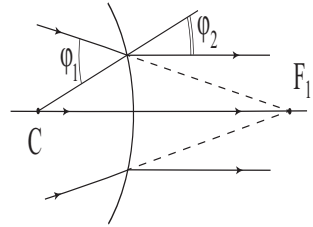


Рис. 17.24

полагаются они в смежных областях (например,  $F_1$  находится в области 2). Естественно, всё это непосредственно вытекает из формул (17.46), (17.47), из которых следует, что изменение характера фокусов происходит при изменении знака произведения  $R(n_2 - n_1)$ . При положительных  $R(n_2 - n_1)$  имеем действительные фокусы, расположенные в собственных областях, при отрицательных  $R(n_2 - n_1)$  — фокусы мнимые, а расположены они в смежных областях.

Полезно здесь обратить внимание на два обстоятельства, связанные с фокусами  $F_1, F_2$ . Во-первых, их координаты связаны между собой соотношением

$$\frac{z_1 f}{z_2 f} = -\frac{n_1}{n_2}, \quad (17.48)$$

так что фокусы всегда, независимо от отношения  $n_1/n_2$  и значения радиуса  $R$  (по величине и знаку), располагаются по разные стороны от поверхности раздела. Во-вторых, если фокусы использовать в качестве начала отсчёта  $z$ -координат точек  $L, L'$  и принять

$$\tilde{z}_1 = z_1 - z_1 f, \quad \tilde{z}_2 = z_2^{(0)} - z_2 f, \quad (17.49)$$

то связь (17.45) между соответствующими координатами замечательно

упрощается<sup>10</sup> и принимает вид

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_2 = z_1 f z_2 f. \quad (17.50)$$

Как следует из связи (17.48), правая часть соотношения (17.50) всегда отрицательна. Следовательно, источник  $L$  и его изображение  $L'$  всегда располагаются по разные стороны от соответствующих фокусов.

4. От изображения точечного объекта перейдём к изображению малого предмета, создаваемого преломляющей сферической границей. Пусть

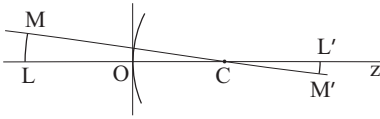


Рис. 17.25

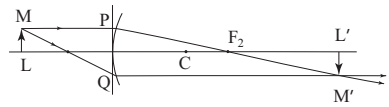


Рис. 17.26

$L$  и  $L'$  — точечный объект и его изображение (см. рис. 17.25). Если повернём ось  $LC$  вокруг центра кривизны  $C$  на небольшой угол, то точка  $L$  перейдёт в положение  $M$ , а её изображение — в положение  $M'$ . При этом все точки дуги  $LM$  отобразятся соответственными точками дуги  $L'M'$ . Если дуги  $LM$  и  $L'M'$  малы, то их можно рассматривать как прямолинейные отрезки, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси  $z$  и проходящих через точки  $L$   $L'$ . Точно так, как точки  $L$  и  $L'$  являются сопряжёнными точками, названные две плоскости являются сопряжёнными плоскостями, поскольку любые две точки  $M$  и  $M'$  этих плоскостей, соединяемые прямой, проходящей через центр  $C$ , являются сопряжёнными. Отсюда вытекает, что изображением малой плоской площадки  $\Delta S$ , нормальной к оптической оси, будет также соответствующая плоская площадка  $\Delta S'$  в сопряжённой плоскости.

До сих пор положения точек  $L$ ,  $L'$  и, следовательно, сопряжённых плоскостей мы определяли  $z$  — координатами, подчиняющимися формуле (17.45). Теперь продемонстрируем **геометрический метод построения изображения**. Для этого воспользуемся тем, что каждая точка изображения, являющаяся местом пересечения всех лучей, исходящих из сопряжённой точки объекта, может быть определена местом пересечения любых двух из этих лучей. Знание положений переднего и

<sup>10</sup>Для этого второе слагаемое правой части (17.45) заменяем на  $n_2/z_2 f$ , полученное равенство делим на  $n_1$  и подставляем в него значения  $z_1, z_2^{(0)}, n_1/n_2$ , получаемые из соотношений (17.48), (17.49).

заднего фокусов позволяет провести два луча, исходящих из точечного объекта (точка  $M$  на рис. 17.26), направления которых после преломления на сфере нам известны. Это луч  $MP$ , параллельный оптической оси, и луч  $MQ$ , проходящий через передний фокус. После преломления они идут так, как изображено на рисунке, и пересекаются в точке  $M'$ , являющейся изображением точки  $M$ . Дополнив рисунок точками  $L, L'$ , мы получили отрезок  $LM$  и его изображение — отрезок  $L'M'$ .

## 17.11. О критерии параксиальности

В учебном пособии, предназначенном для начинающих, полезно к вопросу о фокусировке на сферической поверхности раздела подойти ещё и с другой стороны, обратившись к принципу Ферма. Здесь мы не только продемонстрируем использование принципа Ферма для определения положения изображения, но, что важнее, покажем, что изображение фактически не является точкой, через которую проходят все рассматриваемые лучи, а представляет собой короткий отрезок прямой. Мы оценим длину этой фокальной линии и обсудим, в каком смысле её длиной можно пренебречь и изображение обоснованно считать точечным. Иными словами, мы здесь получим критерий параксиальности гомоцентрического пучка.

Итак, рассмотрим достаточно тонкий гомоцентрический пучок лучей, исходящих из светящейся точки  $L$ , падающий на сферическую границу раздела сред. Два луча из этого пучка изображены на рис. 17.27.

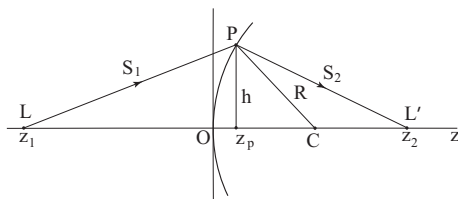


Рис. 17.27

Один из них падает на поверхность по нормали и проходит границу без преломления. (По направлению этого луча проведена ось  $z$ , за начало координат принята точка  $O$  на сфере.) Второй луч проходит через точку  $P$  поверхности, расположенную на малом расстоянии  $h$  от оси  $z$ .

После преломления этот луч пересекает ось  $z$  в некоторой точке  $L'$  с координатой  $z_2$ , которую требуется определить (символ  $z_1$  на рис. 17.27 относится к светящейся точке  $L$ ).

Как следует из принципа Ферма, когда два луча, исходящие из одной точки  $L$ , после прохождения границы встречаются в точке  $L'$ , оптические длины ломаного луча  $LPL'$  и прямого луча  $LL'$  должны быть между собой равны. Обозначив расстояния  $|LP|$ ,  $|PL'|$  символами  $s_1$ ,  $s_2$  (см. рис. 17.27), названное условие представим в виде

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1(-z_1) + n_2 z_2. \quad (17.51)$$

Оно служит для определения искомой координаты  $z_2$ , для чего предварительно  $s_1$ ,  $s_2$  выразим через  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $R$ . Для параксиальных лучей с поперечной координатой  $h$ , удовлетворяющей условию

$$h \ll (s_1, s_2, R),$$

для этого воспользуемся приближенными геометрическими формулами

$$s = d + \frac{h^2}{2d}, \quad d = s - \frac{h^2}{2s}, \quad (17.52)$$

определяющими разность между гипотенузой  $s$  и длинным катетом  $d$  в треугольнике по его короткому катету  $h \ll d$ . В рассматриваемом случае рис. 17.27 гипотенузами являются  $s_1$ ,  $s_2$ , а соответствующие длинные катеты отличаются от  $|z_1|$  и  $z_2$  на координату точки  $P$ , равную

$$z_p = h^2/2R. \quad (17.53)$$

Для гипотенуз  $s_1$ ,  $s_2$  имеем

$$s_1 = (-z_1 + z_p) + \frac{h^2}{2(-z_1)(1 - z_p/z_1)} = (-z_1 + z_p) - \frac{h^2}{2z_1} \left(1 + \frac{z_p}{z_1}\right),$$

$$s_2 = (z_2 - z_p) + \frac{h^2}{2z_2} \left(1 + \frac{z_p}{z_2}\right).$$

После подстановки этих выражений и равенства (17.53) условие (17.51) здесь приводится к квадратному уравнению

$$n_1 \left(1 - \frac{R}{z_1}\right) - n_2 \left(1 - \frac{R}{z_2}\right) - \epsilon \left[ n_1 \left(\frac{R}{z_1}\right)^2 - n_2 \left(\frac{R}{z_2}\right)^2 \right] = 0, \quad (17.54)$$

для искомой величины, представленной в виде безразмерной переменной  $R/z_2$ . Координата  $h$  также безразмерна с помощью масштаба  $R$  и в уравнение входит в виде малого параметра

$$\epsilon = \frac{h^2}{2R^2} \ll 1. \quad (17.55)$$

при квадрате неизвестной. Решение построим по методу возмущения:

$$z_2 = z_2^{(0)} + \epsilon z_2^{(1)}.$$

Подставив выражение

$$\frac{R}{z_2} = \frac{R}{z_2^{(0)} + \epsilon z_2^{(1)}} = \frac{R}{z_2^{(0)}} \left( 1 - \epsilon \frac{z_2^{(1)}}{z_2^{(0)}} \right)$$

в уравнение (17.54), для нулевого и первого приближений получим соответствующие результаты:

$$\frac{n_2}{z_2^{(0)}} = \frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (17.56)$$

$$z_2^{(1)} = R \left[ 1 - \frac{n_1}{n_2} \left( \frac{z_2^{(0)}}{z_1} \right) \right]^2. \quad (17.57)$$

Здесь уравнение нулевого приближения (17.56) представлено в виде результата (17.45), полученного ранее из геометрического рассмотрения, и определяет положение изображения в параксиальном приближении

$$z_2^{(0)} = \frac{n_1 z_1 R}{n_1 R + (n_2 - n_1) z_1}. \quad (17.58)$$

Первое приближение приведено к решению (17.57) для  $z_2^{(1)}$ . Разность  $z_2 - z_2^{(0)} = \epsilon z_2^{(1)}$ , характеризующая смещение фокальной точки для конуса лучей, определяемых параметром  $h$ , относительно параксиального изображения  $z_2^{(0)}$ , в рассматриваемом случае преломления на сферической границе<sup>11</sup> определяется формулой

$$\delta z_R = \epsilon z_2^{(1)} = \frac{h^2}{2R} \left[ 1 - \frac{n_1}{n_2} \left( \frac{z_2^{(0)}}{z_1} \right)^2 \right]. \quad (17.59)$$

<sup>11</sup>Для случая плоской границы раздела аналогичная формула (17.40) получена ранее.

(Заметим, что точно это выражение для  $\delta z_R$  получается из решения уравнения (17.44) геометрического рассмотрения. Этим подтверждается, что формула (17.59) применима не только для действительного, но и мнимого изображения.)

В формулу (17.59) входят координаты источника и изображения  $z_1, z_2^{(0)}$ , связанные между собой соотношением (17.56). Если же перейти к координатам  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ , (17.49), отсчитываемым соответственно от переднего  $F_1$  и заднего  $F_2$  фокусов, и воспользоваться формулой (17.50), то результат приводится к простому выражению, содержащему только одну из двух координат. Выраженный через координату источника  $\tilde{z}_1$ , ответ будет такой:

$$\delta z_R = \frac{h^2}{2R} \left[ 1 - \frac{n_1}{n_2} \left( \frac{z_{2f}}{\tilde{z}_1} \right)^2 \right] = \frac{h^2}{2R} \left[ 1 - \left( \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \frac{z_{1f}}{\tilde{z}_1} \right)^2 \right]. \quad (17.60)$$

(Переход от (17.59) к (17.60) очевиден: поскольку

$$\frac{z_2^{(0)}}{z_1} = \frac{z_{2f} + \tilde{z}_2}{z_{1f} + \tilde{z}_1}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{z_{1f} z_{2f}}{\tilde{z}_1}, \quad \text{то} \quad \frac{z_2^{(0)}}{z_1} = \frac{z_{2f}}{\tilde{z}_1}.)$$

Чтобы результат сделать более обозримым, перепишем его в виде

$$\delta z_R = \frac{h^2}{2R} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right), \quad \xi = \frac{\tilde{z}_1}{\sqrt{n_2/n_1} z_{1f}},$$

где  $|\xi|$  — безразмерное расстояние от фокуса  $F_1$  до источника  $L$ ; при этом в качестве линейного масштаба принят  $\sqrt{n_2/n_1} |z_{1f}|$ . Видно отсюда, что по порядку величины рассматриваемое смещение фокальной точки  $\delta z_R$  совпадает с  $z_p = h^2/(2R)$ , а его конкретное значение зависит от  $\tilde{z}_1$ . Для источника, расположенного на большом удалении от  $F_1$ ,  $\delta z_R$  близко к названному значению, а при приближении к фокусу уменьшается, и при достижении расстояния  $\sqrt{n_2/n_1} |z_{1f}|$  обращается в нуль. Замечаем, что если  $\tilde{z}_1 \rightarrow 0$  (при этом  $z_1 \rightarrow z_{1f}$ ,  $z_2^{(0)} \rightarrow \infty$ ), то из формул (17.59), (17.60) получаем результат  $|\delta z_R| \rightarrow \infty$ , не имеющий физического смысла (смещение фокальной точки от положения  $z_2^{(0)} = \infty$ ). Это неудивительно, поскольку решения (17.59), (17.60), полученные методом возмущения в предположении  $|\delta z_R| \ll z_2^{(0)}$ , при  $z_1 \rightarrow z_{1f}$  неприменимы. В данном случае положение фокальной точки, задаваемое координатой  $z_2$ , необходимо определять непосредственно из квадратного уравнения (17.54). Один из его корней, имеющий физический смысл,

при  $z_1 = z_{1f}$  имеет значение

$$z_2|_{z_1=z_{1f}} = z_{2*} = \frac{n_2}{n_1} \frac{z_{1f}^2}{h^2/2R}, \quad (17.61)$$

показывающее, по какому закону фокальная точка, соответствующая конусу лучей, стремится к  $z_2^{(0)} = \infty$  при  $h \rightarrow 0$ .

Теперь имеется возможность определить критерий, выполнение которого обеспечивает достоверность параксиального приближения. Для этого заметим, что если крайние лучи гомоцентрического пучка с поперечной координатой  $r_0$  (см. рис. 17.28) после преломления пересекают ось  $z$  на некотором расстоянии  $\delta z_R$  вперёд или назад от точки с координатой  $z_2^{(0)}$ , то в плоскости  $z = z_2^{(0)}$  пересекающиеся лучи вместо светлой точки создадут пятно с радиусом

$$r_{\text{геом}} = \frac{r_0}{z_2^{(0)}} |\delta z_R|.$$

Вспомним, что даже идеальная светлая точка, получаемая по законам геометрической оптики, вследствие дифракции расплывается в пятно с радиусом

$$r_{\text{дифр}} = \frac{\lambda}{2r_0} z_2^{(0)}.$$

Понятно, что пучок можно будет считать параксиальным, пока размер геометрического пятна в плоскости изображения не превышает размера дифракционного пятна. Следовательно, для случаев, когда зна-

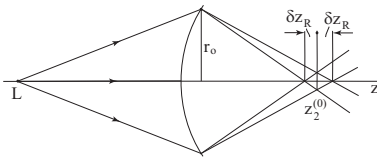


Рис. 17.28

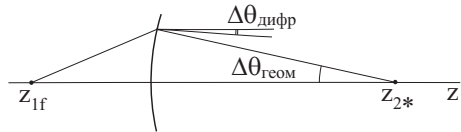


Рис. 17.29

чение  $z_2^{(0)}$  конечно, критерий параксиальности выводится из условия  $r_{\text{геом}} \leq r_{\text{дифр}}$ . Приняв  $|\delta z_R| = r_0^2/2R$ , отсюда получаем требование на ширину пучка

$$r_0^4 \leq \lambda R (z_2^{(0)})^2,$$

при выполнении которого парааксиальное приближение справедливо. Для источника с координатой  $z_1 = -\infty$ , когда  $z_2^{(0)} = z_{2f} = n_2 R / (n_2 - n_1)$ , представленное требование приводится к виду

$$\frac{r_0}{R} \leq \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{n_2}{n_2 - n_1}}. \quad (17.62)$$

Когда источник располагается в переднем фокусе, т. е.  $z_1 = z_{1f}$ ,  $z_2^{(0)} = \infty$ , и  $\delta z_R$  не имеет смысла, для получения критерия парааксиальности необходимо обратиться к фокальной точке, определяемой координатой  $z_{*2}$  (17.61). В этом случае преломлённый пучок характеризуется геометрическим углом  $\Delta\theta_{\text{геом}} = r_0/z_{*2}$  и углом дифракции  $\Delta\theta_{\text{дифр}} = \lambda/2r_0$  (см. рис. 17.29). При этом требование  $\Delta\theta_{\text{геом}} \leq \Delta\theta_{\text{дифр}}$  является условием применимости парааксиального приближения и сводится к

$$\frac{r_0}{R} \leq \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{1/4} \left(\frac{n_1 n_2}{(n_2 - n_1)^2}\right)^{1/4}. \quad (17.63)$$

Учитывая, что множители при  $(\lambda/R)^{1/4}$  практически всегда мало отличаются от единицы, искомый критерий можно представить в виде простого требования

$$\frac{r_0}{R} \leq \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{1/4}. \quad (17.64)$$

Например, при  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см,  $R = 5$  см, нужно иметь  $r_0 \leq (1/20)R$ .

В дальнейшем везде принимается, что полученный критерий выполняется и применение нулевого приближения для определения координаты  $z_2$  изображения оправданно. Это, в частности, позволяет считать, что пересечение всех падающих лучей с поверхностью и их преломление происходят в одной плоскости, проходящей через точку  $O$  на сфере.

## 17.12. Центрированные оптические системы

Большинство используемых на практике оптических инструментов относится к *центрированным системам*, у которых центры кривизны всех сферических преломляющих и отражающих поверхностей расположены на одной прямой, называемой *главной оптической осью*. Гомоцентрический пучок парааксиальных лучей при прохождении через центрированную систему остается почти гомоцентрическим, поэтому для



каждой точки протяжённого светящегося предмета система формирует *стигматическое* (резкое) изображение.

В оптической системе сферические (и плоские) поверхности являются границами раздела различных однородных сред (материал линз и промежутки между ними). Траектории всех лучей, распространяющихся в такой системе, представляют собой ломаные, вообще говоря пространственные, составленные из отрезков прямых. Нам достаточно ограничиваться рассмотрением только тех лучей (исходящих из светящейся точки), которые лежат в выделенной радиальной плоскости  $(x, z)$ , составленной главной оптической осью и светящейся точкой (*меридиональные лучи*).<sup>12</sup> После всех преломлений (и отражений) на границах раздела каждый из этих лучей будет оставаться в радиальной плоскости и, таким образом, соответствующая ломаная также будет плоской. Причём, как мы убедились в п.2 § 17.10, точки излома траектории луча можно считать принадлежащими соответствующим плоскостям, перпендикулярным оси  $z$  и касательным к сферическим границам раздела. Эти плоскости дальше, как и на рис. 17.20, будем отмечать символом  $\Sigma$  с соответствующими номерами и, вслед за Бутиковым, называть *опорными плоскостями*.

Любой прямой участок параксиального луча в плоскости  $(x, z)$  определяется заданием координаты  $x$  и малого угла наклона  $\theta = dx/dz$  при фиксированном значении координаты  $z$ . Примем промежуточные обо-

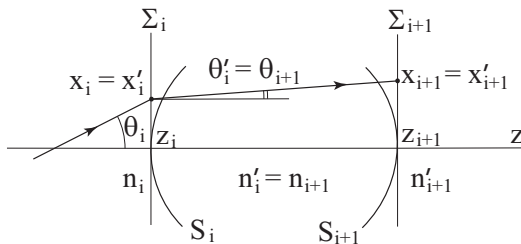


Рис. 17.30

значения  $x_i, \theta_i$  и  $x'_i, \theta'_i$  для параметров луча на входе в плоскость  $\Sigma_i$  и на выходе из неё, а также аналогичные обозначения  $n_i, n'_i$  для показателя преломления среды (см. рис. 17.30).<sup>13</sup> Тогда изменение параметров

<sup>12</sup>Меридиональные лучи определяют положения всех без исключения фокальных точек, возникающих в оптической системе от рассматриваемой светящейся точки.

<sup>13</sup>Заметим сразу, что от этих обозначений мы отойдём, когда будем обращаться

луча при пересечении границы  $\Sigma_i$  можно представить в виде линейного преобразования

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i, \\ n'_i \theta'_i &= n_i \theta_i - \frac{n'_i - n_i}{R_i} x_i. \end{aligned} \quad (17.65)$$

Координата луча  $x$  при этом остается неизменной, а угол  $\theta$  испытывает скачок, определяемый формулой (17.43). Заметим, что вторая строчка преобразований (17.65) вместо  $\theta$  содержит произведение показателя преломления на угол  $\theta$ . Именно пару  $(x, \eta)$ , где  $\eta = n\theta$ , целесообразно использовать в качестве параметров прямого отрезка луча (в чём мы убедимся чуть ниже).

Введя величину

$$P_i = (n'_i - n_i)/R_i,$$

называемую *оптической силой преломляющей поверхности*  $R_i$ , преобразование (17.65) запишем в матричном виде

$$\begin{vmatrix} x'_i \\ \eta'_i \end{vmatrix} = \mathcal{R}_i \begin{vmatrix} x_i \\ \eta_i \end{vmatrix}, \quad \mathcal{R}_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -P_i & 1 \end{vmatrix}, \quad (17.66)$$

где квадратная матрица  $\mathcal{R}_i$ , *преломляющая матрица* поверхности  $S_i$ , определяется величиной  $P_i$ . Благодаря принятию  $n\theta$  в качестве углового параметра луча определитель этой матрицы не зависит от показателей преломления  $n_i, n'_i$  и всегда равен единице. Свойство  $|\mathcal{R}_i| = 1$  оказывается весьма важным при проведении расчетов.

Обратимся к преобразованию параметров луча при переходе однородного оптического промежутка между опорными плоскостями  $\Sigma_i, \Sigma_{i+1}$  с координатами  $z_i, z_{i+1}$  и показателем преломления  $n'_i = n_{i+1}$  (рис. 17.30). Здесь угловой параметр луча остается неизменным ( $\eta_{i+1} = \eta'_i$ ), а координата  $x$  получает приращение:  $x_{i+1} = x_i + \theta'_i(z_{i+1} - z_i)$ . Используя вместо геометрической  $(z_{i+1} - z_i)$  так называемую *приведенную толщину* оптического промежутка

$$\ell_i = (z_{i+1} - z_i)/n'_i,$$

данное преобразование можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} x_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{vmatrix} = \mathcal{T}_{i+1,i} \begin{vmatrix} x'_i \\ \eta'_i \end{vmatrix}, \quad \mathcal{T}_{i+1,i} = \begin{vmatrix} 1 & \ell_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (17.67)$$

---

к целой оптической системе. Её входную и выходную опорные плоскости и соответствующие сферические поверхности всегда будем отмечать цифрами 1 и 2. Аналогично с показателями преломления и параметрами луча: перед оптической системой это будут  $n_1, x_1, \theta_1$ , а за ней —  $n_2, x_2, \theta_2$  (т. е. никаких  $n'_2, x'_2$  и  $\theta'_2!$ ).

Матрица  $\mathcal{T}_{i+1,i}$  с двумя индексами называется *матрицей оптического промежутка* и определяется его приведенной толщиной  $\ell_i$ . Индексы у матрицы  $\mathcal{T}_{i+1,i}$  для оптического промежутка от  $\Sigma_i$  до  $\Sigma_{i+1}$  в общем случае смотрятся не очень элегантно. Но в процессе реальных вычислений запись, например,  $\mathcal{T}_{32}$ , не представляется излишне тяжеловесной. Поэтому два индекса для матрицы  $\mathcal{T}$  мы здесь сохраним.

Параметры луча после прохождения последовательности опорных плоскостей определяются с помощью общей матрицы преобразования  $\mathcal{M}$  оптической системы. Получается она путем перемножения соответствующих матриц  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{T}$ , взятых в определённом порядке (отражающие сферические поверхности мы здесь не рассматриваем). Например, для оптической системы, состоящей всего из двух сферических поверх-

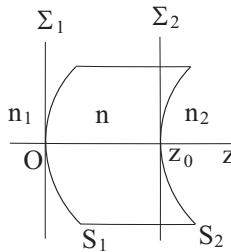


Рис. 17.31

ностей, разделённых оптическим промежутком (**толстая линза**) (см. рис. 17.31), матрица преобразования

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}_2 \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{vmatrix},$$

содержащая три сомножителя, приобретает вид

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} 1 - P_1 \ell & \ell \\ -(P_1 + P_2 - P_1 P_2 \ell) & -P_2 \ell + 1 \end{vmatrix}. \quad (17.68)$$

Обращаем внимание на рис. 17.31, в котором обозначения уже соответствуют целой оптической системе. Показатели преломления перед линзой и за ней здесь  $n_1, n_2$ , а для материала линзы —  $n$ . При этом параметры линзы  $P_1, P_2$  и  $\ell$ , входящие в матрицу  $\mathcal{M}$  (17.68), имеют следующие значения

$$P_1 = \frac{n - n_1}{R_1}, \quad P_2 = \frac{n_2 - n}{R_2}, \quad \ell = \frac{z_0}{n}. \quad (17.69)$$

### 17.13. Тонкая линза

Обратимся к предельному случаю  $\ell = 0$ , соответствующему тонкой линзе, когда результат двух преломлений можно приписать одной опорной плоскости. При этом матрица приобретает вид

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(P_1 + P_2) & 1 \end{vmatrix}, \quad (17.70)$$

совпадающий с преломляющей матрицей (17.66) некоторой поверхности  $S$ , обладающей суммарной преломляющей силой  $P = P_1 + P_2$ .

Следовательно, так же как для одной преломляющей поверхности, можно определить положения двух главных фокусов. Их координаты

$$z_{1f} = -\frac{n_1}{P_1 + P_2}, \quad z_{2f} = \frac{n_2}{P_1 + P_2}, \quad (17.71)$$

отсчитываемые от единой плоскости линзы, можно определить непосредственно из определения главных фокусов, а можно воспользоваться результатами (17.77), (17.79) (см. ниже), имея в виду значения  $A = 1, C = -(P_1 + P_2), D = 1$  для элементов матрицы  $\mathcal{M}$  (17.70) в данном случае. С учётом формул (17.71) матрицу тонкой линзы полезно представить в виде

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n_1/z_{1f} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -n_2/z_{2f} & 1 \end{vmatrix}.$$

Геометрическое построение изображения предмета, создаваемого линзой,

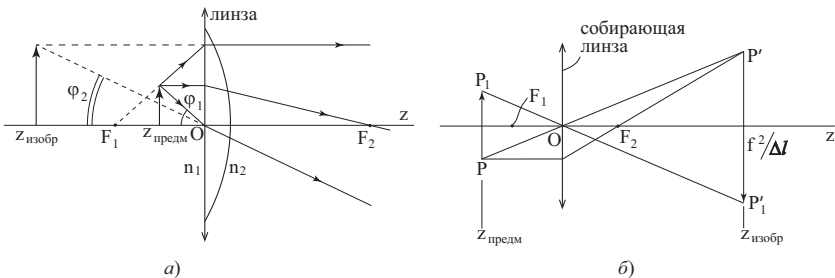


Рис. 17.32

повторяет процедуру, представленную на рис. 17.26. Здесь ею воспользуемся для получения мнимого изображения, создаваемого собирающей

линзой (см. рис. 17.32(а)). Дополнительно к двум обязательным лучам, служащим для построения изображения, здесь изображён также луч, падающий из крайней точки предмета на центр линзы, и его продолжение. Соответствующие углы на рисунке обозначены как  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Их различие связано с различием  $n_1, n_2$  и для них справедливо соотношение  $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$ . (В этом нетрудно убедиться чисто геометрически, но это очевидно и как результат прохождения наклонного луча через плоскопараллельную пластину, т. к. для центрального луча линза представляется такой пластиной). Заметное различие этих углов на данном рисунке обеспечено за счёт большого отношения  $n_2/n_1 \simeq 2$ , как об этом можно судить по фокусным расстояниям  $|z_{1f}|, |z_{2f}|$ . В случае, когда показатели преломления по обе стороны линзы одинаковы ( $n_1 = n_2$ ), рассматриваемые углы будут равны. Соответствующая схема прохождения лучей нам понадобится при описании лупы, и она приведена ниже на рис. 17.41.

Найдём связь между  $z$ -координатами плоскости предмета и плоскости изображения  $z_{\text{предм}}, z_{\text{изобр}}$ , для рассматриваемого случая тонкой

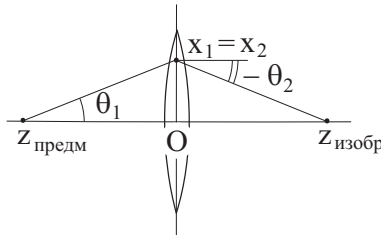


Рис. 17.33

линзы, воспользовавшись матричным равенством

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ n_2 \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -n_2/z_{2f} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ n_1 \theta_1 \end{vmatrix}.$$

Выразив малые углы  $\theta_1, \theta_2$  (см. рис. 17.33), входящие во вторую строчку этого равенства, через соответствующие координаты в виде  $\theta_1 = x_1/(-z_{\text{предм}})$ ,  $-\theta_2 = (x_1 = x_2)/(-z_{\text{изобр}})$ , после сокращения  $x_1$  отсюда получим искомую зависимость

$$\frac{n_2}{z_{\text{изобр}}} - \frac{n_1}{z_{\text{предм}}} = \frac{n_2}{z_{2f}}. \quad (17.72)$$

Заменяв  $n_2/z_{2f}$  на выражение

$$P_1 + P_2 = \frac{n - n_1}{R_1} - \frac{n - n_2}{R_2},$$

полученное с учётом формул (17.69), зависимость (17.72) можно записать в виде

$$\frac{n_2}{z_{\text{изобр}}} - \frac{n_1}{z_{\text{предм}}} = \frac{n - n_1}{R_1} - \frac{n - n_2}{R_2},$$

напоминающем соотношении (17.45) для одной преломляющей поверхности.

В часто встречающемся случае, когда линза находится в воздухе,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $|z_{1f}| = |z_{2f}|$ , зависимость (17.72) приобретает вид

$$\frac{1}{z_{\text{изобр}}} - \frac{1}{z_{\text{предм}}} = \frac{1}{z_{2f}}, \quad (17.73)$$

обычно называемый *формулой линзы*.

В связи с полученной формулой обратим внимание на один частный случай — получение действительного изображения с большим увеличением. Для этого предмет (на рис. 17.32(б) это отрезок  $PP_1$ ) необходимо расположить чуть дальше переднего фокуса собирающей линзы в плоскости  $z_{\text{предм}} = -(f + \Delta l)$  ( $\Delta l \ll f$ ), где  $f = |z_{2f}|$  — фокусное расстояние. При этом изображение, как нетрудно получить из формулы (17.73), занимает положение  $z_{\text{изобр}} = f^2/\Delta l$ . Выбором  $\Delta l$  этой координате можно придать любое потребное значение  $z_{\text{изобр}}^{(0)} \gg f$  и получить изображение (см. рисунок) с увеличением

$$\left| \frac{P'P'_1}{PP_1} \right| = \frac{z_{\text{изобр}}^{(0)}}{f + \Delta l} \simeq \frac{z_{\text{изобр}}^{(0)}}{f}. \quad (17.74)$$

Для фиксированного  $z_{\text{изобр}}^{(0)}$  оно тем больше, чем меньше фокусное расстояние линзы; это понимание нам будет полезно при рассмотрении оптической схемы микроскопа.

Вернёмся к толстой линзе. Здесь положение с построением изображения совсем иное. Знания расположений главных фокусов  $F_1, F_2$  (которые нетрудно определить с помощью матрицы преобразования (17.68)) в данном случае недостаточно для построения изображения. Причина заключается в неопределённости точки пересечения лучей  $1', 2'$ , соответствующих известным падающим лучам 1, 2 (см. рис. 17.34), после

прохождения толстой линзы. Конечно, луч  $1'$  параллелен оси  $z$ , но его  $x$ -координата неизвестна. Аналогично с лучом  $2'$ . Он обязательно проходит через фокус  $F_2$ , но под неизвестным углом. Поэтому точка пере-

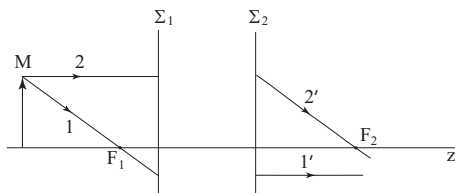


Рис. 17.34

сечения лучей  $1', 2'$ , (т. е. положение сопряжённой точки  $M'$ ) знанием фокусов не определяется.

На сказанное можно возразить, сказав, что по матрице  $\mathcal{M}$  (17.68) недостающие параметры можно рассчитать. Да, но это очень неудобно — для каждой точки  $M$  рассчитывать параметры для построения точки  $M'$ .

Для конструктивного решения задачи разработан соответствующий метод. Заключается он в определении так называемых главных плоскостей, которые вместе с фокусами составляют кардинальные элементы оптической системы и полностью решают задачу построения изображений.

## 17.14. Кардинальные элементы оптической системы

Приступая к этому вопросу, мы не будем ограничиваться толстой линзой, а рассмотрим оптическую систему с матрицей преобразования  $\mathcal{M}$ , в общем виде составленной из элементов  $A, B, C, D$ , не забывая при этом, что её определитель равен единице:

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}, \quad |\mathcal{M}| = AD - CB = 1. \quad (17.75)$$

Будем считать, что оптическая система ограничена опорными плоскостями, обозначаемыми  $\Sigma_1, \Sigma_2$  и проходящими через точки  $A_1, A_2$  оси  $z$  (см. рис. 17.35). Показатели преломления среды с внешней стороны

оптической системы примем как  $n_1$  и  $n_2$ , соответствующие параметры луча также обозначим без штрихов (см. сноску 13).

Начнём с нахождения заднего главного фокуса. Для этого рассмотрим луч, входящий в оптическую систему параллельно оси  $z$  (на рис.

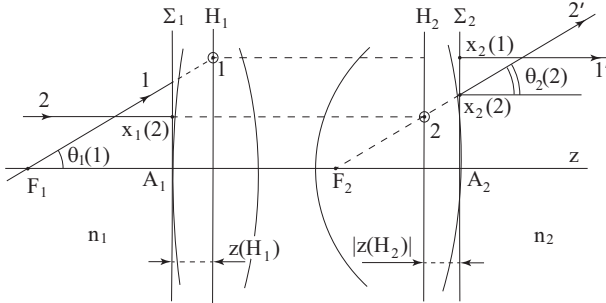


Рис. 17.35

17.35 это есть луч 2) с параметрами  $x_1(2), \theta_1(2) = 0$ . Параметры выходного луча определяются из равенства

$$\left\| \begin{array}{c} x_2(2) \\ n_2 \theta_2(2) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1(2) \\ 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} Ax_1(2) \\ Cx_1(2) \end{array} \right\|, \quad (17.76)$$

(здесь, так же, как на рис. 17.35, параметры луча записаны с аргументом, указывающим его номер). Видно, что параметры  $x_2(2), \theta_2(2)$  выходного луча 2' пропорциональны  $x_1(2)$  и, следовательно, точка пересечения этого луча (или его продолжения, как на рис. 17.35) с осью  $z$  не зависит от координаты  $x_1(2)$ . То есть все лучи, входящие в оптическую систему параллельно оптической оси, после оптической системы встречаются в одной точке (или как бы исходят из одной точки) на оси  $z$ , являющейся задней фокальной точкой. Её координата, отсчитываемая от точки  $A_2$ , определяется формулой

$$z_{2f} = -n_2 \frac{A}{C}. \quad (17.77)$$

Теперь обратим внимание на точку пересечения воображаемых продолжений входящего 2 и выходящего 2' лучей. Её  $z$ -координата (отсчитываемая также от точки  $A_2$ ), как видно из рис. 17.35, с параметрами лучей 2, 2' связана соотношением  $-z\theta_2(2) = x_2(2) - x_1(2)$ . После подстановки значений  $\theta_2(2), x_2(2)$ , следующих из матричного равенства



(17.76), отсюда получаем  $z = n_2(1 - A)/C$ . То есть все рассматриваемые точки пересечения, независимо от значения  $x_1(2)$ , лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Её называют задней главной плоскостью и обозначают  $H_2$ , а её положение определяется координатой

$$z(H_2) = n_2 \frac{1 - A}{C}. \quad (17.78)$$

Как мы видим, плоскость  $H_2$  определяет вторую точку (дополнительно к точке  $F_2$ ), через которую проходит исследуемый луч  $2'$ , и, таким образом, снимает неопределённость, о которой говорилось выше применительно к толстой линзе.

Перейдём к передним кардинальным точкам. Обратимся для этого к лучу 1, исходящему из переднего фокуса  $F_1$  под некоторым углом  $\theta_1(1)$ . В опорную плоскость  $\Sigma_1$  этот луч приходит с параметрами  $(-z_{1f}\theta_1(1), n_1\theta_1(1))$ , где  $z_{1f}$  — координата точки  $F_1$ , отсчитываемая от точки  $A_1$  (см. рис. ??). Выходные параметры луча 1 после прохождения оптической системы определяются матричным равенством

$$\begin{pmatrix} x_2(1) \\ n_2\theta_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_{1f}\theta_1(1) \\ n_1\theta_1(1) \end{pmatrix}.$$

Условие, что луч  $1'$  выходит из системы под углом  $\theta_2 = 0$ , определяет искомую координату

$$z_{1f} = n_1 \frac{D}{C}, \quad (17.79)$$

которая от  $\theta_1(1)$  не зависит и, следовательно, действительно определяет положение фокуса  $F_1$ .

Первая строчка выписанного матричного равенства определяет  $x$ -координату луча  $1'$ . Воспользовавшись ею, легко находим точку пересечения продолжений лучей 1 и  $1'$ , на рис. ?? отмеченную цифрой 1. Её  $z$ -координата (обозначим  $z(H_1)$ ), отсчитываемая от точки  $A_1$ , определяется условием  $A(-z_{1f})\theta_1(1) + Bn_1\theta_1(1) = (-z_{1f} + z(H_1))\theta_1(1)$ , и не зависит от угла  $\theta_1(1)$ . Следовательно, все рассматриваемые точки пересечения составляют главную плоскость  $H_1$ , с координатой  $z(H_1) = z_{1f}(1 - A) + n_1B$ , которая при использовании условия (17.75)  $|\mathcal{M}| = 1$  приобретает вид

$$z(H_1) = n_1 \frac{D - 1}{C}. \quad (17.80)$$

Обращаем внимание, что если координаты фокусов отсчитывать от соответствующих главных точек и ввести для них обозначения

$$\tilde{z}_{1f} = z_{1f} - z(H_1), \quad \tilde{z}_{2f} = z_{2f} - z(H_2),$$

то последние выражаются формулами

$$\tilde{z}_{1f} = \frac{n_1}{C}, \quad \tilde{z}_{2f} = -\frac{n_2}{C}, \quad (17.81)$$

аналогичными формулам для фокусов тонкой линзы. Отсюда следует, что элемент  $C$  матрицы преобразования  $\mathcal{M}$  оптической системы (17.75) отвечает за её суммарную преломляющую силу  $P_\Sigma$ :

$$C = -P_\Sigma. \quad (17.82)$$

Элементы  $A, D$ , совместно с  $C$ , определяют положения главных плоскостей  $H_2$  и  $H_1$  соответственно.

Фокусы  $F_1, F_2$  и точки пересечения главных плоскостей  $H_1, H_2$  с оптической осью называются кардинальными точками оптической системы. Их положение полностью определяет преобразование любого параксиального луча оптической системой. По нему можно построить выходящий из системы луч, не рассматривая реального хода лучей в системе. Таким образом, знание положения кардинальных точек решает задачу геометрического построения изображений, создаваемых данной оптической системой. Процедура построения основывается на использовании двух «строительных» лучей, поведение которых после прохождения оптической системы подчиняется положениям, которые здесь ещё раз кратко повторим.

1. Луч, исходящий из точки предмета и проходящий через передний фокус  $F_1$ , (луч 1), после оптической системы идёт параллельно оси  $z$  (луч  $1'$ ). Точка пересечения их продолжений, на рис. 17.35 отмеченная кружочком с цифрой 1, лежит в плоскости  $H_1$ .

2. Второй луч, падающий на оптическую систему параллельно оси  $z$  (луч 2), после оптической системы проходит через главный фокус  $F_2$  (луч  $2'$ ). Точка пересечения их воображаемых продолжений (на рис. 17.35 это кружочек с цифрой 2), лежит в плоскости  $H_2$ . Пересечение лучей  $1', 2'$  определяет положение изображения.

Сказанное выше проиллюстрируем на примерах толстых линз двух конкретных конфигураций, находящихся в воздухе ( $n_1 = n_2 = 1$ ). Геометрия первой из линз представлена на рис. 17.36(а). Здесь  $R_1 = R > 0$ ,  $R_2 = \infty$ , толщина линзы равна  $L$ . Соответствующие преломляющие силы равны  $P_1 = (n - 1)/R$ ,  $P_2 = 0$  и, как показывает матрица толстой линзы (17.68), рассматриваемому случаю отвечают следующие значения элементов общей матрицы преобразования (17.75):

$$A = 1 - P_1 \ell, \quad B = \ell, \quad C = -P_1, \quad D = 1 \quad (\ell = L/n).$$

Отсюда для  $z$ -координат переднего главного фокуса (17.79) и первой главной точки (17.80), отсчитываемых от точки  $A_1$ , получаем

$$z_{1f} = -\frac{1}{P_1} = -\frac{R}{n-1}, \quad z(H_1) = 0.$$

Аналогично координаты  $z_{2f}$  (17.77) и  $z(H_2)$  (17.78), отсчитываемые от точки  $A_2$ , имеют значения

$$z_{2f} = -\frac{1 - P_1 \ell}{P_1} = -\frac{R - (n-1)\ell}{n-1}, \quad z(H_2) = -\ell = -\frac{L}{n}.$$

Обращаем внимание, что первая главная плоскость здесь совпадает с

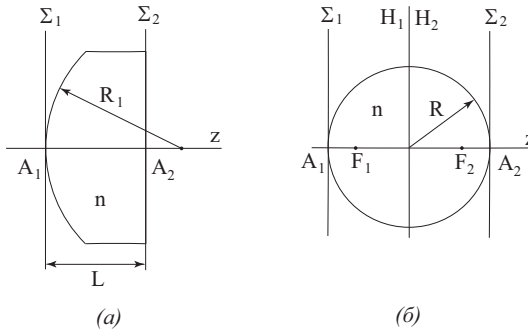


Рис. 17.36

касательной плоскостью к передней сфере. Фокусы  $F_1, F_2$  отстоят от главных плоскостей на расстоянии

$$|\tilde{z}_{1f}| = |\tilde{z}_{2f}| = R/(n-1).$$

Расположение кардинальных элементов относительно линзы, а также процедура построения изображения объекта схематически представлены на рис. 17.37.

В качестве второго примера возьмём линзу в виде стеклянного шара радиуса  $R$ , с показателем преломления  $n$  (рис. 17.36(б)). Здесь  $R_1 = R$ ,  $R_2 = -R$ ,  $L = 2R$ , преломляющие силы  $P_1, P_2$  одинаковы и равны  $P = (n-1)/R$ , а приведенная толщина линзы  $\ell = 2R/n$ . При этом матрице (17.68) соответствуют элементы

$$A = D = 1 - P\ell, \quad B = \ell, \quad C = -P(2 - P\ell).$$

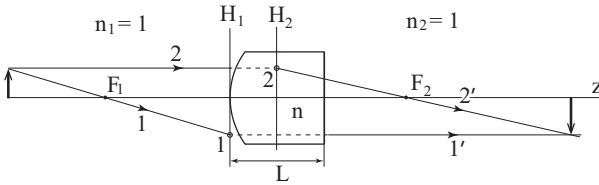


Рис. 17.37

Из равенства  $A = D$  и формул (17.78), (17.80) сразу заметим, что координаты главных плоскостей  $z(H_1)$ ,  $z(H_2)$  отличаются только знаками, причём

$$z(H_1) = \frac{D - 1}{C} = \frac{\ell}{2 - P\ell} = R.$$

Отсюда следует, что обе главные плоскости совпадают и проходят через центр шара.

Для координат главных фокусов  $\tilde{z}_{1f}$ ,  $\tilde{z}_{2f}$  (17.81), отсчитываемых в данном случае от центра шара, имеем

$$|\tilde{z}_{1f}| = |\tilde{z}_{2f}| = \left| \frac{1}{C} \right| = \frac{R}{2} \frac{n}{n - 1}.$$

От поверхности шара фокусы расположены на расстоянии  $|\tilde{z}_{1f}| - R = (R/2)(2 - n)(n - 1)$ . То есть при  $n < 2$  они располагаются внутри шара и только при  $n \geq 2$  оказываются на поверхности или вне шара. Схематически положения главных плоскостей и фокусов  $F_1, F_2$  (при  $n < 2$ ) нанесены на рис. 17.36(б). Построение изображений здесь не приводится, поскольку из-за совпадения  $H_1, H_2$  эта процедура совпадает со случаем тонкой собирающей линзы.

## 17.15. Оптическая система глаза

Главным «оптическим инструментом», служащим для восприятия света, для нас служит глаз. Субъективное зрительное ощущение в нём получается в результате раздражения зрительного нерва, вызываемого освещением сетчатой оболочки глаза. Схематическое изображение человеческого глаза, состоящего из прозрачной роговой оболочки, хрусталика, радужной оболочки, сетчатки и зрительного нерва дано на рис.

17.38. Пространство между роговой оболочкой и хрусталиком заполнено *водянистой влагой*, а между хрусталиком и сетчатой оболочкой — так называемым *стекловидным телом*. Радужная оболочка имеет отверстие, называемое зрачком. Размеры зрачка могут меняться и регулировать величину светового потока, попадающего внутрь глаза. Сетчатая

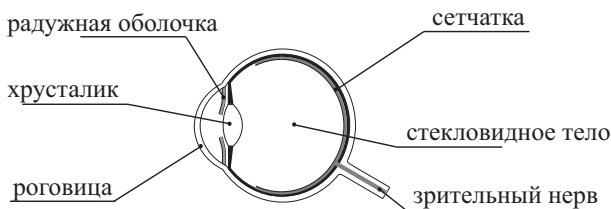


Рис. 17.38

оболочка, обладающая весьма сложным строением, является разветвлением волокон зрительного нерва. Оптическая система глаза даёт на сетчатой оболочке действительное изображение предметов, находящихся вне глаза. Световая энергия воспринимается чувствительными элементами (так называемыми колбочками и палочками), распределёнными по сетчатке. Переданная в мозг информация о распределении светового потока воспринимается сознанием человека в виде изображения предмета.

Преломляющей системой глаза являются выпуклая поверхность роговицы, хрусталик, водянистая жидкость и стекловидное тело, заполняющие глаз. Изображение в глазу получается в веществе (в стекловидном теле), отличном от вещества, в котором находятся рассматриваемые объекты (воздух). Поэтому первый и второй главные фокусные расстояния глаза различны. Оптическая сила хрусталика может меняться за счет изменения кривизны его поверхностей, вызываемого действием соответствующей мышцы. Изменением оптической силы хрусталика достигается резкая фокусировка на сетчатке изображений предметов в зависимости от их расстояния от глаза. Этот процесс носит название *аккомодации*.

С помощью радужной оболочки может изменяться диаметр зрачка, что регулирует величину светового потока, попадающего в глаз: при слабых освещённостях зрачок расширяется, при больших — сужается.

У разных людей в оптической системе глаза наблюдаются значительные индивидуальные отклонения. Для общей характеристики глаза

за издавна пользуются его упрощённой, усреднённой моделью (так называемым приведенным глазом) со следующими постоянными (Фриш-Тиморева):

преломляющая сила .....	$58,48 \frac{1}{\text{м}}$
положение первой главной плоскости (от вершины роговой оболочки) .....	$+1,348 \text{мм}$
положение второй главной плоскости (от вершины роговой оболочки) .....	$+1,602 \text{мм}$
первое главное фокусное расстояние .....	$-17,1 \text{мм}$
второе главное фокусное расстояние .....	$+22,8 \text{мм}$

Положение главных плоскостей ( $H_1, H_2$ ) и главных фокусов ( $F_1, F_2$ ) изображены на рис. 17.39. Ввиду близости плоскостей ( $H_1, H_2$ ) их обыч-

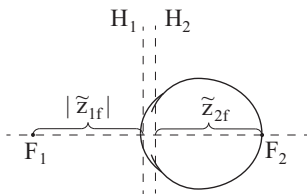


Рис. 17.39

но считают совпадающими и рассматривают как единую главную плоскость, а её точку пересечения с оптической осью принимают за *оптический центр глаза*.

Значение показателя преломления  $n_2$  стекловидного тела, необходимое для построения изображения на сетчатке, можно определить из формул (17.81) по значениям  $\tilde{z}_{1f} = -17,1 \text{мм}$ ,  $\tilde{z}_{2f} = +22,8 \text{мм}$ , приведенным в таблице. Имея в виду  $n_1 = 1$ , получаем  $n_2 = 22,8/17,1 = 1,33$ . Отметим здесь также, что знание величины  $\tilde{z}_{1f}$  позволяет по формулам (17.81), (17.82) независимо найти суммарную преломляющую силу глаза  $P_\Sigma = -1/\tilde{z}_{1f}$ . Результат вычисления в диоптриях ( $\frac{1}{\text{м}}$ )

$$P_\Sigma = \frac{1}{17,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 58,48 \frac{1}{\text{м}}$$

совпадает с первой строкой таблицы, подтверждая тем самым согласованность её параметров.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>В учебнике Фриш-Тиморевой в этом месте фигурировала цифра 58,64; впослед-

Предельные точки, между которыми возможна аккомодация, носят название *дальней* и *ближней* точек. Для нормального глаза дальняя точка лежит в бесконечности, а ближняя примерно на расстоянии 20 см. В молодом возрасте люди способны аккомодировать глаз на более близкие предметы (10 — 15 см). С возрастом способность аккомодировать глаз на близкие предметы уменьшается.

При дневных освещённостях глаз различает наибольшее число деталей, если предмет находится от него на расстоянии несколько большем расстояния до ближней точки. Обычно это расстояние принимается равным  $D = 25$  см, оно называется *расстоянием наилучшего зрения*.

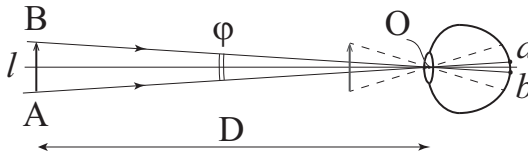


Рис. 17.40

С этого расстояния предмет (на рис. 17.40 это отрезок  $AB$  длины  $l$ ) воспринимается глазом под *углом зрения*  $\varphi = l/D$ , обуславливающим размер изображения на сетчатке. Если угол  $\varphi$  меньше или порядка угла дифракции  $\lambda/d$  ( $d$  — диаметр зрачка), то на сетчатке изображение предмета превратится в одно дифракционное пятно и предмет глазом воспринимается как точка. Экспериментально установлено, что при хорошем освещении *угол разрешения* составляет примерно  $1'$ . Это хорошо согласуется с углом дифракции, для которого при  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см,  $d = 0,3$  см получаем  $\lambda/d = (5/3)10^{-4}$  радиан  $= (5/3)10^{-4} \cdot 360/2\pi \cdot 60$  мин  $\simeq 0,5'$ .

В процессе эволюции человеческого глаза установилось рациональное распределение световоспринимающих элементов (колбочек) по сетчатке с расстоянием между ними порядка  $(\lambda/d)h$ , где  $h$  — расстояние от оптического центра глаза до сетчатки. Таким образом, здесь мы видим полное соответствие между физиологией и физикой.

Приближая предмет к глазу, мы имеем возможность увеличивать угол зрения, но эта возможность ограничена пределами аккомодации глаза. Как уже отмечалось, для нормального глаза наиболее удобным оказывается расстояние 25 см. Делая усилие, нормальный молодой глаз может рассматривать предмет с расстояния до 10 см. Близорукий глаз допускает уменьшение этого расстояния и поэтому может различать более мелкие детали.

---

ствии она была уточнена.

Дальнейшее улучшение распознавания деталей возможно с помощью оптических приборов, дающих совместно с глазом изображение на сетчатке. Отношение длин этого изображения на сетчатке в случае вооружённого и невооружённого глаза и называется видимым *увеличением* оптического инструмента. Оно равно отношению  $\varphi_0/\varphi$ , где  $\varphi_0$  и  $\varphi$  — углы зрения, под которыми предмет виден через инструмент и без него. В случае простейшего оптического прибора в виде тонкой собирающей линзы увеличение угла зрения от  $\varphi$  до  $\varphi_0$  достигается как бы за счёт смещения предмета в сторону глаза, как схематически штриховыми линиями изображено на рис. 17.40. Об этом — следующий параграф.

## 17.16. Оптические инструменты, вооружающие глаз

Здесь приведём подробный анализ работы двух из подобных инструментов — лупы и микроскопа. Для понимания работы других аналогичных оптических инструментов это послужит необходимой основой.

*Лупа.* В простейшем случае это одна собирающая линза и служит она для увеличения угла зрения. Линза создаёт увеличенное мнимое изображение предмета, если его установить чуть ближе фокусного расстояния,

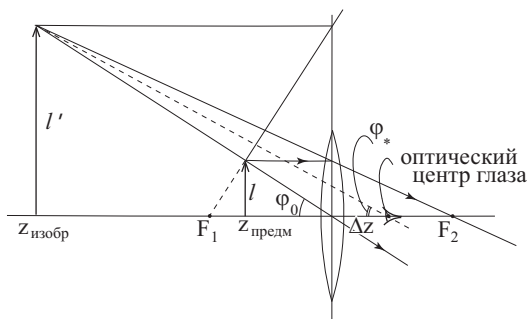


Рис. 17.41

как видно из рис. 17.41. Но из рисунка ещё не видно, как происходит увеличение угла зрения. Бросается в глаза, что угол зрения, под которым предмет виден из центра линзы, на рисунке обозначенный  $\varphi_0$ , для его увеличенного изображения  $l'$  остаётся тем же  $\varphi_0$ . А для глаза с



оптическим центром, расположенным за линзой хоть на самом небольшом расстоянии  $\Delta z$ , угол зрения  $\varphi_*$  предмета даже меньше  $\varphi_0$ . Поэтому действительно непонятно, каким образом линза, поставленная между глазом и предметом, может увеличить угол зрения.

Здесь надо задаться вопросом: «увеличить» по сравнению с чем? Ответ очевиден. Угол  $\varphi_0$  должен быть заметно больше того угла  $\varphi$ , под которым предмет виден с расстояния наилучшего зрения (см. рис. 17.40); только тогда линза решает поставленную задачу. Так как  $\varphi_0 = l/|z_{\text{предм}}|$ ,  $\varphi = l/D$ , видимое увеличение линзы равно  $N = D/|z_{\text{предм}}|$  и с уменьшением расстояния  $|z_{\text{предм}}|$  увеличивается. Это расстояние по условию может быть равно или меньше фокусного расстояния  $z_{2f} = f$ . При  $|z_{\text{предм}}| = f$  изображение получается на бесконечности и допускает наблюдение глазом, аккомодированным на бесконечность. При небольшом уменьшении расстояния  $|z_{\text{предм}}|$  изображение окажется на расстоянии наилучшего зрения, что оптимально для глаза. Но дальнейшее заметное уменьшение  $|z_{\text{предм}}|$  недопустимо, поскольку при этом изображение оказывается слишком близко к глазу и не может быть им сфокусировано на сетчатке.

Таким образом, видимое увеличение лупы во всех случаях близко к величине  $N = D/f$ . Следовательно, в качестве лупы может использоваться линза с коротким фокусным расстоянием. Обычно применяемые лупы с фокусным расстоянием от 100 до 10мм при  $D = 250\text{мм}$  дают увеличение от 2,5 до 25 раз. Для близорукого глаза  $D$  меньше и, следовательно, лупа оказывает меньшую помощь в распознавании деталей.

*Микроскоп.* Задача достижения большего увеличения решается с помощью микроскопа. В нём увеличенное действительное изображение объекта, создаваемое одной линзой (объектив), наблюдают через вторую собирающую линзу (окуляр), играющую роль лупы. Принципиальная оптическая схема микроскопа, состоящего из объектива  $L_1$  и окуляра  $L_2$  (фокусные расстояния  $f_1, f_2$ ), расположенных на расстоянии  $d$ , представлена на рис. 17.42. Понятно из приведенного анализа работы лупы, что действительное изображение  $P'P'_1$ , создаваемое объективом, должно располагаться вблизи переднего фокуса окуляра (чуть ближе его фокусного расстояния). Следовательно, за расстояние между объективом и изображением  $P'P'_1$ , по формуле (17.74) определяющее линейное увеличение, можно принять  $(d - f_2)$  и считать, что

$$|P'P'_1| = |PP_1| \frac{(d - f_2)}{f_1}.$$

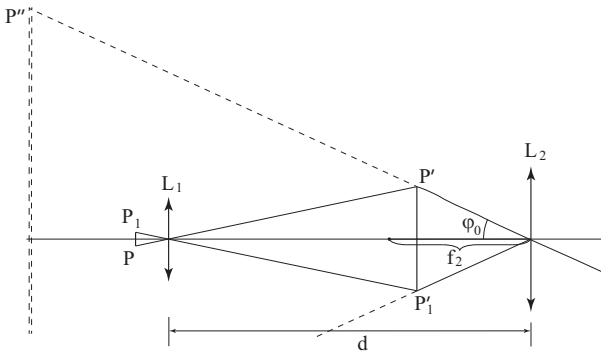


Рис. 17.42

Тогда изображение, рассматриваемое через окуляр, будет видно под углом

$$2\varphi_0 = \frac{|P'P'_1|}{f_2} = |PP_1| \frac{d - f_2}{f_1 f_2}.$$

Невооружённым глазом тот же объект с расстояния наилучшего зрения виден под углом  $2\varphi = |PP_1| / D$ . Отсюда для углового увеличения микроскопа получаем значение

$$N = \frac{(d - f_2)D}{f_1 f_2} \simeq \frac{dD}{f_1 f_2},$$

которое, например, при параметрах  $f_1 = 0,2\text{см}$ ,  $f_2 = 1,5\text{см}$ ,  $d = 15\text{см}$ ,  $D = 25\text{см}$  равно 1250.

На рис. 17.42 фокусное расстояние окуляра взято непомерно большое, чтобы сделать возможным увеличенное мнимое изображение  $P''P'_1$  поместить на странице. «Строительные» лучи, определяющие положение изображения  $P''P'_1$  здесь не приведены. Оно располагается на таком расстоянии от окуляра, чтобы его удобно было наблюдать ненапряжённым глазом.

*Зрительные трубы.* Зрительные трубы (телескопы) вооружают глаз для рассматривания деталей удалённого предмета. Они также состоят из объектива  $L_1$  и окуляра  $L_2$ ; действительное (уменьшенное и перевёрнутое) изображение отдалённого предмета, даваемого объективом, рассматривается в окуляр, как в лупу. В зависимости от расстояния предмета до объектива изображение получается в задней фокальной

плоскости объектива или несколько дальше. В соответствии с этим нужно несколько передвигать окуляр (фокусировка).

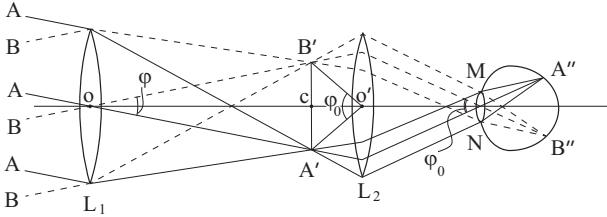


Рис. 17.43

Схематическое изображение хода лучей в зрительной трубе (по Ландсбергу) дано на рис. 17.43. Здесь сплошные линии — лучи, идущие от верхнего края (точка  $A$ ) удалённого объекта; пунктирные — лучи от нижнего его края (точка  $B$ );  $OC = f_1$  — фокусное расстояние объектива  $L_1$ ;  $CO' = f_2$  — фокусное расстояние окуляра  $L_2$ ;  $MN$  — зрачок глаза. Рисунок соответствует случаю, когда изображение  $A'B'$  находится в фокальной плоскости окуляра. При этом каждая точка изображения за окуляром формирует параллельный пучок лучей. Поэтому глаз аккомодирован на бесконечность.

Угол зрения, под которым виден отдалённый предмет, на рисунке обозначен  $\varphi$ , а через  $\varphi_0$  — угол зрения, под которым видно изображение. Отношение  $\varphi_0/\varphi$ , определяет увеличение данного инструмента; оно равно

$$N = \frac{f_1}{f_2}.$$

Таким образом, угловое увеличение зрительной трубы тем больше, чем больше фокусное расстояние её объектива и чем меньше фокусное расстояние окуляра.

Если зрительная труба используется для рассмотрения астрономических объектов, тогда она называется *телескопом*. В этом случае идёт практически параллельный пучок света и в своей фокальной плоскости объектив даёт лишь дифракционную картину, совпадающую с дифракционной картиной от круглого отверстия (радиус центрального пятна определяется при этом только оправой объектива). Окуляр увидит это центральное дифракционное пятно.

# Приложение А

## Векторный анализ

Анализ скалярных и векторных полей составляет едва ли не основную трудность на начальном этапе изучения классической электродинамики. Поэтому неформальное овладение методами и понятиями векторного анализа представляется здесь первой необходимостью. Именно для решения этой задачи составлено данное приложение.

**Скалярные и векторные поля. Предварительное напоминание.** Если каждой точке  $P$  пространства или его части поставлено в соответствие определённое значение некоторой физической величины, то говорят, что в области  $V$  определено поле этой величины. Поле называется *скалярным*, если  $u$  — скалярная величина, и задается оно функцией  $u(P)$ . В случае векторной физической величины поле является векторным и в каждой точке  $P$  определяет значение вектора  $\mathbf{a}$  (так в общем случае обозначим векторную величину). Задаётся векторное поле функцией  $\mathbf{a}(P)$ . Естественно, для задания функций типа  $u(P)$ ,  $\mathbf{a}(P)$  требуются системы координат.

### А.1. Ортогональные системы координат

Ограничимся здесь простейшими ортогональными системами — декартовой, цилиндрической и сферической, которых достаточно для первоначального изучения предмета. Будем считать, что положение любой точки  $P$  мы умеем определять по её координатам  $(x, y, z)$  в декартовой (рис. А.1),  $(\rho, \alpha, z)$  в цилиндрической (рис. А.2) и  $(r, \theta, \alpha)$  в сферической

(рис. А.3) системах координат. Напомним, что кроме координат, нам в каждой из этих систем понадобятся координатные линии и координатные поверхности, проходящие через точку  $P$ .

*Координатными линиями*, проходящими через точку  $P$ , в каждой из систем координат являются линии, вдоль которых две координаты постоянны, а изменяется лишь одна. В декартовой системе ими являются три бесконечные прямые, параллельные соответственно оси  $x$

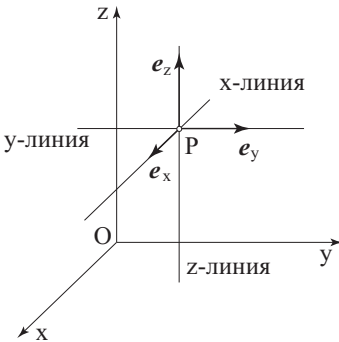


Рис. А.1

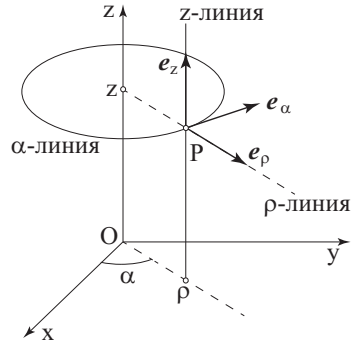


Рис. А.2

( $x$ -линия), оси  $y$  ( $y$ -линия) и оси  $z$  ( $z$ -линия) (см. рис. А.1). В цилиндрической системе через каждую точку  $P(\rho, \alpha, z)$ , не лежащую на оси  $z$  (т. е.  $\rho \neq 0$ ), проходят:  $\rho$ -линия (луч, исходящий из точки оси  $z$  с координатой  $z_p$ ),  $\alpha$ -линия (окружность, перпендикулярная оси  $z$  с центром на ней) и  $z$ -линия (прямая, параллельная оси  $z$ ) (рис. А.2). И, наконец, в сферической системе это луч, исходящий из начала координат ( $r$ -линия), вдоль которого угловые координаты неизменны; окружность ( $\alpha$ -линия), схожая с соответствующей координатной линией цилиндрической системы координат; и полуокружность радиуса  $r$  с началом в центре координат ( $\theta$ -линия), расположенная в плоскости  $\alpha = \text{const}$ . На рис. А.3  $\theta$ -линия представлена отдельным фрагментом; вдоль этой линии координата  $\theta$  меняется от  $0$  до  $\pi$ .

Единичные векторы, исходящие из точки  $P$  и направленные вдоль координатных линий (или касательные к ним) в сторону возрастания соответствующей координаты, составляют базисную систему ортогональных векторов. Это  $e_x, e_y, e_z$  — в декартовой,  $e_\rho, e_\alpha, e_z$  — в цилиндрической и  $e_r, e_\theta, e_\alpha$  — в сферической системах координат, представ-

ленные на рис. А.1 — рис. А.3. При этом элементарный вектор перемещения  $d\mathbf{l}$  из точки  $P$  в соседнюю точку  $P'$  с координатами, отличающи-

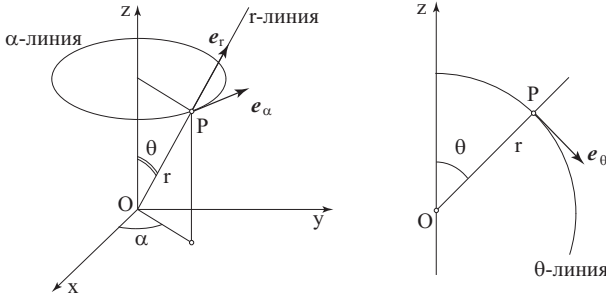


Рис. А.3

мися на бесконечно малые приращения, в каждой из систем координат можно представить в виде результата последовательных перемещений по соответствующим ортам:

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{l} &= d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\alpha\mathbf{e}_\alpha + dz\mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{l} &= dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\alpha\mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Вспомним, что положение точки в пространстве, определяемое тремя координатами, удобно характеризовать радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  (это вектор, соединяющий начало координат с точкой). При этом рассматриваемый здесь переход из точки  $P$  (радиус-вектор  $\mathbf{r}$ ) в соседнюю точку  $P'$  (радиус-вектор  $\mathbf{r}'$ ) связан с изменением  $\mathbf{r}$  на величину  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ . Следовательно, вектор, который в (1) обозначен  $d\mathbf{l}$ , есть дифференциал  $d\mathbf{r}$ .

Элементарные перемещения по ортам, содержащиеся в первых двух строчках (для декартовых и цилиндрических координат) очевидны. Следует обратить внимание на последнее слагаемое третьей строчки, соответствующее перемещению по орту  $\mathbf{e}_\alpha$  сферической системы координат. Это — результат поворота на угол  $d\alpha$  вокруг оси  $z$  с радиусом, равным  $r \sin\theta$ . Подчеркнем, что эти элементарные перемещения  $dl_r = dr$ ,  $dl_\theta = r d\theta$ ,  $dl_\alpha = r \sin\theta d\alpha$  хорошо надо «чувствовать», поскольку они являются сторонами элементарных площадок и элементарного объема в сферических координатах, которые обсуждаются ниже.

*Координатные поверхности.*

Через любую точку можно провести три координатные поверхности. Каждая из них представляет геометрическое место точек, у которых одна из трёх координат в выбранной системе фиксирована и совпадает с координатой точки  $P$ , а две другие определяют положение точки на поверхности.

В декартовой системе координатными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные, соответственно, оси  $x$  (это будет поверхность  $S_x$ ), оси  $y$  ( $S_y$ ) и оси  $z$  (поверхность  $S_z$ ). На рис. А.4 дано изображение поверхности  $S_x$  с нанесёнными на неё координатными линиями  $y$  и  $z$ ,

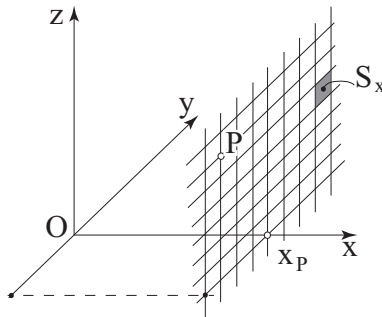


Рис. А.4

сетка которых  $S_x$  разбивает на элементарные площадки  $\Delta S_x = \Delta y \Delta z$ . (Координатные поверхности  $S_y, S_z$  полностью аналогичны и в комментариях не нуждаются.)

В цилиндрической системе  $(\rho, \alpha, z)$  координатной поверхностью  $S_\rho$  является соответствующая цилиндрическая поверхность. На рис. А.5 она представлена вместе с координатными линиями  $\alpha$  и  $z$ , образующими ортогональную криволинейную сетку. Соответствующий элемент площади определяется выражением  $\Delta S_\rho = \rho \Delta \alpha \Delta z$ . Координатная поверхность  $S_\alpha$  — полуплоскость, проходящая через ось  $z$ . Элемент соответствующей поверхности  $\Delta S_\alpha = \Delta r \Delta z$ . Наконец, координатная поверхность  $S_z$  — это плоскость, перпендикулярная оси  $z$ , и на рис. А.6 изображена вместе с ортогональной сеткой координатных линий  $\alpha$  и  $\rho$ . Заштрихованная элементарная площадка  $\Delta S_z = \rho \Delta \alpha \Delta r$ .

Три пары координатных поверхностей с координатами  $\rho, \rho + \Delta \rho; \alpha, \alpha + \Delta \alpha; z, z + \Delta z$  вырезают из пространства элементарный объём в виде криволинейного ортогонального параллелепипеда. Этот элемент объёма выражается формулой  $\Delta V = \rho \Delta \alpha \Delta \rho \Delta z$  и изображён в виде рис.

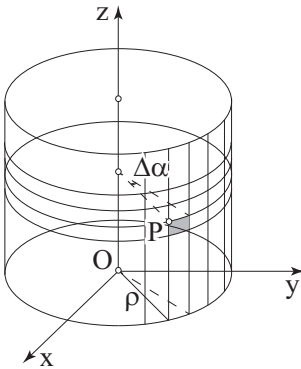


Рис. А.5

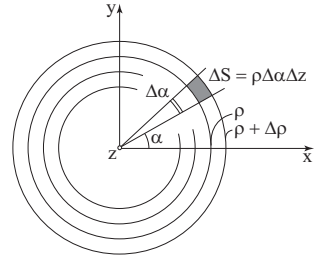


Рис. А.6

А.7. Заметим, что в процессе вычислений каждый раз подобный рисунок воспроизводить неудобно. Рационально этот параллелепипед представлять в виде столбика с заштрихованным на рис. А.6 сечением и с высотой  $\Delta z$ . (При вычислении дивергенции и ротора в цилиндрических координатах мы так его и будем представлять.)

В ещё большей степени высказанное замечание относится к сферическим координатам. Там соответствующий криволинейный параллелепипед ещё труднее представлять в трёхмерном виде, поэтому его двумерный образ, который ниже будет приведён, будет полезен даже в большей степени.

В сферических координатах  $(r, \theta, \alpha)$  координатные поверхности  $S_r, S_\theta, S_\alpha$  представляют собой сферу радиуса  $r$ , конус с углом при вершине  $\theta$  и с осью симметрии, совпадающей с  $z$ , и полу плоскость  $\alpha = \text{const}$ , совпадающую с координатной поверхностью в цилиндрической системе. Соответствующий элементарный объём, вырезанный из пространства тремя парами координатных поверхностей, изображать здесь не будем из-за его бесполезности для вычислений. Вместо него изобразим сечение элементарного объёма плоскостью  $\alpha = \text{const}$  (см. рис. А.8), имея в виду, что объём получается в результате поворота заштрихованного «прямоугольника» на угол  $\Delta\alpha$  относительно оси  $z$ , проходящей на расстоянии  $r \sin \theta$  от площадки. Поэтому, глядя на этот рисунок, каждый



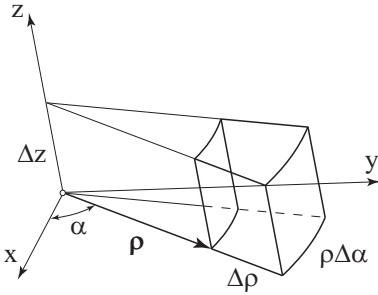


Рис. А.7

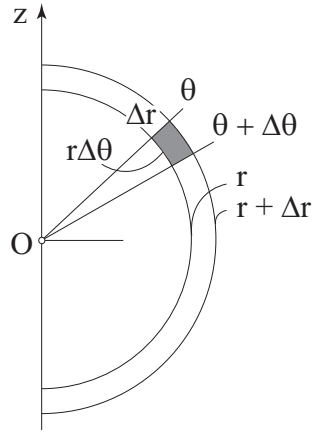


Рис. А.8

должен увидеть, что

$$\begin{aligned}
 \Delta S_r &= r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \alpha, \\
 \Delta S_\theta &= \Delta r \cdot r \sin \theta \Delta \alpha, \\
 \Delta S_\alpha &= r \Delta \theta \Delta r, \\
 \Delta V &= \Delta S_\alpha \cdot r \sin \theta \Delta \alpha = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Такой подход мы применим при вычислениях в сферических координатах. Но это будет ниже, когда мы перейдём к собственно векторному анализу. Но перед этим есть необходимость в кратком обсуждении вопроса о разложении векторного поля по ортогональному базису и в некоторых комментариях.

## А.2. О разложении векторного поля. Комментарии по векторной алгебре

1. Трёхмерное векторное поле задаётся в виде разложения по ортам соответствующей системы координат. В декартовой системе это будет  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + a_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + a_z(x, y, z)\mathbf{e}_z$ , а в сферической системе,

например,  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = a_r(r, \theta, \alpha)\mathbf{e}_r + a_\theta(r, \theta, \alpha)\mathbf{e}_\theta + a_\alpha(r, \theta, \alpha)\mathbf{e}_\alpha$ . Обратим внимание, что для конкретного рассматриваемого векторного поля использовать можно любую из систем координат. Но на практике в каждом случае существует своя предпочтительная система координат. Выбор её осуществляется по характерным особенностям задачи, касающимся границ области решения, свойств симметрии и других особенностей.

В ходе изучения основного курса мы постоянно сталкиваемся с этой проблемой выбора и на практике приобретаем необходимое умение. А здесь на простейшем примере однородного поля  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  продемонстрируем две возможные формы представления этого векторного поля в сферических координатах.

*Пример 1.* Примем, что  $\mathbf{E}_0$  параллельно оси  $z$  декартовой системы:

$$\mathbf{E}_1 = E_0\mathbf{e}_z.$$

Как видно из рис. А.9, в любой точке  $P(r, \theta, \alpha)$  вектор  $\mathbf{e}_z$  можно разложить по ортам сферической системы в виде  $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$ .

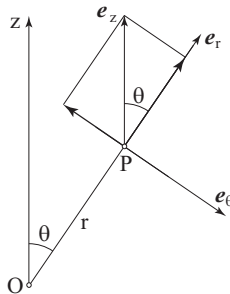


Рис. А.9

Следовательно, рассматриваемое поле имеет представление

$$\mathbf{E}_1 = E_0\mathbf{e}_z = E_0(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta). \quad (3)$$

*Пример 2.* Теперь предположим, что поле  $\mathbf{E}_0$  параллельно оси  $x$ :

$$\mathbf{E}_2 = E_0\mathbf{e}_x.$$

Проведя через точку  $P$  плоскость, перпендикулярную оси  $z$  (см. рис. А.10а), вектор  $\mathbf{e}_x$  легко выразить через  $\mathbf{e}_\rho$  и  $\mathbf{e}_\alpha$ :  $\mathbf{e}_x = \cos\alpha\mathbf{e}_\rho - \sin\alpha\mathbf{e}_\alpha$ . В меридиональной плоскости, проведённой через точку  $P$  и ось  $z$  (см.

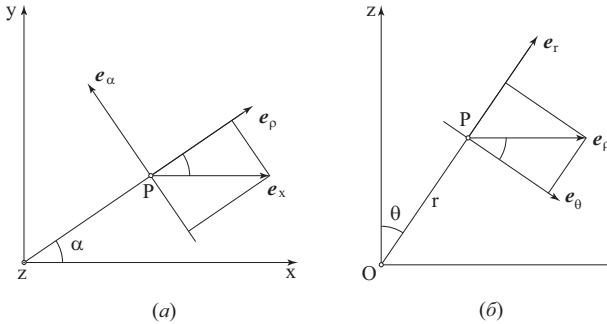


Рис. А.10

рис. А.10б), видно, что орт  $e_\rho$ , входящий в предыдущее равенство, есть  $e_\rho = \sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta$ . Следовательно, для поля  $\mathbf{E}_2$  получаем

$$\mathbf{E}_2 = E_0 e_x = E_0 [(\sin \theta e_r + \cos \theta e_\theta) \cos \alpha - \sin \alpha e_\alpha]. \quad (4)$$

Обращаем внимание, что компоненты однородного поля  $\mathbf{E}_0$  в сферической (впрочем, как и в цилиндрической) системе координат зависят от точки наблюдения. Это естественно, поскольку орты  $e_r, e_\theta, e_\alpha$  привязаны к точке наблюдения и зависят от её координат.

*В этом месте полезно поупражняться в установлении взаимных связей между ортами типа*

$$e_r = \sin \theta e_\rho + \cos \theta e_z, \quad e_\theta = \cos \theta e_\rho - \sin \theta e_z;$$

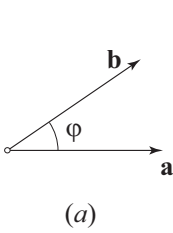
$$e_\rho = \cos \alpha e_x + \sin \alpha e_y, \quad e_\alpha = -\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_y.$$

## 2. Комментарии к векторной алгебре относительно произведений векторов

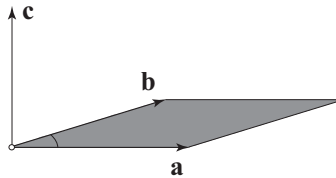
Напомним, что скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , обозначаемое  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , определяется как скаляр

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

равный произведению их длин на косинус угла между ними, приведенными к общему началу (см. рис. А.11а), или, что то же самое, произведению длины одного и проекции другого на направление первого вектора.



(a)



(б)

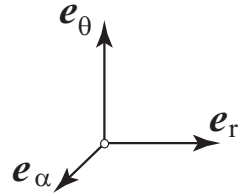


Рис. А.11

Рис. А.12

Векторное произведение векторов  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  есть вектор  $\mathbf{c}$ , длина которого равна  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$  (т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ), направленный перпендикулярно  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  с конца вектора  $\mathbf{c}$  казался наблюдателю происходящим против часовой стрелки (рис. А.11б).

В работе редко случается пользоваться этими определениями непосредственно. Для вычислений используются формулы, получающиеся в результате разложения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по определённым ортам. В ортогональных системах координат они имеют простой вид. Например, в сферических координатах  $(r, \theta, \alpha)$  это будут

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_r b_r + a_\theta b_\theta + a_\alpha b_\alpha, \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} e_r & e_\theta & e_\alpha \\ a_r & a_\theta & a_\alpha \\ b_r & b_\theta & b_\alpha \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(В декартовых координатах — аналогичные формулы, совсем привычные.)

Два замечания к использованию формул типа (5):

а). Для вычисления компонент векторного произведения  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  фактически необязательно каждый раз выписывать и раскрывать соответствующий определитель. Достаточно перед собой иметь соответствующую правую тройку единичных векторов (рис. А.12) и, обратив внимание, например, на равенство  $e_r = [e_\theta \times e_\alpha]$  (а также  $[e_\alpha \times e_\theta] = -e_r$ ), понять, что  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_r$  может состоять только из  $\theta$  и  $\alpha$ -компонент векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , причём в самом простейшем виде  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_r = a_\theta b_\alpha - a_\alpha b_\theta$ . И так по всем другим компонентам. Например,  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\alpha = a_r b_\theta - a_\theta b_r$ , как легко увидеть из рис. А.12.

б). Часто приходится иметь дело со случаем, когда перемножаемые векторы заданы разложениями по ортам разных систем координат

нат. Тогда для вычисления произведения формулами типа ( 5 ) непосредственно воспользоваться невозможно. Необходимо орты одной из систем предварительно разлагать по ортам другой, как показано в рассмотренных выше примерах (см формулы ( 3 ), ( 4 )).

*Пример 3.* Пусть точечный заряд  $q$ , находящийся в однородном электрическом поле  $E_0 \mathbf{e}_x$ , совершает перемещение из точки  $P$  с координатами  $(r, \theta, \alpha)$  в точку  $P'$  с координатами  $(r + dr, \theta + d\theta, \alpha + d\alpha)$ . Вычислить величину работы, совершённой электрическим полем над зарядом.

Здесь  $dA = (\mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell})$ , где  $\mathbf{f} = qE_0 \mathbf{e}_x$ ,  $d\boldsymbol{\ell} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\alpha \mathbf{e}_\alpha$  (см. третью строку равенств ( 1 )). Воспользуемся разложением ( 4 ) и силу представим в виде  $\mathbf{f} = qE_0[(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \cos \alpha - \sin \alpha \mathbf{e}_\alpha]$ . Тогда для искомой работы получаем

$$dA = qE_0[(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha d\alpha].$$

*Упражнение.* Приведенный ответ получить по-другому, орты  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\alpha$  разложив по базису в декартовых координатах и выразив  $d\boldsymbol{\ell}_x$  через  $dr, d\theta, d\alpha$ .

*О двойном векторном произведении.* Из трёх векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , в общем случае *некомпланарных*, организуем два варианта двойного векторного произведения:  $[[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}]$  и  $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]$ . В первом из них «внешним» сомножителем является  $\mathbf{c}$ , а во втором такую роль играет  $\mathbf{a}$ . Структура ответа для этих произведений нам известна. Как, не думая, написать для них правильные

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}] &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ [\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned} \quad ( 6 )$$

ответы? Механическое запоминание здесь совсем нерационально. Следует просто обратить внимание, что каждый из этих ответов представляет собой разложение по двум векторам из тройки. В первой строке это есть разложение по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , входящим во внутреннюю скобку, а во второй — разложение по аналогичным векторам  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Здесь ещё ничего запоминать не требуется, так как понятно, что каждое из двойных произведений представляет собой вектор, перпендикулярный «внешнему» вектору и следовательно, при разложении составляющей по этому вектору не имеет. Единственно, что осталось просто запомнить, это: в правых частях равенств ( 6 ) именно средний вектор из внутренней скобки берётся со знаком «плюс».

### А.3. Скалярное поле. Градиент

Важной характеристикой поля  $u(\mathbf{r})$ , определяющей его поведение в малой окрестности любой точки  $P$ , является градиент поля в точке  $P$ . Чтобы к нему прийти, обратимся к величине, смысл которой содержится в её названии

*производная скалярной функции по направлению.*

Для этого возьмём точку  $P(x, y, z)$  и проведём луч  $l$ , исходящий из этой точки (рис. А.13). Направление луча охарактеризуем единичным вектором  $\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z$ , задаваемым направляющими косинусами, причём  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Названная производная, обозначаемая  $\partial u / \partial l$ , в точке  $P$  характеризует быстроту изменения скалярной величины  $u$  при перемещении точки наблюдения от точки  $P$  по лучу  $l$ . Пусть  $P'$  — соседняя точка, расположенная на расстоянии  $\Delta l$ . Тогда по определению

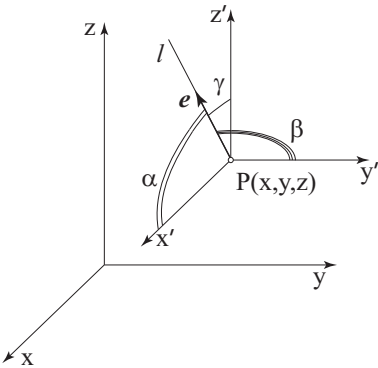


Рис. А.13

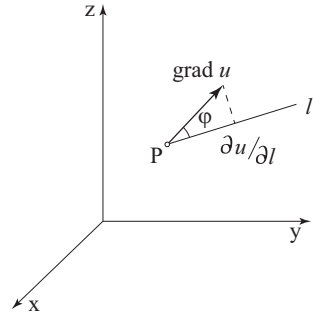


Рис. А.14

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(P') - u(P)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta l}.$$

Поскольку вектор перемещения  $\Delta \mathbf{l} = \Delta l \mathbf{e} = \Delta l (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z)$ , то  $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$ ,  $\Delta y = \Delta l \cos \beta$ ,  $\Delta z = \Delta l \cos \gamma$ , и для приращения функции имеем

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P \Delta z = \Delta l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P) = \frac{\partial u}{\partial x}(P) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(P) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(P) \cos \gamma, \quad (7)$$

т. е. производная функции  $u$  по направлению  $l$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P) = (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{e}) \quad (8)$$

равна скалярному произведению векторов  $\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z$ . При этом вектор  $\mathbf{\Lambda}$  определяется только точкой  $P$  и не зависит от направления луча, а  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в этом направлении.

Вектор  $\mathbf{\Lambda}$  называется градиентом поля в точке  $P$  и обозначается

$$\text{grad } u(P) = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Таким образом, градиент можно вычислить по этой формуле, если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат и функция поля  $u(P)$  введена как функция этих координат  $u(x, y, z)$ . Если выбрать другую прямоугольную декартову систему координат (с другим началом и с другими направлениями осей), то изменятся направления ортов  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  и значения производных  $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z$ . Однако сам градиент останется неизменным. Чтобы в этом убедиться, необходимо дать инвариантное определение градиента, т. е. определение, которое не зависит от выбора системы координат в пространстве.

Из формулы (8) следует, что производная по направлению связана с градиентом соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi, \quad (10)$$

где  $\varphi$  — угол между  $\text{grad } u$  и направлением  $l$  (см. рис. А.14). Так как  $\cos \varphi$  принимает своё наибольшее значение при  $\varphi = 0$ , из равенства (10) следует, что  $|\text{grad } u|$  есть наибольшее возможное значение  $\partial u / \partial l$  в точке  $P$ , а направление  $\text{grad } u$  совпадает с направлением луча, исходящего из точки  $P$ , для которого  $\partial u / \partial l$  принимает это своё наибольшее значение.

Таким образом, градиент скалярного поля — это вектор, имеющий направление наибоыстрейшего возрастания функции  $u$  и величину, равную производной по этому направлению. Это определение градиента

не зависит от выбора системы координат и является, следовательно, инвариантным.

Вернёмся ещё раз к соотношению ( 10 ). Его можно перефразировать так:

$$\left| \begin{array}{l} \text{составляющая градиента по любому} \\ \text{направлению равна производной} \\ \text{по этому направлению.} \end{array} \right. \quad ( 11 )$$

А это уже прямой путь для вычисления градиента поля, отнесённого к другим ортогональным системам координат. (Для декартовой системы имеется формула ( 9 ).) В цилиндрических координатах с ортами  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$  разложение имеет вид

$$\text{grad } u(\rho, \alpha, z) = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial u}{\rho \partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad ( 12 )$$

В сферических координатах при вычислении составляющей по  $\mathbf{e}_\alpha$  не забываем, что элемент координатной линии  $\alpha$  есть  $r \sin \theta d\alpha$ . Результат следующий:

$$\text{grad } u(r, \theta, \alpha) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u}{r \sin \theta \partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha. \quad ( 13 )$$

Подчеркнём, что составляющие по всем ортам в формулах ( 12 ), ( 13 ) получены в соответствии с утверждением ( 11 ).

Для вычисления градиента полезны также следствия формулы ( 9 ) и правил дифференцирования. Это градиент произведения

$$\text{grad}(uv) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v \quad ( 14 )$$

и градиент сложной функции

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \text{ grad } u. \quad ( 15 )$$

Обратимся к примерам. Начнём со случая сферически симметричного поля

$$u(|\mathbf{r}|) = u(r)$$

с центром симметрии, совпадающим с началом координат. Непосредственно из инвариантного определения очевидно, что градиент в любой точке в этом случае направлен радиально и по величине равен производной  $u'(r)$  :

$$\text{grad } u(r) = \frac{du}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$



Преследуя чисто учебные цели, в приводимых ниже примерах 1, 2 к подобному результату придём путём вычислений.

*Пример 1.* Пусть  $u_1(r) = r$ . Можно представить это поле в декартовых координатах в виде  $u_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и воспользоваться формулой ( 9 ). В результате получим  $\text{grad } u_1 = \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , то есть

$$\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad ( 16 )$$

Конечно, простейший путь к этому результату — это использование естественной для данного поля сферической системы координат. Поле  $u_1$  не зависит от угловых координат и из формулы ( 13 ) прямо видно, что  $\text{grad } r = 1 \cdot \mathbf{e}_r$ , т. е. результат ( 16 ).

*Пример 2.* Воспользовавшись формулой ( 15 ), найдём

$$\text{grad } \frac{1}{r^n} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^n} \right) \text{grad } r = -\frac{n}{r^{n+1}} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

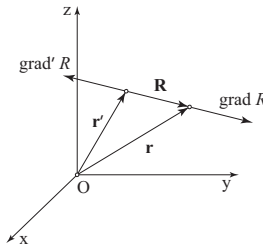


Рис. А.15

*Пример 3.* В качестве обобщения приведенных примеров рассмотрим функцию  $R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , зависящую от координат точек  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}$ , и равную расстоянию между ними (см. рис. А.15). В электродинамике часто приходится иметь дело с этой функцией. Для неё различают два вида градиентов, обозначаемые  $\text{grad } R$  и  $\text{grad}' R$ . Градиент «без штриха» подразумевает, что точка  $\mathbf{r}'$  фиксирована, а переменными являются координаты точки  $\mathbf{r}$ . (Иными словами, центр симметрии поля  $R$  совпадает с точкой  $\mathbf{r}'$ .) Для градиента «со штрихом», наоборот, точка  $\mathbf{r}$  — фиксирована, а меняются координаты  $\mathbf{r}'$ .

Из результата ( 16 ) очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{R}}{R}, \\ \operatorname{grad}' R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= -\frac{\mathbf{R}}{R},\end{aligned}\tag{ 17 }$$

где вектор  $\mathbf{R}$  направлен от  $\mathbf{r}'$  к  $\mathbf{r}$ . (рис. А.15).

Соответственно для  $1/R^n(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \frac{1}{R^n} &= \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R^n} \right) \operatorname{grad} R = -\frac{n}{R^{n+1}} \frac{\mathbf{R}}{R}, \\ \operatorname{grad}' \frac{1}{R^n} &= \frac{n}{R^{n+1}} \frac{\mathbf{R}}{R}.\end{aligned}$$

*Пример 4.* Так же часто встречается поле

$$\phi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

представляемое скалярным произведением некоторого постоянного вектора  $\mathbf{k}$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Для него результат можно найти так:

$$\operatorname{grad} \phi = \operatorname{grad}(k_x x + k_y y + k_z z) = (k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z) = \mathbf{k}.$$

Вообще говоря, в этом вычислении необходимости нет. Просто необходимо одну из осей координат (например,  $z$ ) направить вдоль вектора  $\mathbf{k}$  и поле записать в виде  $\phi = kz$ . Отсюда результат становится очевидным:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k}.\tag{ 18 }$$

## А.4. Векторное поле. Поток. Дивергенция. Теорема Остроградского-Гаусса

Вернёмся к векторному полю. Примеры приводить не будем. Сразу напомним, что две интегральные величины характеризуют векторное поле. Первая из них — это поток, с него и начнём обсуждение. Для этого через точку  $P$  мысленно проведём бесконечно малую площадку  $dS$ , ориентацию которой зададим единичным вектором  $\mathbf{n}(P)$  нормали к площадке. Произведение нормальной компоненты вектора  $\mathbf{a}(P)$  на величину площадки

$$dN = a_n(P)dS$$

называют *поток поля*  $\mathbf{a}(P)$  *через элементарную площадку*  $dS$ .

Теперь представим себе конечную поверхность  $S$  с нормалью  $\mathbf{n}(P)$  в каждой точке (причём  $\mathbf{n}(P)$  меняется непрерывным образом при переходе от точки к точке) и разобьём её на систему элементарных площадок  $\Delta S_i$ . Принимая, что в пределах каждой малой площадки поле  $\mathbf{a}$  и нормаль  $\mathbf{n}$  постоянны и равны  $\mathbf{a}(P_i), \mathbf{n}(P_i)$ , составим интегральную сумму  $\sum_i (\mathbf{a}(P_i) \cdot \mathbf{n}(P_i)) \Delta S_i$ . Предел этой интегральной суммы

$$N = \int_S a_n dS \quad (19)$$

называется потоком векторного поля  $\mathbf{a}$  через конечную поверхность  $S$ .

Таким образом, в каждом конкретном случае вычисление потока сводится к замене символической записи (19) соответствующим определённым двойным интегралом и его вычислению. Выполнение первого из этих этапов, представляющее определённую трудность для начинающих, продемонстрируем на примере.

*Пример.* Поток поля точечного заряда  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (q/r^2)(\mathbf{r}/r)$  через участок цилиндрической поверхности  $\rho = a$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $0 \leq z \leq a$  (см. рис. А.16).

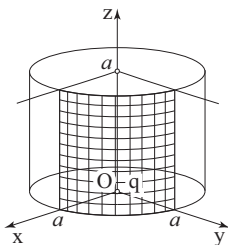


Рис. А.16

В качестве элементарной площадки здесь естественно принять элемент  $dS = a da dz$  координатной поверхности  $\rho = a$ . Внешней нормалью к площадкам  $dS$  служит  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ . Поскольку радиус-вектор точки на поверхности  $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ ,  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ , то нормальная компонента поля  $\mathbf{E}$  в этой точке  $E_n = qa/(\sqrt{a^2 + z^2})^3$  и поток (19) выражается

двумерным интегралом

$$N_1 = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{qa}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} a d\alpha dz$$

Подынтегральная функция не зависит от  $\alpha$ . Вычисление приводит к результату

$$N_1 = qa^2 \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{dz}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} = q \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для самопроверки полезно составить интеграл для вычисления потока того же поля через часть плоской крышки рассматриваемого цилиндра  $z = a$ ,  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Должен получиться следующий результат:

$$N_2 = qa \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(\sqrt{a^2 + \rho^2})^3} = q \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

**Дивергенция поля.** Рассмотрим теперь произвольную точку  $P_0$  и окружим её замкнутой поверхностью  $S$ . В качестве вектора  $\mathbf{n}$  на  $S$  выберем единичный вектор *внешней* нормали и поток вектора  $\mathbf{a}(P)$  по этой замкнутой поверхности обозначим  $\oint a_n dS$ .

После разделения на объём  $V_s$ , ограниченный рассматриваемой замкнутой поверхностью, и взятия предела при стягивания  $S$  в точку  $P_0$ , отсюда получается величина, играющая важную роль в теории поля. Называется она дивергенцией векторного поля в точке  $P_0$

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(P_0) = \lim_{V_s \rightarrow 0} \frac{1}{V_s} \oint a_n dS \quad (20)$$

и является одной из двух локальных характеристик поля.

Необходимо отметить, что определение (20) имеет смысл только в том случае, если предел не зависит от того, какие формы принимает  $S$  в процессе стягивания в точку  $P_0$  (или в процессе уменьшения объёма  $V_s$ ). В достаточно широких для приложений условиях это действительно имеет место, но при этом одной непрерывности поля  $\mathbf{a}(P)$  оказывается недостаточно, и мы будем предполагать, что компоненты вектора  $\mathbf{a}(P)$

имеют непрерывные частные производные.<sup>1</sup>

Следствием инвариантного определения дивергенции ( 20 ) является **интегральная теорема Остроградского-Гаусса**

$$\oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV \quad ( 21 )$$

о равенстве потока через любую замкнутую поверхность  $S$  интегралу от дивергенции по объёму  $V$ , заключённому внутри этой замкнутой поверхности. Чтобы в этом утвердиться, достаточно разбить весь объём на систему бесконечно малых элементарных объёмов  $dV$ , для каждого из которых справедливо равенство  $dN = \operatorname{div} \mathbf{a} dV$ , где  $dN$  — поток поля через замкнутую поверхность объёма  $dV$ . Сложив все эти равенства, учитывая, что потоки через внутренние границы между соседними элементами  $dV$  при этом компенсируются, в результате придём к равенству ( 21 ).

## А.5. Вычисление дивергенции в ортогональных координатах

Основывается на инвариантном определении дивергенции ( 20 ). Для этого можно использовать стандартную последовательность операций в каждой из систем координат:

1. Замкнутую поверхность выбрать в виде поверхности ортогонального параллелепипеда (криволинейного в общем случае), образованного тремя парами координатных поверхностей, и содержащего внутри себя рассматриваемую точку  $P_0$ .

2. Вычислить суммарный поток поля через эту замкнутую поверхность, мысленно её разбив на три пары противоположных граней параллелепипеда. Вклад каждой пары в суммарный поток вычисляется отдельно.

3. Разделить поток на объём, заключённый внутри замкнутой поверхности и перейти к предусмотренному пределу ( 20 ).

---

<sup>1</sup>Впрочем, наличие поверхности разрыва поля  $\mathbf{a}$  или его частных производных не вносит больших трудностей при работе с рассматриваемой величиной, но на этом мы не будем останавливаться.

Наиболее просто эта процедура выполняется для *декартовой системы координат*. Здесь параллелепипед с центром в точке  $P_0$  и гранями, параллельными координатным плоскостям, легко изобразить в виде рис. А.17. Длины его рёбер приняты равными  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ; его объём  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

Рассмотрим грани, перпендикулярные оси  $x$ , с внешними нормальными  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$  (см. рис. А.17). Вклад этой пары можно представить в виде

$$\Delta N_x = [a_x(x + \frac{1}{2}\Delta x, y_*, z_*) - a_x(x - \frac{1}{2}\Delta x, y_{**}, z_{**})]\Delta y \Delta z,$$

где  $y_*, z_*$  — координаты некоторой внутренней точки правой грани параллелепипеда,  $y_{**}, z_{**}$  — аналогичные координаты точки его левой грани, пока неопределённые в случае произвольных  $\Delta y, \Delta z$ . Поскольку величину  $N_x$  нам предстоит разделить на  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  и перейти к пределу при стягивании параллелепипеда в точку  $P_0$ , то очевидно, что эти неопределённые координаты внутренних точек можно заменить на  $y_0, z_0$ . При этом рассматриваемое отношение переходит в

$$\frac{\Delta N_x}{\Delta V} = \frac{a_x(x + \frac{1}{2}\Delta x, y_0, z_0) - a_x(x - \frac{1}{2}\Delta x, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

а при  $\Delta x \rightarrow 0$  даёт  $\frac{\partial a_x}{\partial x}(P_0)$ .

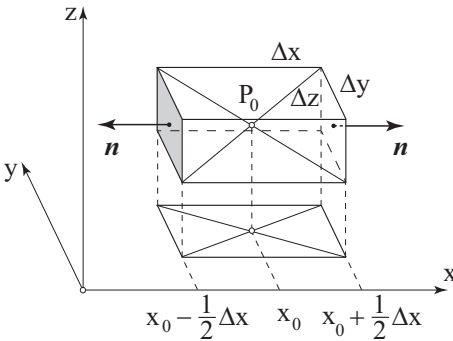


Рис. А.17

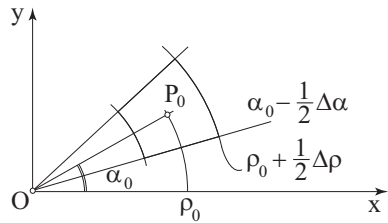


Рис. А.18

Аналогично этому оставшиеся две пары противоположных граней

приводят к результатам

$$\frac{\Delta N_y}{\Delta V} \rightarrow \frac{\partial a_y}{\partial y}(P_0), \quad \frac{\Delta N_z}{\Delta V} \rightarrow \frac{\partial a_z}{\partial z}(P_0).$$

Так что в общей сложности мы получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(P_0) = \frac{\partial a_x}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial a_y}{\partial y}(P_0) + \frac{\partial a_z}{\partial z}(P_0).$$

Заменяя в полученной формуле точку  $P_0$  произвольной точкой, окончательно формулу для вычисления дивергенции поля в прямоугольных декартовых координатах запишем в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}. \quad (22)$$

*Перейдём к цилиндрическим координатам.* Замкнутую поверхность соответствующего ортогонального параллелепипеда, внутри себя содержащего точку  $P_0$  с координатами  $\rho_0, \alpha_0, z_0$ , мы теперь имеем возможность изобразить в двумерном виде его сечения плоскостью  $z = z_0$  (рис. А.18). Представляем, что ребро, перпендикулярное плоскости  $z$ , имеет длину  $\Delta z$ , а объём параллелепипеда  $\Delta V = \rho_0 \Delta \alpha \Delta z$ . Поток поля через пару граней  $\rho_0 - \frac{1}{2} \Delta \rho, \rho_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho$  данного параллелепипеда запишем в виде

$$\Delta N_\rho = \left[ (\rho_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho) a_\rho(\rho_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho, \alpha_0, z_0) - (\rho_0 - \frac{1}{2} \Delta \rho) a_\rho(\rho_0 - \frac{1}{2} \Delta \rho, \alpha_0, z_0) \right] \Delta \alpha \Delta z,$$

сразу же координаты  $\alpha_*, z_*$  и  $\alpha_{**}, z_{**}$  заменив на значения  $\alpha_0, z_0$ . Обращаем внимание на важное обстоятельство. Здесь площадь грани, соответствующей координатной поверхности  $S_\rho$ , зависит от её координаты и это нельзя не учитывать при составлении  $\Delta N_\rho$ . После деления на объём получаем

$$\frac{\Delta N_\rho}{\Delta V} = \frac{1}{\rho_0} \frac{(\rho_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho) a_\rho(\rho_0 + \frac{1}{2} \Delta \rho, \alpha_0, z_0) - (\rho_0 - \frac{1}{2} \Delta \rho) a_\rho(\rho_0 - \frac{1}{2} \Delta \rho, \alpha_0, z_0)}{\Delta \rho},$$

что в пределе  $\Delta \rho \rightarrow 0$  даёт  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho}(P_0)$ .

Грани параллелограмма, соответствующие координатам  $\alpha_0 - \frac{1}{2} \Delta \alpha, \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta \alpha$  имеют одинаковые площади и вклад этой пары граней в суммарный поток поля приводит к величине  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}(P_0)$ . Аналогичны грани с

координатами  $z_0 - \frac{1}{2}\Delta z$  и  $z_0 + \frac{1}{2}\Delta z$ . Их вклад даёт величину  $\frac{\partial a_z}{\partial z}(P_0)$ . В результате формула для дивергенции в цилиндрических координатах приобретает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (23)$$

Наконец, в *сферических координатах*, когда соответствующую замкнутую

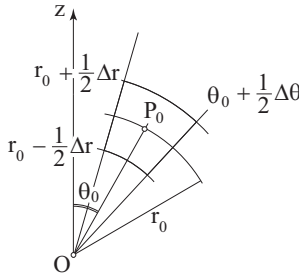


Рис. А.19

поверхность можем представить сечением (рис. А.19) полуплоскостью  $\alpha = \alpha_0$ . Здесь уже две элементарные площадки зависят от своих координат:  $dS_r = r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \alpha$ ,  $dS_\theta = r \sin \theta \Delta \alpha \Delta r$ , а  $dS_\alpha = r \Delta \theta \Delta r$  от своей координаты не зависят. В соответствии с этим попарные потоки после деления на объём  $\Delta V = r_0^2 \sin \theta_0 \Delta \alpha \Delta \theta \Delta r$  и сокращений дают:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_r}{\Delta V} &= \frac{(r_0 + \frac{1}{2}\Delta r)^2 a_r(r_0 + \frac{1}{2}\Delta r, \theta_0, \alpha_0) - (r_0 - \frac{1}{2}\Delta r)^2 a_r(r_0 - \frac{1}{2}\Delta r, \theta_0, \alpha_0)}{r_0^2 \Delta r}, \\ \frac{\Delta N_\theta}{\Delta V} &= \frac{\sin(\theta_0 + \frac{1}{2}\Delta \theta) a_\theta(r_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\Delta \theta, \alpha_0) - \sin(\theta_0 - \frac{1}{2}\Delta \theta) a_\theta(r_0, \theta_0 - \frac{1}{2}\Delta \theta, \alpha_0)}{r_0 \sin \theta_0 \Delta \theta}, \\ \frac{\Delta N_\alpha}{\Delta V} &= \frac{a_\alpha(r_0, \theta_0, \alpha_0 + \frac{1}{2}\Delta \alpha) - a_\alpha(r_0, \theta_0, \alpha_0 - \frac{1}{2}\Delta \alpha)}{r_0 \sin \theta_0 \Delta \alpha}. \end{aligned}$$

После перехода к пределам приводят к формуле для вычисления дивергенции в сферических координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (24)$$



## А.6. Циркуляция и ротор поля. Теорема Стокса

Наряду с дивергенцией важную роль в исследовании локальных свойств векторного поля играет его ротор. К этому понятию приводит рассмотрение циркуляции поля  $\mathbf{a}$ , определяемый как криволинейный интеграл

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{a}_t dl$$

по замкнутому контуру  $C$ , снабжённому направлением обхода. Здесь  $a_t$  — проекция вектора  $\mathbf{a}$  на касательную к контуру  $C$ , причём положительным считается то направление на касательной, которое совпадает с направлением обхода контура.

Обратимся сразу к плоскому контуру. Возьмём точку  $P(x, y, z)$  и проходящую через неё ось с единичным вектором направления  $\mathbf{n}$ . В плоскости, содержащей точку  $P$  и перпендикулярной  $\mathbf{n}$ , проведём контур  $C$ , обходящий точку  $P$  в направлении против часовой стрелки, если смотреть на контур с конца вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. А.20) (Такое направление обхода контура называют «согласованным» с  $\mathbf{n}$ .) Определим локальную характеристику поля, называемую *завихренностью в точке*

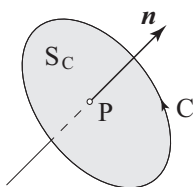


Рис. А.20

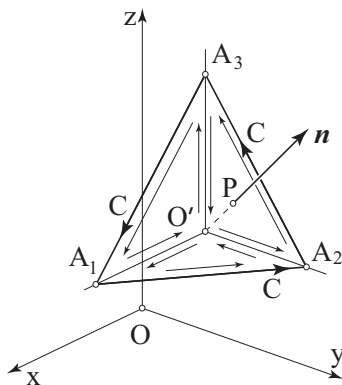


Рис. А.21

$P$  вокруг направления  $\mathbf{n}$ , как предел отношения циркуляции  $\Gamma_C$  к пло-

щади, ограниченной контуром  $C$ , при стягивании контура к точке  $P$  :

$$w_{\mathbf{n}}(P) = \lim_{C \rightarrow P} \frac{1}{S_C} \oint a_i dl. \quad (25)$$

Справедливо следующее важное предложение относительно этой скалярной величины: если единичный вектор  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z$  задан направляющими косинусами, то

$$w_{\mathbf{n}}(P) = w_{e_x}(P) \cos \alpha + w_{e_y}(P) \cos \beta + w_{e_z}(P) \cos \gamma. \quad (26)$$

Для доказательства (26) через точку  $P$  проведём плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{n}$ , выберем на продолжении вектора  $\mathbf{n}$  точку  $O'$  и проведём через  $O'$  лучи, параллельные осям координат (см. рис. А.21) Эти лучи пересекут плоскость, проведённую через  $P$ , в точках  $A_1, A_2, A_3$ . В качестве контура  $C$  возьмём периметр треугольника  $A_1 A_2 A_3$ , пробегаемый в направлении, согласованном с  $\mathbf{n}$ , т. е. контур  $A_1 A_2 A_3 A_1$ . На остальных трёх гранях пирамиды  $O' A_1 A_2 A_3$  также введём контуры  $C_1 : O' A_2 A_3 O'$ ,  $C_2 : O' A_3 A_1 O'$  и  $C_3 : O' A_1 A_2 O'$ , обходы которых согласованы соответственно с  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Тогда нетрудно видеть, что

$$\oint_C a_i dl = \oint_{C_1} a_i dl + \oint_{C_2} a_i dl + \oint_{C_3} a_i dl, \quad (27)$$

так как в правой части интегралы по рёбрам  $O' A_1, O' A_2, O' A_3$  взаимно уничтожаются. Площади граней пирамиды связаны соотношениями:

$$S_{C_1} = S_C (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) = S_C \cos \alpha,$$

$$S_{C_2} = S_C (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) = S_C \cos \beta,$$

$$S_{C_3} = S_C (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) = S_C \cos \gamma.$$

Поэтому из равенства (27) находим, что

$$\frac{1}{S_C} \oint_C a_i dl = \frac{1}{S_{C_1}} \oint_{C_1} a_i dl \cdot \cos \alpha + \frac{1}{S_{C_2}} \oint_{C_2} a_i dl \cdot \cos \beta + \frac{1}{S_{C_3}} \oint_{C_3} a_i dl \cdot \cos \gamma.$$

После перехода к пределу при стягивании контура  $C$  в точку  $P$  (т. е. при перемещении точки  $O'$  по отрезку  $O'P$  в точку  $P$ .) это равенство превращается в требуемое соотношение (26).

Таким образом, завихренность в точке  $P$  вокруг направления  $\mathbf{n}$  выражается через завихренности вокруг направлений  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  соотношением, полностью аналогичным соотношению ( 7 ) для производной по направлению. Здесь его для сравнения воспроизведём:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P) = \frac{\partial u}{\partial x}(P) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(P) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(P) \cos \gamma. \quad ( 7 )$$

Теперь можно повторить всё сказанное раньше после формулы ( 7 ), внося единственное уточнение, касающегося вектора с вспомогательным обозначением  $\Lambda$ . Обозначением этим пользоваться ещё раз не станем, назвав соответствующий вектор своим именем — ротор векторного поля в точке  $P$  :

$$\text{rot } \mathbf{a}(P) = w_{e_x}(P)\mathbf{e}_x + w_{e_y}(P)\mathbf{e}_y + w_{e_z}(P)\mathbf{e}_z,$$

а аналог соотношения ( 7 ) повторим в виде

$$w_{\mathbf{n}}(P) = \text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}(P) \quad ( 28 )$$

и дополним поясняющим рис. А.22.

*Инвариантное определение ротора* векторного поля, вытекающее из сказанного, формулируется так: это есть вектор, имеющий направление, совпадающее с тем, вокруг которого завихренность поля максимальна,

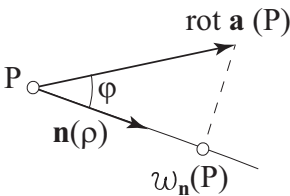


Рис. А.22

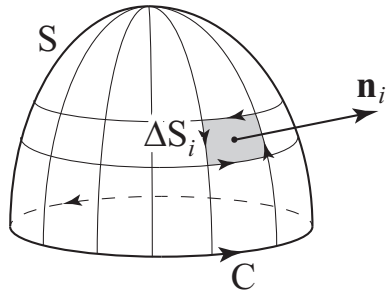


Рис. А.23

и величину, равную этой максимальной завихренности. Из равенства ( 28 ) следует, что

$$\left| \begin{array}{l} \text{составляющая ротора по любому} \\ \text{направлению равна завихренности} \\ \text{вокруг этого направления.} \end{array} \right. \quad ( 29 )$$

Это — ключ к вычислению ротора во всех ортогональных системах.

**Теорема Стокса.** Как мы убедились выше, из инвариантного определения дивергенции вытекает теорема Остроградского-Гаусса ( 21 ), связывающая интеграл по объёму  $V$  от дивергенции векторного поля с потоком вектора через замыкающую поверхность  $S$ . Точно так же из инвариантного определения ротора и соотношения ( 29 ) следует теорема Стокса

$$\int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a} dS = \oint_C a_l dl. \quad (30)$$

Здесь  $S$  — любая незамкнутая поверхность, опирающаяся на замкнутый контур  $C$ , в общем случае пространственный (см. рис. А.23), а направление нормали  $\mathbf{n}$  и положительное направление обхода контура  $C$  согласованы между собой.

Теорема утверждает, что циркуляция векторного поля по контуру  $C$  равна потоку ротора через поверхность  $S$ , натянутую на контур  $C$ . Для доказательства достаточно поверхность  $S$  разбить на систему бесконечно малых элементарных площадок и циркуляцию  $d\Gamma$  по контуре, охватывающую площадку  $dS$ , выразить через завихренность  $w_n = \operatorname{rot}_n \mathbf{a}$  соотношением

$$d\Gamma = w_n dS = \operatorname{rot}_n \mathbf{a} dS. \quad (31)$$

(На рис. А.23 вместо  $dS$  изображена конечная площадка  $\Delta S_i$  с указанием направления обхода её контура и направления вектора  $\mathbf{n}_i$ .) Просуммируем все равенства ( 31 ). Заметив, что сумма циркуляций  $d\Gamma$  приводит к циркуляции  $\Gamma_C = \oint_C a_l dl$  по контуру  $C$ , приходим к нужному результату ( 30 ).

## А.7. Вычисление ротора в ортогональных координатах

Основывается на утверждении ( 29 ) и определении завихренности, даваемой формулой ( 25 ). Для вычисления завихренности вокруг соответствующего орта можно пользоваться любым замкнутым контуром, лежащим в плоскости, перпендикулярной данному орту. Практически удобно пользоваться контуром с центром в точке  $P_0$ , образованным двумя парами координатных линий. Тогда контур будет иметь вид прямо-

угольника, в общем случае криволинейного, при этом вклад каждой пары сторон, противоположных друг другу, учитывается отдельно.

Имея в виду опыт, приобретённый читателем при вычислении дивергенции, соответствующий процесс для ротора здесь представим более схематично, предполагая присутствие воображения при построении необходимых замкнутых контуров, а также понимание возможности замены неопределённых координат типа  $x_*, y_*, z_*$  на  $x_0, y_0, z_0$ .

Начнём с бесхитромого случая декартовых координат. Здесь для определения  $w_{e_x}(P_0) = \text{rot}_x \mathbf{a}(P_0)$  возьмём

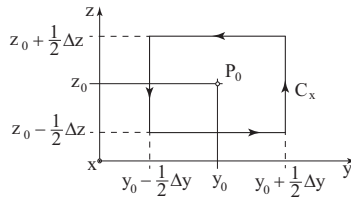


Рис. А.24

прямоугольный контур со сторонами  $\Delta y, \Delta z$ , лежащий в плоскости  $x = x_0$  с направлением обхода, согласованным с ортом  $e_x$  (см. рис. А.24). Циркуляция по этому контуру

складывается из двух частей:

$$\Gamma_{C_x} = \Delta y [a_y(x_0, y_0, z_0 - \frac{1}{2} \Delta z) - a_y(x_0, y_0, z_0 + \frac{1}{2} \Delta z)] + \Delta z [a_z(x_0, y_0 + \frac{1}{2} \Delta y, z_0) - a_z(x_0, y_0 - \frac{1}{2} \Delta y, z_0)].$$

После деления на площадь  $\Delta y \Delta z$  и перехода к пределу отсюда получается  $x$ -составляющая ротора

$$\text{rot}_x \mathbf{a}(P_0) = w_{e_x}(P_0) = \frac{\partial a_z}{\partial y}(P_0) - \frac{\partial a_y}{\partial z}(P_0).$$

Выражения для двух других составляющих

$$\text{rot}_y \mathbf{a}(P_0) = w_{e_y}(P_0) = \frac{\partial a_x}{\partial z}(P_0) - \frac{\partial a_z}{\partial x}(P_0),$$

$$\text{rot}_z \mathbf{a}(P_0) = w_{e_z}(P_0) = \frac{\partial a_y}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial a_x}{\partial y}(P_0)$$

можно получить аналогично, а можно просто воспользоваться круговой перестановкой индексов  $x, y, z$ . Таким образом, формула для вычисления ротора в декартовых координатах имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (32)$$

Для цилиндрических координат  $(\rho, \alpha, z)$  в качестве замкнутых контуров, служащих для определения завихренностей в точке  $P_0(\rho_0, \alpha_0, z_0)$  вокруг направлений  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$  берём контуры, обрамляющие соответствующие элементарные площадки  $\Delta S_\rho, \Delta S_\alpha, \Delta S_z$ . Первые две на рис. А.25(а), (б) представлены в виде разреза плоскостью  $z = z_0$ . Пунктирная

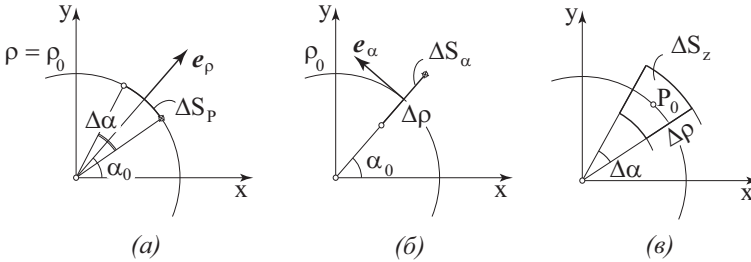


Рис. А.25

окружность представляет собой координатную линию  $\rho$ , проходящую через точку  $P_0$ . Элемент дуги длины  $\rho_0 \Delta \alpha$  на рис. А.25а и радиальный элемент с длиной  $\Delta \rho$  на рис. А.25б, проведённые сплошной линией, здесь символизируют соответственно  $\Delta S_\rho$  и  $\Delta S_\alpha$ . Конечно, мы их мысленно дополняем двумя прямыми отрезками длины  $\Delta z$ , направленными параллельно образующим цилиндра  $\rho = \rho_0$ . Направление обхода на этих отрезках символически обозначено точками и крестиками. Элементарная площадка  $\Delta S_z$  на рис. А.25в показана явно — со своим контуром и направлением обхода.

Имея перед глазами эти картинки, легко написать выражения соответствующих циркуляций, каждая из которых складывается из двух частей:

$$\Gamma_{C_\rho} = \Delta z \left[ a_z(\rho_0, \alpha_0 + \frac{1}{2} \Delta \alpha, z_0) - a_z(\rho_0, \alpha_0 - \frac{1}{2} \Delta \alpha, z_0) \right] + \\ + \rho_0 \Delta \alpha \left[ a_\alpha(\rho_0, \alpha_0, z_0 - \frac{1}{2} \Delta z) - a_\alpha(\rho_0, \alpha_0, z_0 + \frac{1}{2} \Delta z) \right],$$

$$\Gamma_{C_\alpha} = \Delta z \left[ a_z(\rho_0 - \frac{1}{2}\Delta\rho, \alpha_0, z_0) - a_z(\rho_0 + \frac{1}{2}\Delta\rho, \alpha_0, z_0) \right] + \\ + \delta\rho \left[ a_\rho(\rho_0, \alpha_0, z_0 + \frac{1}{2}\Delta z) - a_\rho(\rho_0, \alpha_0, z_0 - \frac{1}{2}\Delta z) \right],$$

$$\Gamma_{C_z} = \Delta\alpha \left[ (\rho_0 + \frac{1}{2}\Delta\rho)a_\alpha(\rho_0 + \frac{1}{2}\Delta\rho, \alpha_0, z_0) - (\rho_0 - \frac{1}{2}\Delta\rho)a_\alpha(\rho_0 - \frac{1}{2}\Delta\rho, \alpha_0, z_0) \right] + \\ + \Delta\rho \left[ a_\rho(\rho_0, \alpha_0 - \frac{1}{2}\Delta\alpha, z_0) - a_\rho(\rho_0, \alpha_0 + \frac{1}{2}\Delta\alpha, z_0) \right].$$

После деления на соответствующие элементарные площадки

$$\Delta S_\rho = \rho_0 \Delta\alpha \Delta z, \quad \Delta S_\alpha = \Delta\rho \Delta z, \quad \Delta S_z = \rho_0 \Delta\alpha \Delta\rho$$

и перехода к пределу отсюда приходим к искомому выражению для ротора в цилиндрических координатах

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\alpha + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\alpha)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\rho \partial \alpha} \right) \mathbf{e}_z. \quad (33)$$

*Упражнение.* Мысленно дополнив рис. А.19 элементами необходимых контуров, получить следующие выражения для вычисления ротора в сферических координатах:

$$\text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\alpha) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \alpha} \right], \\ \text{rot}_\theta \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial a_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta a_\alpha) \right], \quad (34) \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right].$$

## А.8. Оператор набла. Вторые производные. Производные от произведений

1. Выше мы познакомились с рядом дифференциальных операций над векторами и скалярами: образование градиента скаляра ( 9 ), дивергенция вектора ( 22 ), ротора вектора ( 32 ) и т. д. При применении

векторного анализа приходится сталкиваться ещё с целым рядом других дифференциальных выражений.

Оперирование этими выражениями может быть упрощено введением *символического дифференциального оператора Гамильтона*. Оператор этот обозначается знаком  $\nabla$  (читается: «набла»); в декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (35)$$

То есть,  $\nabla$  есть *векторный* оператор, слагающие которого по осям координат равны:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Этот векторный оператор соответствует в векторном анализе знаку производной обычного анализа. Подобно тому, как в обычном анализе производную функции  $\partial u / \partial x$  можно считать произведением оператора  $\partial / \partial x$  на дифференцируемую функцию, так путём умножения скаляров и векторов, являющихся функциями точки, на оператор  $\nabla$  получаются *пространственные производные* этих величин.

Так, например, произведение  $\nabla$  на скаляр  $u$  нужно, очевидно, принять равным

$$\nabla u = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z})u = e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно, согласно (9),

$$\nabla u = \text{grad } u. \quad (36)$$

С известными ограничениями, о которых будет сказано ниже, можно образовывать произведения  $\nabla$  с другими векторами и скалярами так, как если бы  $\nabla$  был истинным, а не символическим вектором. *Как и при пользовании знаком производной, при этом предполагается, что оператор  $\nabla$  «действует» лишь на те величины, которые стоят вправо от него.*

Так, например, скалярное произведение символического вектора  $\nabla$  на произвольный вектор  $\mathbf{a}$  равно:<sup>2</sup>

$$(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z,$$

<sup>2</sup>Обращаем внимание, что в обозначении символического вектора использование полужирного шрифта не принято.



т. е. согласно ( 22 )

$$(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad ( 37 )$$

Помимо скалярного произведения  $(\nabla \cdot \mathbf{a})$ , можно образовать и векторное произведение этих векторов  $[\nabla \times \mathbf{a}]$ , которое, как нетрудно убедиться, совпадает с ротором ( 32 ) векторного поля  $\mathbf{a}$  :

$$[\nabla \times \mathbf{a}] = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad ( 38 )$$

2. Обратимся к выражениям, содержащим два сомножителя  $\nabla$  и, следовательно, связанным со вторыми производными скалярных и векторных величин  $u, \mathbf{a}$ . Начнём с произведения  $(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2$ . Легко вычислить, что этот квадрат совпадает с оператором Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ( 39 )$$

(для него часто используется обозначение  $\Delta$ , называемое лапласианом). Из соответствующей векторной алгебры

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})u = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}u)$$

после замены  $\mathbf{b}$  на вектор  $\nabla$  получаем выражение  $\nabla^2 u = (\nabla \cdot \nabla u)$ , т. е.

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u, \quad ( 40 )$$

раскрывающее смысл оператора Лапласа.

Рассмотрим другие произведения, содержащие по два одинаковых вектора:

$$(\mathbf{b} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]) = 0, \quad [\mathbf{b} \times \mathbf{b}u] = 0, \quad [\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]] = \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - b^2 \mathbf{a}.^3$$

Их аналогами, получающимися после замены  $\mathbf{b}$  на  $\Delta$  (при любых  $\mathbf{a}$  и  $u$ ), являются тождества

$$(\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{a}]) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0, \quad ( 41 )$$

---

<sup>3</sup>В правой части последнего равенства можно, конечно, изменить порядок сомножителей, например, так:  $[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{a}]] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} - a b^2$ . Однако при замене  $\mathbf{b}$  на  $\Delta$  мы должны записать это равенство так, чтобы все дифференциальные операторы стояли *перед* дифференцируемым вектором  $\mathbf{a}$ .

$$[\nabla \times \nabla u] = 0, \text{ т. е. } \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad (42)$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}, \text{ т. е. } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \quad (43)$$

Результат действия оператора  $\Delta = \nabla^2$  на вектор  $\mathbf{a}$ , входящий в последнее выражение, имеет определённый (39) смысл:

$$\Delta \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}. \quad (44)$$

**3.** Итак, пока оператор  $\nabla$  входит сомножителем в произведения, содержащие в себе лишь *один-единственный* истинный скаляр или вектор, произведения эти можно преобразовать по обычным правилам векторной алгебры. Однако, если в произведение входят два или несколько истинных скаляров или векторов, то правила эти становятся неприменимыми и нуждаются в видоизменениях. Продемонстрируем это на примере воздействия оператора  $\nabla$  на произведения двух функций. При этом  $\nabla$  следует применить сначала к первому сомножителю, считая второй постоянным (так что он может быть вынесен за знак  $\nabla$ ), а затем ко второму сомножителю, считая первый постоянным, и результаты сложить. Условимся сомножитель, на который  $\nabla$  в данном слагаемом не действует, отмечать нижним индексом «с»:

$$\nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(uv_c) = u \nabla v + v \nabla u$$

(в крайней правой части этих равенств индекс опускается, так как  $\nabla$  воздействует только на величину, стоящую *справа* от него),

$$(\nabla \cdot u\mathbf{a}) = (\nabla \cdot u_c \mathbf{a}) + (\nabla \cdot u\mathbf{a}_c) = u(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\nabla u \cdot \mathbf{a}),$$

$$(\nabla \times u\mathbf{a}) = (\nabla \times u_c \mathbf{a}) + (\nabla \times u\mathbf{a}_c) = u(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla u \times \mathbf{a}),$$

Первая из приведенных здесь формул есть формула (14) для градиента произведения, а последующие можно представить в виде

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}), \quad (45)$$

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u \times \mathbf{a}]. \quad (46)$$

Теперь обратимся к действию  $\nabla$  на произведения  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ ,  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Из них получаются три различающихся объекта

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), & (\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) &= \operatorname{div} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \\ & & [\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] &= \operatorname{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \end{aligned} \quad (47)$$

Наиболее просто раскрывается структура среднего из них

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) = (\nabla \cdot [\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}]) + (\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c]).$$

Здесь достаточно воспользоваться круговой перестановкой сомножителей в смешанных произведениях правой части

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}]) = (\mathbf{a}_c \cdot [\mathbf{b} \times \nabla]) = -(\mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathbf{b}]),$$

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c]) = (\mathbf{b}_c \cdot [\nabla \times \mathbf{a}]) = (\mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}]).$$

В результате получим

$$(\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]) = (\mathbf{b} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}]) - (\mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathbf{b}]), \quad \text{т. е.}$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}). \quad (48)$$

Для следующего объекта

$$[\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] = [\nabla \times [\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}]] + [\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c]]$$

каждое слагаемое правой части распишем по правилу (6) вычисления двойного векторного произведения, а затем осуществим необходимую перестановку сомножителей так, чтобы *только переменная* величина оказывалась правее  $\nabla$ . Эту процедуру продемонстрируем на первом слагаемом, где переменной величиной является  $\mathbf{b}$ :

$$[\nabla \times [\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}]] = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}_c - (\nabla \cdot \mathbf{a}_c)\mathbf{b} = \mathbf{a}_c(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b} = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}.$$

Вместе с аналогичным вторым слагаемым они приводят к результату

$$[\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b},$$

эквивалентному тождеству

$$\operatorname{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}. \quad (49)$$

Обратим внимание, что в составе  $\operatorname{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$  появились слагаемые  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$ , определяемые незнакомым пока оператором типа  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)$  в виде скалярного произведения истинного вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\nabla$ , стоящий *справа* от  $\mathbf{a}$ . Смысл этого оператора будет выяснен позже. А перед этим вернёмся к последнему из объектов (47)  $\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , в составе которого названный выше оператор также появляется.

Итак, обращаемся к равенству

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) \quad (50)$$

Чтобы комплекс  $\nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b})$  из правой части ( 50 ) привести к нужному виду с переменным вектором  $\mathbf{b}$ , расположенным непосредственно за оператором  $\nabla$ , возьмём следующее двойное векторное произведение и его разложение

$$[\mathbf{a}_c \times [\nabla \times \mathbf{b}]] = \underbrace{\nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b})} - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b}.$$

Здесь выделенное слагаемое есть интересующий нас комплекс, а другие элементы равенства имеют требуемую форму. Отсюда получаем

$$\nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}]] + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}.$$

Выражение

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) = \nabla(\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{a}) = [\mathbf{b} \times [\nabla \times \mathbf{a}]] + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

для второго слагаемого ( 50 ) очевидно. Следовательно, искомая формула приобретает вид

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}. \quad (51)$$

4. Чтобы понять физический смысл оператора  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)$ , ( $\mathbf{a}$  — постоянный вектор), подействуем им на векторное поле  $\mathbf{b}$  в точке  $P$  и результат представим в виде

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \left( a_x \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} \right) \Big|_P. \quad (52)$$

Отсюда видно, что рассматриваемая величина зависит от пространственных производных поля  $\mathbf{b}$  в точке  $P$ . Если вектор  $\mathbf{a}$  зададим его длиной  $|\mathbf{a}|$  и направляющими косинусами в виде  $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z)$ , то соотношение ( 52 ) приобретает вид

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = |\mathbf{a}| (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z) \mathbf{b}.$$

Вспомнив (см. формулу ( 7 )), что скобка в этом равенстве представляет собой производную  $\partial/\partial l$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$ , результат применения оператора  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)$  к полю  $\mathbf{b}$  можем представить в виде

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l}. \quad (53)$$

По этой причине векторная величина  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$  называется *производной вектора  $\mathbf{b}$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$* .

В заключение заметим, что в справедливости всех инвариантных результатов, полученных здесь при помощи символического оператора (35), можно убедиться, подставляя в них соответствующие выражения, имеющиеся в декартовой системе координат.

## Приложение В

# Закон сохранения и плотность импульса электромагнитного поля

1. Если поле обладает энергией, то, очевидно, оно обладает и импульсом. Для его определения необходимо обратиться к изучению силового воздействия электромагнитного поля на материальную среду и воспользоваться законом сохранения импульса.

Вспомним, что даже в случае стационарных полей сила, действующая на среду со стороны поля (см. § 2.10, § 6.13), кроме плотности заряда и протекающего по материалу тока, зависит от его свойств  $\epsilon, \mu$ . В случае произвольно меняющихся полей единственной материальной средой, на которую электромагнитное поле действует известной нам силой, является система свободных зарядов. Если  $\rho, \mathbf{j}$  — объёмные плотности заряда и тока, характеризующие систему, то объёмная плотность этой силы (силы Лоренца) выражается формулой

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]. \quad (\text{В.1})$$

Поэтому для проведения мысленного эксперимента по силовому воздействию поля на материальную среду мы примем систему из электромагнитного поля с находящимся в нем сгустком заряженных частиц, занимающих ограниченную область пространства. Наличие вещества с сопутствующими ему связанными зарядами и молекулярными токами в этой области пространства исключается. Тогда суммарная сила

$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dv$ , действующая на заряды сгустка, определяет скорость изменения суммарного механического импульса рассматриваемых частиц:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_V \mathbf{f} dv, \quad (\text{B.2})$$

где объём интегрирования  $V$  выбран таким, что весь сгусток сосредоточен внутри этой области и ее границу  $S$  заряды не пересекают.

2. Очевидно, что в этом случае скорость изменения суммарного импульса, равного  $\mathbf{P} + \mathbf{G}$ , где  $\mathbf{G}$  — импульс электромагнитного поля в объеме  $V$ , будет определяться только потоком импульса электромагнитного поля через замыкающую поверхность  $S$ . Обозначив тензор плотности потока импульса через  $-T_{ik}^1$ , закон сохранения  $i$ -ой компоненты импульса можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(P_i + G_i) = \oint_S T_{ik} n_k ds, \quad (\text{B.3})$$

Следовательно, чтобы определить искомые выражения для плотности импульса электромагнитного поля  $\mathbf{g}$  и тензора  $T_{ik}$ , необходимо так преобразовать выражение (B.1) для плотности силы  $\mathbf{f}$ , чтобы, в результате, соотношение (B.2) привелось к виду, соответствующему равенству (B.3).

3. Приступим к поэтапному решению этой задачи.

а). Начнём с того, что  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ , входящие в (B.1), из неоднородных уравнений Максвелла заменим выражениями

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

и, как результат, получим

$$\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right] \right).$$

Последнее слагаемое в этом выражении преобразуем, попутно используя еще одно из уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] - [\mathbf{E} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] =$$

<sup>1</sup>Напомним, что объяснение смысла компонент тензора можно найти, например, в §2.11 данного Пособия.

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}],$$

а к первому слагаемому прибавив член  $\mathbf{B} \text{ div } \mathbf{B}$ , тождественно равный нулю. В результате выражение (B.1) для  $\mathbf{f}$  приобретёт вид

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E} - [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}] \right) + \left( \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{B} - [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] \right) \right\}. \quad (\text{B.4})$$

б). В качестве второго шага слагаемое  $(1/4\pi)\{ \}$  правой части (B.4) приведем к дивергенции тензора натяжений  $T_{ik}$ . Заметив, что рассматриваемое выражение складывается из двух однотипных составляющих, займёмся преобразованием одного из них. Возьмём какую-либо его декартову компоненту, например,  $x$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E} - [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}])_x &= E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \\ &- E_y \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + E_z \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

и осуществим обозначенную подчёркиваниями перегруппировку. Результат приведём к виду

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} E^2 + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z);$$

отсюда видно, что для произвольной  $i$ -ой компоненты в тензорной записи имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{ div } \mathbf{E} - [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}])_i &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} (E_i E_k) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение справедливо для второго слагаемого. Таким образом,  $i$ -ая компонента полного выражения  $(1/4\pi)\{ \}$  имеет дивергентный вид:

$$\frac{1}{4\pi} \left\{ \right\}_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k},$$

в котором тензор натяжений определён выражением

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right), \quad (\text{B.5})$$



причем  $T_{ik} = T_{ki}$ . Как видно из полученного выражения, тензор  $T_{ik}$  для произвольного переменного электромагнитного поля складывается из двух частей, отвечающих, соответственно, отдельно электрическому и отдельно магнитному полю. Каждый из этих вкладов совпадает с тем, который получается для стационарного электрического (или магнитного) поля в случае среды, не обладающей диэлектрическими и магнитными свойствами (см. результаты §§ 2.11, 6.14).

в). Введём обозначение

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (\text{B.6})$$

и векторное равенство (B.4) запишем в виде

$$f_i = -\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (\text{B.7})$$

Проинтегрировав последнее соотношение по объёму  $V$ , получаем интегральный закон сохранения (B.3), в котором суммарный импульс электромагнитного поля определён как

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dv,$$

причём плотность импульса определяется выражением (B.6).

В заключение соотношение (B.3) воспроизведём в векторном виде

$$\int_V \mathbf{f} dv + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dv = \oint_S \mathbf{T}_n ds,$$

чтобы повторить замечание из конца § 2.11 о неэквивалентности электромагнитных натяжений пондеромоторным силам в случае переменных электромагнитных полей. Как видно из приведенного выражения, разница между ними обусловлена изменением суммарного импульса электромагнитного поля в рассматриваемом объёме.

## Библиографический список

*Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.

*Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Современная электродинамика. Москва, Ижевск, 2003.

*Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970.

*Бутиков Е.И.* Оптика. — М.: Высш. шк., 1986.

*Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975.

*Гинзбург И. Ф., Погосов А. Г.* Электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2010.

*Джэксон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Физматлит, 2001.

*Ландсберг Г. С.* Оптика. — М.: Наука, 1976.

*Матвеев А.Н.* Оптика. — М.: Высш. шк., 1985.

*Меледин Г.В., Черкасский В. С.* Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009.

*Мешков И. Н., Чириков Б. В.* Электромагнитные волны и оптика. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. Ч. 2.

*Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1996. Т. 3. Ч. 2.

*Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1957.

*Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. М.: Высш. шк., 1980.

*Фейнман Р. и др.* Фейнмановские лекции по физике. — / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М.: Мир, 1966. Т. 5—7.

*Фриш С. Э., Тиморева А. В.* Курс общей физики. — М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1957. Т. 3.