

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
Кафедра общей физики

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ  
ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ПО  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ 2020–2022 гг.**

Учебное пособие

Новосибирск  
2022

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

Э 360

Э 360 Экзаменационные и олимпиадные варианты задач по электродинамике 2020–2022 гг. : учеб. пособ. / В. И. Яковлев, А. Г. Погосов, С. Л. Сеницкий и др.; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. – 115 с.

ISBN XXX-X-XXXX-XXXX-X

В учебном пособии собраны задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на письменных контрольных и экзаменационных работах по электродинамике в 2020–2022 гг.

Предназначено для студентов-физиков, информатиков и геофизиков НГУ.

ББК В313 я 73-4

УДК 537 (075.8)

© Новосибирский государственный университет, 2021

© В. И. Яковлев, А. Г. Погосов,  
С. Л. Сеницкий, Л. С. Брагинский,  
В. А. Володин, А. В. Зайцев,  
М. И. Захаров, Е. Ю. Жданов,  
Д. М. Казанцев, П. В. Калинин,  
М. С. Котельникова, Д. А. Максимов,  
П. Л. Новиков, Д. А. Похабов,  
Е. С. Сандалов, А. А. Симонов,  
В. Д. Степанов, О. А. Шушаков, 2022

ISBN xxx-x-xxxx-xxxx-x

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Условия задач</b>	<b>6</b>
2020/2021 учебный год . . . . .	6
Контрольная работа 1.1, вар. 1 . . . . .	6
Контрольная работа 1.1, вар. 2 . . . . .	7
Контрольная работа 1.2 . . . . .	8
Экзаменационная работа 1 . . . . .	9
Контрольная работа 2.1, вар. 1 . . . . .	11
Контрольная работа 2.1, вар. 2 . . . . .	12
Контрольная работа 2.2, вар. 1 . . . . .	13
Контрольная работа 2.2, вар. 2 . . . . .	14
Экзаменационная работа 2 . . . . .	15
2021/2022 учебный год . . . . .	18
Контрольная работа 1.1, вар. 1 . . . . .	18
Контрольная работа 1.1, вар. 2 . . . . .	19
Контрольная работа 1.2, вар. 1 . . . . .	20
Контрольная работа 1.2, вар. 2 . . . . .	22
Экзаменационная работа 1 . . . . .	23
Контрольная работа 2.1, вар. 1 . . . . .	25

---

Контрольная работа 2.1, вар. 2 . . . . .	26
Контрольная работа 2.2, вар. 1 . . . . .	27
Контрольная работа 2.2, вар. 2 . . . . .	29
Экзаменационная работа 2 . . . . .	30
<b>Решения</b>	<b>34</b>
2020/2021 учебный год . . . . .	34
Контрольная работа 1.1, вар. 1 . . . . .	34
Контрольная работа 1.1, вар. 2 . . . . .	37
Контрольная работа 1.2 . . . . .	39
Экзаменационная работа 1 . . . . .	46
Контрольная работа 2.1, вар. 1 . . . . .	57
Контрольная работа 2.1, вар. 2 . . . . .	62
Контрольная работа 2.2, вар. 1 . . . . .	64
Контрольная работа 2.2, вар. 2 . . . . .	68
Экзаменационная работа 2 . . . . .	70
2021/2022 учебный год . . . . .	75
Контрольная работа 1.1, вар. 1 . . . . .	75
Контрольная работа 1.1, вар. 2 . . . . .	79
Контрольная работа 1.2, вар. 1 . . . . .	81
Контрольная работа 1.2, вар. 2 . . . . .	85
Экзаменационная работа 1 . . . . .	87
Контрольная работа 2.1, вар. 1 . . . . .	93
Контрольная работа 2.1, вар. 2 . . . . .	97
Контрольная работа 2.2, вар. 1 . . . . .	100
Контрольная работа 2.2, вар. 2 . . . . .	104
Экзаменационная работа 2 . . . . .	106
<b>Список литературы</b>	<b>115</b>

# Предисловие

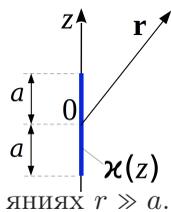
Потребность в данном издании возникла в связи с введением на физическом факультете НГУ письменного экзамена, ставшего позднее и теоретическим туром студенческой олимпиады. Задачи для вариантов отбирались всеми преподавателями, ведущими курс. Необходимые 6–7 задач выбирались из большого числа предлагаемых на конкурсной основе и оценивались в баллах в зависимости от трудности: очень легкие – 1–2 балла, очень трудные – 6–7 баллов. Границы оценок устанавливались в баллах в зависимости от набора задач в варианте.

При оценивании решения предусмотрена оценка-автомат «отлично». Дело в том, что при сдаче устного экзамена учитываются результаты письменного. Получивший на письменном экзамене оценку-автомат «отлично» освобождается от устного экзамена, и ему выставляется итоговая оценка «отлично» в том случае, если студент написал работу на ступень выше «пятерки». При этом обязательным условием является получение оценки «отлично» за работу в семестре. Студенты, набравшие наибольшее количество баллов, становятся призерами олимпиады. Их работы отмечаются деканатом физического факультета.

# Условия задач

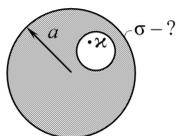
2020/2021 учебный год

## Контрольная работа 1.1, вариант 1



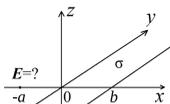
### Задача 1

Тонкая нить ( $x=0, y=0, -a \leq z \leq a$ ) заряжена линейной плотностью заряда  $\kappa(z) = \kappa_0 z^3/a^3$ . Найти потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  на расстояниях  $r \gg a$ . (3 б.)



### Задача 2

Бесконечно длинная тонкая нить, равномерно заряженная с линейной плотностью  $\kappa$ , протянута внутри цилиндрической полости в незаряженном проводящем бесконечно длинном цилиндре радиуса  $a$ . Оси нити, полости и цилиндра параллельны. Найти плотность зарядов на внешней поверхности цилиндра. (3 б.)



### Задача 3

Бесконечная по координате  $y$  полоса ( $z = 0, 0 \leq x \leq b$ ) однородно заряжена с по-

верхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке  $(-a; 0; 0)$ . (4 б.)

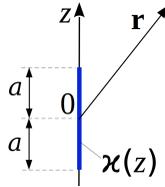
#### Задача 4

Сфера радиуса  $a$  заряжена поверхностным зарядом, плотность которого зависит от угла как  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$ . Найти потенциал  $\varphi(r, \theta)$  во всем пространстве. (5 б.)

### Контрольная работа 1.1, вариант 2

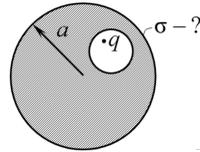
#### Задача 1

Тонкая нить ( $x=0, y=0, -a \leq z \leq a$ ) заряжена линейной плотностью заряда  $\kappa(z) = \kappa_0 \sin \pi z/a$ . Найти потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  на расстояниях  $r \gg a$ . (3 б.)



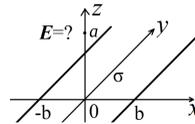
#### Задача 2

Точечный заряд  $q$  расположен внутри сферической полости в незаряженном проводящем шаре радиуса  $a$ . Найти плотность зарядов на внешней поверхности шара. (3 б.)

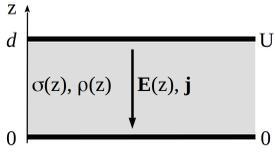


#### Задача 3

Бесконечная по координате  $y$  полоса ( $z = 0, -b \leq x \leq b$ ) однородно заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке  $(0; 0; a)$ . (4 б.)

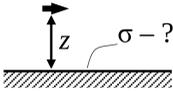


## Контрольная работа 1.2



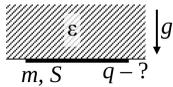
### Задача 1

Найти установившуюся плотность свободного заряда  $\rho_{\text{своб}}(z)$  в плоском конденсаторе. Расстояние между пластинами  $d$  (краевыми эффектами пренебречь), разность потенциалов между пластинами  $U$ . Конденсатор заполнен материалом, удельная проводимость которого зависит от  $z$  как  $\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{1+z^2/d^2}$ . (3 б.)



### Задача 2

Точечный диполь  $\mathbf{d}$  закреплен на расстоянии  $h$  от плоской границы проводника. Найти распределение поверхностной плотности  $\sigma$  индуцированного заряда на границе, если  $\mathbf{d}$  параллелен границе. (4 б.)

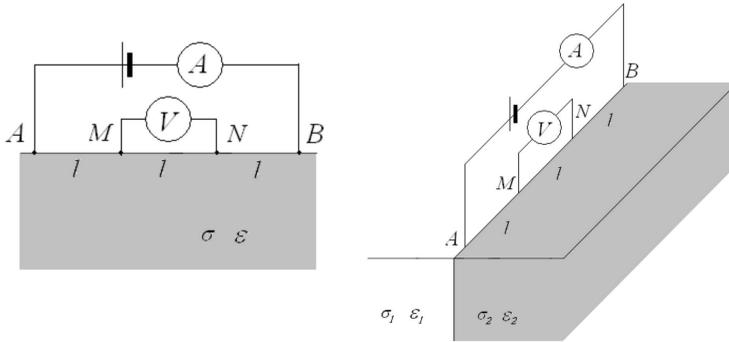


### Задача 3

К плоской горизонтальной границе диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ , занимающего верхнее полупространство, поднесли проводящую пластину площадью  $S$  и массой  $m$ . Какой минимальный заряд следует сообщить пластине, чтобы она не упала? Ускорение свободного падения  $g$ . (4 б.)

### Задача 4

Четыре электрода расположены на горизонтальной границе проводящего полупространства с удельной проводимостью  $\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . В точках А и В подключен источник тока, а в точках М и N измеряется напряжение. Найти «кажущееся» сопротивление



$R^* = U_{MN}/I_{AB}$ , если  $AM=MN=NB=l$  и лежат на одной прямой (схема Веннера, левый рис.) (3 б.). Что будет, если проводящее полупространство разделено вертикальной границей на две области с удельной проводимостью  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  так, что электроды расположены вдоль границы раздела (правый рис)? Проверить ответ при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  (+3 б.).

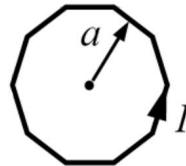
## Экзаменационная работа 1

### Задача 1

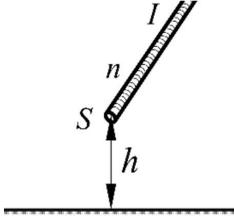
По замкнутому сверхпроводящему соленоиду радиуса  $a$  с сердечником радиуса  $b < a$  (на всю длину соленоида) и магнитной проницаемостью  $\mu$  течет ток  $I$ . Каким станет ток, если сердечник вынуть? Краевыми эффектами на торцах соленоида пренебречь. (3 б.)

### Задача 2

Найти магнитное поле в центре контура с током  $I$ , имеющего форму правильно-

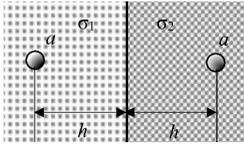


го  $n$ - угольника, если расстояние от центра до середины его сторон равно  $a$ . (4 б.)



### Задача 3

Конец полубесконечного соленоида сечением  $S$ , с равномерной намоткой плотности  $n$ , по которой течет постоянный ток  $I$ , расположен на расстоянии  $h \gg \sqrt{S}$  от плоской границы сверхпроводника. Найти распределение токов на поверхности сверхпроводника. (4 б.)

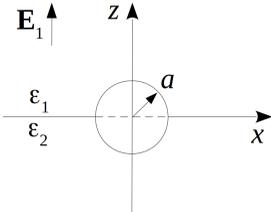


### Задача 4

Два одинаковых идеально проводящих шарика радиуса  $a$  расположены на одинаковом расстоянии  $h \gg a$  по разные стороны от плоской границы раздела двух сред с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  так, что прямая, соединяющая центры шариков перпендикулярна границе раздела. Найти сопротивление между шариками. (4 б.)

### Задача 5

Внутрь длинного соленоида сечением  $S$  с числом витков  $N$  индуктивностью  $L$  вносят шарик радиуса  $a \ll \sqrt{S}$  с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти изменение индуктивности  $\Delta L$ , считая, что шар находится вдали от витков и торцов соленоида и краевыми эффектами можно пренебречь. (5 б.)



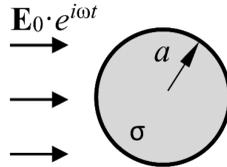
### Задача 6

Металлический шар радиуса  $a$  помещен на плоскую границу раздела двух диэлектриков с диэлектри-

ческими проницаемостями  $\epsilon_1$  (верхнее полупространство) и  $\epsilon_2$  (нижнее полупространство) так, что центр шара совпадает с границей раздела диэлектриков  $z = 0$  и находится в точке начала координат ( $x = 0, y = 0$ ). Система помещена во внешнее поле, направленное нормально к границе раздела, так, что электрическое поле вдали от шара и границы раздела однородно, а его напряженность в диэлектрике  $\epsilon_1$  равна  $E_1$ . Определить напряженность электрического поля и его индукцию во всем пространстве. (5 б.)

### Задача 7

Шар радиуса  $a$  с проводимостью  $\sigma$  помещен в однородное переменное электрическое поле  $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ . В приближении слабого скин-эффекта, т. е. считая частоту малой ( $\omega \ll \frac{c^2}{2\pi\sigma a^2}$ ), найти среднюю мощность тепловыделения в шаре. (6 б.)



## Контрольная работа 2.1, вариант 1

### Задача 1

Плоская электромагнитная волна  $\mathbf{E} = (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$  ( $a$  и  $b$  – действительные числа,  $a > b > 0$ ), распространяющаяся вдоль оси  $z$ , падает на полярOID, расположенный в плоскости  $(xy)$ . Под каким углом к оси  $x$  необходимо сориентировать направление пропускания полярOIDа для того, чтобы интенсивность прошедшей волны была минимальной? (2 б.)

### Задача 2

Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией падает на границу раздела двух сред под углом

Брюстера, равным  $\theta_2 = 75^\circ$ . Найти коэффициент отражения  $R$  по интенсивности. (3 б.)

### Задача 3

В процессе прохождения одномерного волнового пакета, движущегося вдоль оси  $z$  в однородной среде с дисперсией  $\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0)$ , в плоскости  $z = 0$  был зарегистрирован частотный спектр поля  $E(\omega) = a e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$ . Найти электрическое поле пакета  $E(z, t)$  в произвольный момент времени. (4 б.)

### Задача 4

В пустой волновод квадратного сечения со стороной  $a$  запустили волну в моде  $E_{34}$  с частотой  $\omega = 4.999\frac{\pi c}{a}$ . На каком расстоянии  $l$  амплитуда колебаний волны уменьшится в  $e$  раз? (4 б.)

## Контрольная работа 2.1, вариант 2

### Задача 1

Плоская электромагнитная волна  $\mathbf{E} = (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$  ( $a$  и  $b$  – действительные числа,  $a > b > 0$ ), распространяющаяся вдоль оси  $z$ , падает на поляризатор, расположенный в плоскости  $(xy)$ . Под каким углом к оси  $x$  необходимо ориентировать направление пропускания поляризатора для того, чтобы интенсивность прошедшей волны была максимальной? (2 б.)

### Задача 2

Плоская монохроматическая волна падает под углом Брюстера из воздуха на плоскую границу среды с показателем преломления  $n$ . Найти угол преломления  $\theta_2$ . (3 б.)

### Задача 3

В процессе прохождения одномерного волнового пакета, движущегося вдоль оси  $z$  в однородной среде с дисперсией  $\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0)$ , в плоскости  $z = 0$  был зарегистрирован частотный спектр поля  $\hat{E}_\omega = \begin{cases} a, & \text{при } |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega, \\ 0, & \text{при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega \end{cases}$ .  
Найти электрическое поле пакета  $E(z, t)$  в произвольный момент времени. (4 б.)

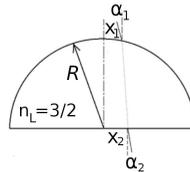
### Задача 4

В пустой волновод квадратного сечения со стороной  $a$  запустили волну в моде  $H_{12}$ . На расстоянии  $l = \frac{10a}{\pi}$  амплитуда колебаний волны уменьшается в  $e$  раз. Чему равна частота волны? (4 б.)

## Контрольная работа 2.2, вариант 1

### Задача 1

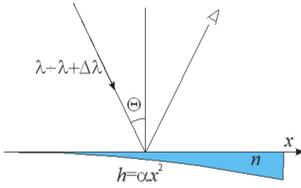
Луч входит в стеклянное полушарие радиуса  $R$  (показатель преломления  $n_L = 3/2$ ) под малым углом  $\alpha_1 \ll 1$  на расстоянии  $x_1 \ll R$  от оптической оси (см. рисунок). Найти, под каким углом  $\alpha_2$  и на каком расстоянии  $x_2$  луч выйдет из полушария. (3 б.)



### Задача 2

Монохроматический источник света расположен вдали от непроницаемого экрана с круглым отверстием на оси симметрии. В точке Р на оси вдали за экраном наблюдается максимум интенсивности света. Источник пододвигают в два раза ближе к экрану и максимум монотонно сменяется минимумом. Затем точку Р отодвигают в два раза дальше

от экрана и минимум монотонно сменяется максимумом. Найти число открытых зон Френеля в начальном положении. (4 б.)



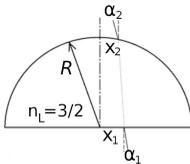
### Задача 3

На прозрачный клин с толщиной  $h(x) = \alpha x^2$ , изготовленный из материала с показателем преломления  $n$ , под углом  $\theta$  к нормали падает плоская квазимонохроматическая волна со спектром длин волн в диапазоне  $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$ . Оценить размер интерференционной картины, наблюдаемой глазом на поверхности клина. (4 б.)

### Задача 4

На экран, имеющий две параллельные тонкие щели (схема Юнга), перпендикулярно его плоскости падает монохроматическая плоская циркулярно-поляризованная волна левой поляризации  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ . При этом на другом экране, расположенном вдали от щелей, наблюдается интерференционная картина. Потом, в верхнюю щель поместили фазоинвертор (тонкую полуволновую пластину, которая, не изменяя общую фазу волны  $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ , изменяет направление ее циркулярной поляризации на противоположное). Определите видность интерференционной картины до и после вставки фазоинвертора. (4 б.)

## Контрольная работа 2.2, вариант 2



### Задача 1

Луч входит в стеклянное полушарие радиуса  $R$  (показатель преломления  $n_L =$

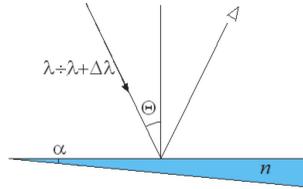
$= 3/2$ ) под малым углом  $\alpha_1 \ll 1$  на расстоянии  $x_1 \ll R$  от оптической оси (см. рисунок). Найти, под каким углом  $\alpha_2$  и на каком расстоянии  $x_2$  луч выйдет из полушария. (3 б.)

### Задача 2

Монохроматический источник света расположен вдали от непрозрачного экрана с круглым отверстием на оси симметрии. В точке Р на оси вдали за экраном наблюдается минимум интенсивности света. Источник отодвигают в 3 раза дальше от экрана и минимум монотонно сменяется максимумом. Затем точку Р пододвигают в 1.4 раза ближе к экрану и максимум монотонно сменяется минимумом. Найти число открытых зон Френеля в начальном положении. (4 б.)

### Задача 3

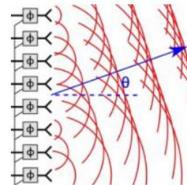
На прозрачный клин с углом при вершине  $\alpha \ll 1$ , изготовленный из материала с показателем преломления  $n$ , под углом  $\theta$  к нормали падает плоская квазимонохроматическая волна со спектром длин волн в диапазоне  $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$ . Оценить размер интерференционной картины, наблюдаемой глазом на поверхности клина. (4 б.)



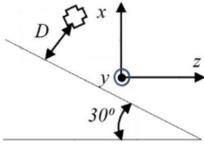
## Экзаменационная работа 2

### Задача 1

Фазовая решетка антенн в сетях 5G работает на несущей частоте 30 ГГц, расстояние между антеннами 1 см. Определить какой минимальный сдвиг по фазе



$\Delta\phi$  должен быть между токами в соседних антеннах для того, чтобы максимальная интенсивность сигнала распространялась под углом  $\theta$  от нормали к решетке. (3 б.)



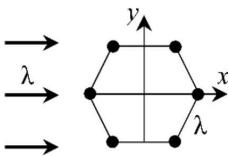
### Задача 2

Угол наклона идеальной зеркальной крыши составляет  $30^\circ$  от направления распространения ЭМ волны от передатчика, удаленного на бесконечность вдоль оси  $z$ . Как следует ориентировать и на каком минимальном расстоянии  $D$  от крыши расположить штыревую антенну для обеспечения оптимального приема, если ЭМ волна поляризована по оси  $y$ ? Длина волны передатчика  $\lambda$ . (3 б.)



### Задача 3

Два одинаковых точечных синфазных диполя, излучающих с длиной волны  $\lambda$ , лежат на оси  $z$  на расстоянии  $\lambda/6$  друг от друга. Оси диполей находятся в одной плоскости, но ось нижнего перпендикулярна оси  $z$ , а верхнего – составляет с ней угол  $\alpha$ . Во сколько раз увеличится интенсивность излучения вдоль оси  $z$ , если угол  $\alpha$  увеличить с  $30^\circ$  до  $60^\circ$ ? (4 б.)

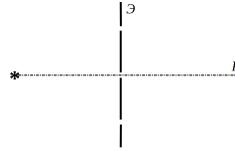


### Задача 4

Плоская линейно поляризованная ЭМ волна с длиной волны  $\lambda$  (электрическое поле волны параллельно оси  $z$ ) падает вдоль оси  $x$  на систему одинаковых зарядов, расположенных в вершинах правильного шестиугольника со стороной  $\lambda$ , лежащего в плоскости  $xy$ , и главной осью, лежащей на оси  $x$ . Найти отношение  $I_x/I_y$  интенсивностей света, рассеянного вдоль осей  $x$  и  $y$ . (4 б.)

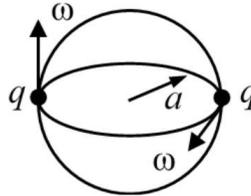
**Задача 5**

На большом расстоянии от точечного монохроматического источника света находится плоский экран. В экране сделаны три одинаковых точечных отверстия, расположенные на одной прямой на одинаковом небольшом расстоянии друг от друга. Ось, проходящая через источник и центральную щель, перпендикулярна экрану. Измеряют интенсивность в точке  $P$ , расположенной на оси далеко за экраном (см. рис.). Вначале было открыто только центральное отверстие, а остальные закрыты. После того как открыли еще и верхнее отверстие, интенсивность света в точке  $P$  не изменилась. Найти во сколько раз изменится интенсивность в точке  $P$ , после того как откроют еще и нижнее отверстие. (5 б.)



**Задача 6**

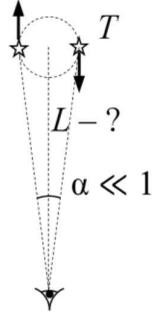
Два точечных заряда  $q$  вращаются с одинаковой частотой  $\omega$  вокруг общего центра по окружностям радиуса  $a$ , лежащим в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, стартуя из диаметрально противоположных точек. Определить направление, соответствующее минимальному излучению, а также усредненное по времени угловое распределение  $\langle dI/d\Omega \rangle$  мощности излучения как функцию угла  $\theta$ , отсчитанного от этого направления. (4 б.)



**Задача 7**

Две одинаковые звезды, вращающиеся с периодом  $T$  вокруг общего центра масс, образуют двойную звезду. Радиус-вектор, проведенный из точки наблюдения в двойную звезду

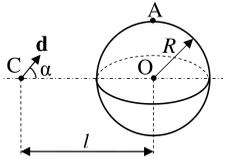
ду, лежит в плоскости ее орбиты, а ее угловой размер равен  $\alpha$ , ( $\alpha \ll 1$ ). При наблюдении отдельных компонент двойной



звезды регистрируется синее и красное смещение спектра их изучения. Отношение частот, соответствующих характерным линиям излучения звезд с учетом синего и красного смещения, известно и равно  $k = \frac{\omega + \Delta\omega}{\omega - \Delta\omega}$ . Найти расстояние  $L$  до двойной звезды, выразив его через заданные величины  $T$ ,  $\alpha$ ,  $k$  и скорость света  $c$ . Движением центра масс двойной звезды относительно наблюдателя пренебречь. (5 б.)

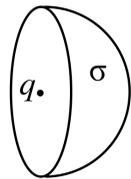
## 2021/2022 учебный год

### Контрольная работа 1.1, вариант 1



#### Задача 1

На расстоянии  $l$  от центра проводящей незаряженной сферы радиуса  $R < l$  расположен точечный диполь с дипольным моментом  $\mathbf{d}$ , ориентированным под углом  $\alpha$  к прямой  $OC$  (см. рис.). Найти потенциал в точке  $A$ , если потенциал на бесконечности равен нулю. (3 б.)

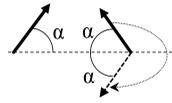


#### Задача 2

Найти силу, действующую на точечный заряд  $q$ , расположенный в центре полусферы, равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ . (4 б.)

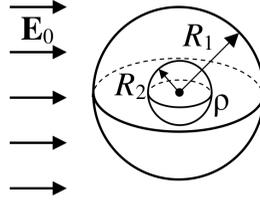
### Задача 3

Два постоянных точечных диполя расположены в одной плоскости, как показано на рисунке. Во сколько раз изменится потенциальная энергия взаимодействия диполей, если один из диполей повернуть (см. рис.)? Угол  $\alpha$ , указанный на рисунке, равен  $45^\circ$ . (4 б.)



### Задача 4

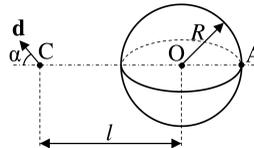
Изолированная проводящая незаряженная сферическая оболочка радиуса  $R_1$  помещена во внешнее, исходно однородное, электрическое поле  $\mathbf{E}_0$ . В центре оболочки находится непроводящий шар радиуса  $R_2$ , равномерно заряженный с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Найти распределение электрического потенциала  $\varphi$  во всем пространстве (4 б.) и распределение плотности заряда на внутренней поверхности оболочки (+1 б.)



## Контрольная работа 1.1, вариант 2

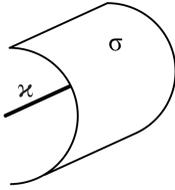
### Задача 1

На расстоянии  $l$  от центра проводящей незаряженной сферы радиуса  $R < l$  расположен точечный диполь с дипольным моментом  $\mathbf{d}$ , ориентированным под углом  $\alpha$  к прямой  $OC$  (см. рис.). Найти потенциал в точке  $A$ , если потенциал на бесконечности равен нулю. (3 б.)



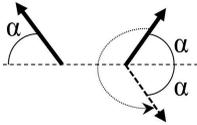
### Задача 2

На оси равномерно заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma$  бесконечно длинного полуцилиндра расположена

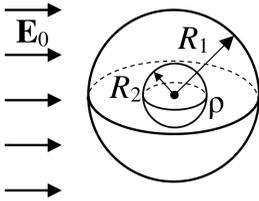


длинная нить, равномерно заряженная с линейной плотностью  $\kappa$ . Найти силу, действующую на единицу длины нити. (4 б.)

### Задача 3



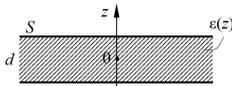
Два постоянных точечных диполя расположены в одной плоскости, как показано на рисунке. Во сколько раз изменится потенциальная энергия взаимодействия диполей, если один из диполей повернуть (см. рис.)? Угол  $\alpha$ , указанный на рисунке, равен  $60^\circ$ . (4 б.)



### Задача 4

Изолированная проводящая незаряженная сферическая оболочка радиуса  $R_1$  помещена во внешнее, исходно однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . В центре оболочки находится проводящий шар радиуса  $R_2$  с зарядом  $Q$ . Найти распределение электрического потенциала  $\varphi$  во всем пространстве (4 б.) и распределение плотности заряда на внешней поверхности оболочки (+1 б.).

## Контрольная работа 1.2, вариант 1



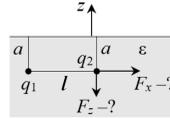
### Задача 1

Пространство между двумя плоскими проводящими пластинами площадью  $S$ , расположенными параллельно друг другу на расстоянии  $d$  ( $d \ll \sqrt{S}$ ), заполнено средой, диэлектрическая проницаемость которой меняется по  $\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_0}{\cos \frac{\pi z}{2d}}$ , где  $z$  отсчитывается от середины

ны конденсатора в направлении, перпендикулярном пластинам. Найти ёмкость конденсатора. (3 б.)

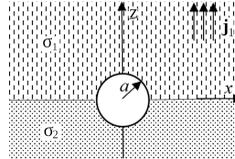
### Задача 2

Верхнее полупространство ( $z > 0$ ) пусто, а нижнее заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Внутри диэлектрика на одинаковом расстоянии  $a$  от его плоской границы и на расстоянии  $l$  друг от друга расположены точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Найти проекции силы, действующей на заряд  $q_2$ , на вертикальное ( $F_z$ ) и горизонтальное ( $F_x$ ) направления. (4 б.)



### Задача 3

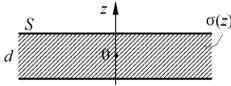
Идеально проводящий шар радиуса  $a$  помещен на плоскую границу раздела двух проводников с проводимостями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  так, что центр шара совпадает с границей раздела проводников  $z = 0$  и находится в точке начала координат  $(x, y) = (0, 0)$ . В системе течёт ток так, что линии тока вдали от шара и границы раздела направлены нормально к границе раздела, а плотность тока вдали от шара и границы раздела однородна и равна  $\mathbf{j}_1$  в проводнике с проводимостью  $\sigma_1$ . Определить напряженность электрического поля и плотность тока во всем пространстве. (5 б.)



### Задача 4

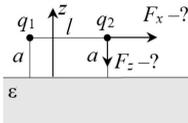
Заземление создается металлическим шаром радиуса  $a$ , закопанным на глубину  $h \gg a$ . Напряжение на шар подается через тонкий идеально проводящий изолированный от земли провод. На какую величину  $\Delta R$  изменится сопротивление такого заземления, если глубину залегания шара увеличить в 2 раза? Проводимость земли равна  $\sigma$ , проводимость воздуха равна нулю. (5 б.)

## Контрольная работа 1.2, вариант 2



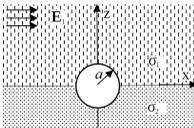
## Задача 1

Пространство между двумя плоскими проводящими пластинами площадью  $S$ , расположенными параллельно друг другу на расстоянии  $d$  ( $d \ll \sqrt{S}$ ), заполнено средой, проводимость которой меняется по  $\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{\cos \frac{\pi z}{2d}}$ , где  $z$  отсчитывается от середины сопротивления в направлении, перпендикулярном пластинам. Найти сопротивление между пластинами. (3 б.)



## Задача 2

Верхнее полупространство ( $z > 0$ ) пусто, а нижнее заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Над диэлектриком на одинаковом расстоянии  $a$  от его плоской границы и на расстоянии  $l$  друг от друга расположены точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Найти проекции силы, действующей на заряд  $q_2$ , на вертикальное ( $F_z$ ) и горизонтальное ( $F_x$ ) направления. (4 б.)



## Задача 3

Непроводящий шар радиуса  $a$  помещен на плоскую границу раздела двух проводников с проводимостями  $\sigma_1$  (верхнее полупространство) и  $\sigma_2$  (нижнее полупространство) так, что центр шара совпадает с границей раздела проводников  $z = 0$  и находится в точке начала координат  $(x, y) = (0, 0)$ . В системе течёт ток так, что линии тока вдали от шара и границы раздела направлены параллельно к границе раздела, а напряженность поля вдали от шара однородна и равна  $\mathbf{E}_1$  в проводнике с проводимостью  $\sigma_1$ . Определить

напряженность электрического поля и плотность тока во всем пространстве. (5 б.)

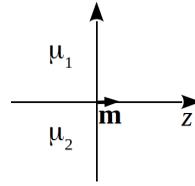
## Экзаменационная работа 1

### Задача 1

Найти индуктивность длинного соленоида круглого сечения радиуса  $a$ , с равномерной намоткой плотности  $n$ , длины  $l \gg a$ , если магнитная проницаемость его сердечника меняется по закону  $\mu(R) = 1 + \frac{R}{a}$ , где  $R$  – расстояние от оси соленоида. (3 б.)

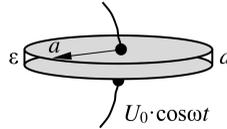
### Задача 2

Точечный диполь с магнитным моментом  $\mathbf{m}$  расположен на границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  так, что его магнитный момент параллелен плоскости границы. Найти вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  во всем пространстве. Начало системы координат совпадает с положением диполя (см. рис.). (3 б.)



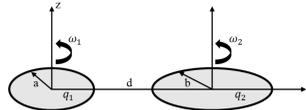
### Задача 3

К круглым обкладкам плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , приложено переменное напряжение  $U = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ . Расстояние между обкладками  $d$ . Найти магнитное поле в конденсаторе. Краевыми эффектами пренебречь. (4 б.)



### Задача 4

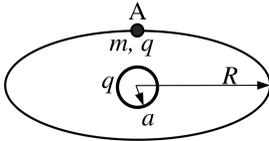
Два тонких диэлектрических диска с радиусами  $a$  и  $b$  равно-



мерно заряжены зарядами  $q_1$  и  $q_2$  и расположены в одной плоскости на расстоянии  $d \gg a, b$ . Найти разницу сил  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_\omega - \mathbf{F}_0$ .  $\mathbf{F}_0$  действует между неподвижными дисками,  $\mathbf{F}_\omega$  действует, когда они вращаются вокруг своих осей с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. (4 б.)

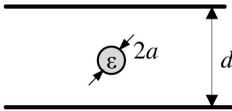
### Задача 5

Два одинаковых квадратных проволочных витка со стороной  $a$  расположены в одной плоскости на большом расстоянии  $l$  друг от друга ( $l \gg a$ ). Найти коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  этих витков. (4 б.)



### Задача 6

Маленькая бусинка массой  $m$ , заряженная зарядом  $q$ , может двигаться без трения вдоль горизонтально расположенной спицы, имеющей форму окружности радиуса  $R$ . В центре этой окружности расположено равномерно заряженное зарядом  $q$  тонкое кольцо, радиус которого  $a \ll R$ , а его плоскость перпендикулярна плоскости спицы (таким образом, кольцо расположено вертикально). Центры кольца и спицы совпадают. Бусинка покоится в точке спицы А (см. рис., вектор, проведённый из центра кольца в точку А, перпендикулярен плоскости кольца). Какую минимальную скорость необходимо сообщить бусинке для того, чтобы она вернулась в точку А, совершив полный оборот вокруг кольца вдоль спицы? (5 б.)



### Задача 7

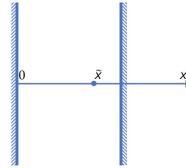
Найти изменение ёмкости плоского конденсатора  $\Delta C$  при внесении в него маленького диэлектрического шарика с проницаемостью  $\epsilon$ .

Радиус шарика  $a$  мал по сравнению с расстоянием от его центра до пластин конденсатора, расстояние между которыми  $d$ . Краевыми эффектами пренебречь, до внесения шарика конденсатор был пуст. (5 б.)

## Контрольная работа 2.1, вариант 1

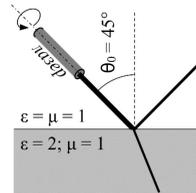
### Задача 1

В резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, возбуждена одна собственная мода с частотой  $\omega$ . Найти электрическое поле во всем объеме резонатора, если измеренное электрическое поле в некоторой плоскости  $x = \tilde{x}$  внутри него изменяется по следующему закону:  $\mathbf{E}(\tilde{x}, y, z, t) = a\mathbf{e}_z \cdot \cos \omega t + b\mathbf{e}_y \cdot \sin \omega t$ , где  $a$  и  $b$  – известные действительные величины ( $\frac{\omega \tilde{x}}{c} \neq m\pi$ , где  $m$  – целое число). (3 б.)



### Задача 2

Лазер излучает линейно поляризованный свет. Луч лазера направляют из воздуха на плоскую границу диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon = 2$  ( $\mu = 1$ ) под углом  $\theta_0 = 45^\circ$ . Найти отношение минимального и максимального коэффициента отражения по интенсивности  $\frac{R_{min}}{R_{max}}$  при повороте лазера вокруг своей оси. (4 б.)



### Задача 3

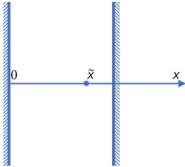
Плоская монохроматическая линейно поляризованная ЭМ волна падает по нормали на систему из двух проводящих бесконечно тонких параллельных плоскостей, для каждой из которых имеет место закон Ома  $J = \sigma^* E$ , где

$J$  – ток на единицу длины, а  $\sigma^*$  – соответствующая проводимость. Расстояние между плоскостями равно половине длины волны; вне плоскостей и между ними – вакуум. Найти отношение интенсивности волны, прошедшей через эту систему, к интенсивности падающей волны. (4 б.)

#### Задача 4

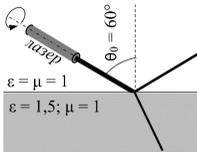
В пустой волновод с идеально проводящими стенками квадратного сечения  $3$  на  $3$  сантиметра запустили  $E_{11}$ -волну с фазовой скоростью  $\sqrt{3}c$ . Найти частоту этой волны в Герцах и её групповую скорость. (3 б.)

### Контрольная работа 2.1, вариант 2



#### Задача 1

В резонаторе, образованном двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, возбуждена одна собственная мода с частотой  $\omega$ . Найти магнитное поле во всем объеме резонатора, если измеренное магнитное поле в некоторой плоскости  $x = \tilde{x}$  внутри него изменяется по следующему закону:  $\mathbf{H}(\tilde{x}, y, z, t) = a\mathbf{e}_z \cdot \cos \omega t + b\mathbf{e}_y \cdot \sin \omega t$ , где  $a$  и  $b$  – известные действительные величины ( $\frac{\omega\tilde{x}}{c} \neq (m + 1/2)\pi$ , где  $m$  – целое число). (3 б.)



#### Задача 2

Лазер излучает линейно поляризованный свет. Луч лазера направляют из воздуха на плоскую границу диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon = 1.5$  ( $\mu = 1$ ) под углом  $\theta_0 = 60^\circ$ . Найти отношение минимального и максимального коэффициента

отражения по интенсивности  $\frac{R_{min}}{R_{max}}$  при повороте лазера вокруг своей оси. (4 б.)

### Задача 3

Плоская монохроматическая линейно поляризованная ЭМ волна падает по нормали на систему из двух проводящих бесконечно тонких параллельных плоскостей, для каждой из которых имеет место закон Ома  $J = \sigma^* E$ , где  $J$  – ток на единицу длины, а  $\sigma^*$  – соответствующая проводимость. Расстояние между плоскостями равно половине длины волны; вне плоскостей и между ними – вакуум. Найти отношение интенсивности волны, отраженной от этой системы, к интенсивности падающей волны. (4 б.)

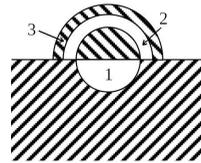
### Задача 4

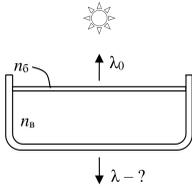
В пустой волновод с идеально проводящими стенками квадратного сечения 3 на 3 сантиметра запустили  $H_{10}$ -волну с фазовой скоростью  $\sqrt{2}c$ . Найти частоту этой волны в Герцах и её групповую скорость. (3 б.)

## Контрольная работа 2.2, вариант 1

### Задача 1

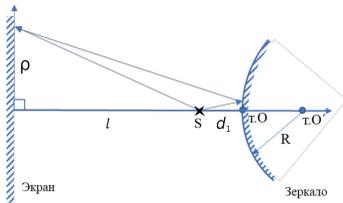
Между источником света  $S$  и точкой наблюдения  $P$  расположен экран, составленный из двух смежных полуплоскостей. Полуплоскости перпендикулярны линии  $SP$ , и их граница пересекает эту линию. В верхней полуплоскости открыты все зоны Френеля, кроме 1-й и 3-й, а в нижней — закрыты все зоны Френеля, кроме 1-й. Найти интенсивность  $I$  света в точке  $P$ , если в отсутствие экрана она равна  $I_0$ . (3 б.)





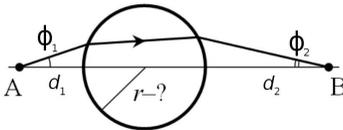
### Задача 2

Тонкий слой бензина ( $n_б = 1.4$ ) покрывает поверхность воды ( $n_в = 1.3$ ), налитой в прозрачную кювету. В эксперименте измеряется спектр отражения и пропускания слоя при освещении рассеянным солнечным светом. Регистрируется свет, отражённый и прошедший перпендикулярно поверхности. Оказалось, что в спектре отражения наблюдается единственный максимум в видимом диапазоне (от 380 нм до 780 нм), который приходится на длину волны  $\lambda_0 = 780$  нм (красный цвет). Определить на какую длину волны приходится максимум спектра пропускания в видимом диапазоне. Толщина слоя воды и стенок кюветы много больше длины когерентности света. (4 б.)



### Задача 3

Найти в параксиальном приближении радиусы светлых колец  $\rho_m$ , образованных на экране в результате интерференции волн от точечного монохроматического источника  $S$  с длиной волны  $\lambda_0$ , расположенного на расстоянии  $l$  от экрана и на расстоянии  $d_1$  от поверхности выпуклого сферического зеркала радиуса  $R$ . (4 б.)



### Задача 4

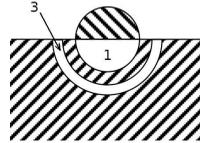
Точечный предмет  $A$  расположен на расстоянии  $d_1$  от поверхности прозрачного шара, а его действительное изображение в этом шаре  $B$  – на расстоянии  $d_2$  от поверхности шара. Найти радиус шара  $r$ ,

если известно, что луч, исходящий от предмета под малым углом  $\phi_1$  к прямой АВ, выходит из шара под углом  $\phi_2$  к этой прямой. (4 б.)

## Контрольная работа 2.2, вариант 2

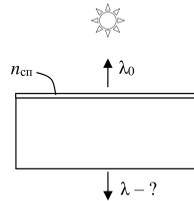
### Задача 1

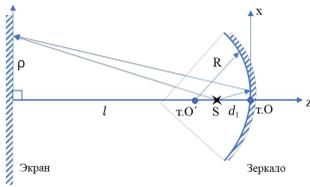
Между источником света S и точкой наблюдения P расположен экран, составленный из двух смежных полуплоскостей. Полуплоскости перпендикулярны линии SP, и их граница пересекает эту линию. В верхней полуплоскости открыты все зоны Френеля, кроме 1-й, а в нижней – закрыты все зоны Френеля, кроме 1-й и 3-й. Найти интенсивность  $I$  света в точке P, если в отсутствие экрана она равна  $I_0$ . (3 б.)



### Задача 2

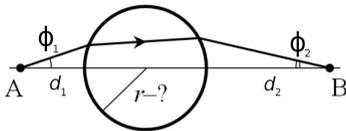
Поверхность стекла ( $n_{ст}=1.5$ ) смочена тонким слоем спирта ( $n_{сп}=1.36$ ). В эксперименте измеряется спектр отражения и пропускания слоя спирта при освещении рассеянным солнечным светом. Регистрируется свет, отражённый и прошедший перпендикулярно поверхности. Оказалось, что в спектре отражения наблюдается единственный максимум в видимом диапазоне (от 380 нм до 780 нм), который приходится на длину волны  $\lambda_0=385$  нм (фиолетовый цвет). Определить на какую длину волны приходится максимум спектра пропускания в видимом диапазоне. Толщина стекла много больше длины когерентности света. (4 б.)





### Задача 3

Найти в параксиальном приближении радиусы светлых колец  $\rho_m$ , образованных на экране в результате интерференции волн от точечного монохроматического источника S с длиной волны  $\lambda_0$ , расположенного на расстоянии  $l$  от экрана и на расстоянии  $d_1$  от поверхности выпуклого сферического зеркала радиуса  $R$ . (4 б.)



### Задача 4

Точечный предмет A расположен на расстоянии  $d_1$  от поверхности прозрачного шара, а его действительное изображение в этом шаре B – на расстоянии  $d_2$  от поверхности шара. Найти радиус шара  $r$ , если известно, что луч, исходящий от предмета под малым углом  $\phi_1$  к прямой АВ, выходит из шара под углом  $\phi_2$  к этой прямой. (4 б.)

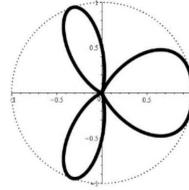
## Экзаменационная работа 2

### Задача 1

Земля заряжена (заряд  $Q \sim 300 \text{ Кл} \sim 10^{12} \text{ СГСЭ}$  с учётом заряда ионосферы), вращается вокруг Солнца и, следовательно, излучает ЭМ волны. Считая это излучение единственным механизмом диссипации энергии, оценить время падения Земли на Солнце. Масса Земли  $m = 6 \cdot 10^{27} \text{ г}$ , расстояние от неё до Солнца  $R = 150 \text{ млн км}$ , что много больше радиусов Солнца (700 000 км) и Земли (6400 км), скорость света  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ . (4 б.)

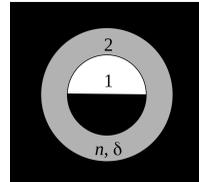
**Задача 2**

Антенна, состоящая из двух параллельных друг другу полуволновых вибраторов, ориентированных перпендикулярно плоскости рисунка, излучающих на длине волны  $\lambda$ , с токами одинаковой амплитуды, но разными по фазе, имеет представленную на рисунке полярную диаграмму направленности. Определите сдвиг фаз  $\psi$  и расстояние  $a$  между вибраторами. (4 б.)



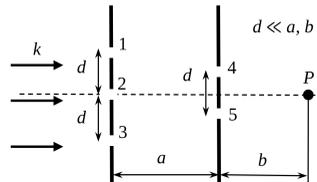
**Задача 3**

Плоская монохроматическая волна интенсивностью  $I_0$  и с длиной волны  $\lambda$  падает по нормали на плоский непрозрачный экран с отверстием в виде полукруга, радиусом в 1-ю зону Френеля, и кольца, занимающего 2-ю зону Френеля (для точки наблюдения за экраном). На кольцо наложена прозрачная пластина толщиной  $\delta$  с показателем преломления  $n$ . Найти интенсивность в точке наблюдения. Отражением от пластины пренебречь. (4 б.)

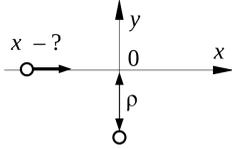


**Задача 4**

Плоская монохроматическая волна падает на непрозрачный экран с тремя одинаковыми щелями, на большом расстоянии за которым находится ещё один непрозрачный экран с двумя такими же щелями. Измеряют интенсивность в точке Р, расположенной на оси далеко за вторым экраном (см. рис.). Сначала щели 1 и 3 были закрыты, а остальные открыты. После того как открыли щель 1, интенсивность света в точке Р увеличилась в  $13/4$  раз. Во сколько раз изменится

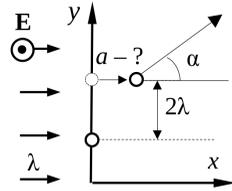


интенсивность в точке Р, по сравнению с начальной, после того как откроют все щели? Расстояния между щелями 1 и 2, 2 и 3, 4 и 5 одинаковы. (4 б).



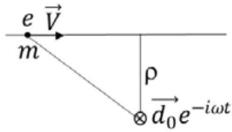
### Задача 5

Электрон из бесконечности с большой (но нерелятивистской скоростью) пролетает вдоль прямой  $x$  мимо неподвижного точечного заряда с прицельным расстоянием  $\rho$ . Определите, при каком значении  $x$  интенсивность дипольного излучения в направлении оси  $y$  максимальна? Отклонением траектории от прямой пренебечь. (4 б).



### Задача 6

Плоская монохроматическая волна с длиной  $\lambda$ , поляризованная вдоль оси  $z$ , падает на систему из двух одинаковых свободных точечных зарядов, расположенных на оси  $y$  на расстоянии  $d = 2\lambda$  друг от друга. Найти угол  $\alpha_0$  от оси  $x$  в диапазоне значений  $0 \leq \alpha_0 \leq \pi$ , при котором наблюдается максимум рассеяния в плоскости  $xy$ . На какое минимальное расстояние  $a$  вдоль оси  $x$  следует сместить один из зарядов (см. рисунок), чтобы рассеяние в угол  $\alpha_0$  полностью исчезло? Взаимодействием зарядов между собой и с рассеянной волной пренебечь. Амплитуду колебаний зарядов считать малой по сравнению с длиной волны. (5 б).



### Задача 7

Найти излученную энергию ультра-релятивистским электроном ( $\gamma \gg 1$ ), пролетевшим с прицельным парамет-

ром  $\rho$  мимо точечного диполя, колеблющегося с амплитудой  $d_0$  и частотой  $\omega$  ( $\omega \gg 2\pi c/\rho$ ) в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. (5 б.)

# Решения

2020/2021 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

## Решение задачи 1

Зависимость  $\varkappa(z)$  нечетна. Поэтому полный заряд нити равен нулю, а дипольный момент отличен от нуля:

$$d = d_z = \int_{-a}^a z' \varkappa(z') dz' = \int_{-a}^a z' \frac{\varkappa_0 z'^3}{a^3} dz' = \frac{\varkappa_0 z'^5}{5a^3} \Big|_{-a}^a = \frac{2\varkappa_0 a^2}{5}.$$

Искомый потенциал выражаем как потенциал диполя:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{2\varkappa_0 a^2 \cos \theta}{5r^2}.$$

## Решение задачи 2

Внешняя поверхность проводника эквипотенциальна. Поэтому распределение потенциала в области  $R > a$  аксиально симметрично. Тогда теорема Гаусса, примененная для цилиндра радиуса  $R > a$ , принимает вид

$$\oiint \mathbf{E}(\mathbf{R}) d\mathbf{S} =$$

$$= \iint E(\mathbf{R})dS = E(\mathbf{R}) \iint_R dS = 2\pi R h E(\mathbf{R}) = 4\pi Q_\Sigma,$$

откуда

$$E(\mathbf{r}) = \frac{2Q_\Sigma}{hR}.$$

Суммарный заряд внутри системы “проводник–заряд  $q$ ”  $Q_\Sigma = \varkappa h$ . Тогда граничное условие на нормальные компоненты  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta E_n = \frac{2\varkappa}{a} - 0 = \frac{2\varkappa}{a},$$

откуда плотность заряда на внешней поверхности проводника равна

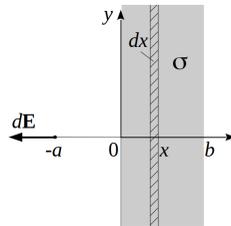
$$\sigma = \frac{2\varkappa}{4\pi a} = \frac{\varkappa}{2\pi a}.$$

Поскольку граничное условие записывалось для произвольной точки поверхности, найденная плотность заряда распределена равномерно.

### Решение задачи 3

Выделим в заряженной области элементарную полоску  $[x, x + dx]$ . Она наводит в точке наблюдения элементарное поле прямой заряженной нити с эффективной линейной плотностью  $\sigma dx$ :

$$dE = \frac{2\sigma dx}{a + x}.$$



Поле от всей полосы получается интегрированием по ширине полосы:

$$E = \int dE = \int_0^b \frac{2\sigma dx}{a + x} = 2\sigma \ln(a + x) \Big|_{x=0}^{x=b} = 2\sigma \ln \frac{a + b}{a}.$$

Поле направлено противоположно оси  $x$ .

#### Решение задачи 4

Поскольку задача обладает аксиальной симметрией, то искомый потенциал имеет общий вид

$$\varphi(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (1)$$

Угловая зависимость плотности заряда на сфере описывается полиномом Лежандра 2-й степени. Это наталкивает на мысль оставить в выражении (1) только слагаемые с  $l = 2$ :

$$\varphi(r, \theta) = \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) P_2(\cos \theta) = \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3} \right) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

В области 1 ( $r < a$ ) нужно принять  $B_2 = 0$ , чтобы избежать нефизичного решения при  $r \rightarrow 0$ . Аналогично, в области 2 ( $r \geq a$ ) нужно принять  $A_2 = 0$ :

$$\varphi_1(r, \theta) = A_2 r^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{B_2}{r^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

Граничное условие на сфере  $\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}$ :

$$A_2 a^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{B_2}{a^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \Rightarrow B_2 = A_2 a^5.$$

Коэффициент  $A_2$  найдем из условия  $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ . Нормальная компонента поля выражается как

$$E_n = E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$E_{1n} = -2A_2 r \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

$$E_{2n} = \frac{3B_2}{r^4} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{3A_2 a^5}{r^4} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

Подставляем в граничное условие:

$$\begin{aligned} E_{2n} - E_{1n} &= \frac{3A_2 a^5}{a^4} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + 2A_2 a \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \\ &= 5A_2 a \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = 4\pi\sigma_0 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \rightarrow A_2 = \frac{4\pi\sigma_0}{5a}. \end{aligned}$$

Итак, искомый потенциал равен

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{2\pi\sigma_0 r^2}{5a} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{2\pi\sigma_0 a^4}{5r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

## Контрольная работа 1.1, вариант 2

### Решение задачи 1

Зависимость  $\varkappa(z)$  нечетна. Поэтому полный заряд нити равен нулю, а дипольный момент отличен от нуля:

$$\begin{aligned} d &= d_z = \int_{-a}^a z' \varkappa(z') dz' = \int_{-a}^a z' \varkappa_0 \sin \frac{\pi z}{a} dz' = \\ &= \varkappa_0 \left( \frac{a^2 \sin \frac{\pi z'}{a}}{\pi^2} - \frac{az' \cos \frac{\pi z'}{a}}{\pi} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{2\varkappa_0 a^2}{\pi}. \end{aligned}$$

Искомый потенциал выражаем как потенциал диполя:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{2\varkappa_0 a^2 \cos \theta}{\pi r^2}.$$

### Решение задачи 2

Внешняя поверхность проводника эквипотенциальна. Поэтому распределение потенциала в области  $r > a$  сферически симметрично. Тогда теорема Гаусса, примененная для

сферы радиуса  $r > a$ , принимает вид

$$\oiint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint E(\mathbf{r}) dS = E(\mathbf{r}) \oiint dS = 4\pi r^2 E(\mathbf{r}) = 4\pi Q_\Sigma,$$

откуда

$$E(\mathbf{r}) = \frac{Q_\Sigma}{r^2}.$$

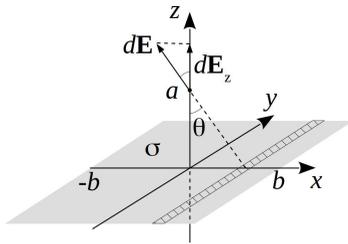
Суммарный заряд внутри системы “проводник–заряд  $q$ ”  $Q_\Sigma = q$ . Тогда граничное условие на нормальные компоненты  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta E_n = \frac{q}{a^2} - 0 = 4\pi\sigma,$$

откуда плотность заряда на внешней поверхности проводника равна

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Поскольку граничное условие записывалось для произвольной точки поверхности, найденная плотность заряда распределена равномерно.



Из симметрии задачи следует, что искомое поле направлено по  $z$ . Выделим в заряженной области элементарную полоску  $[x, x + dx]$ . Она наводит в точке наблюдения элементарное поле

прямой заряженной нити с эффективной линейной плотностью  $\sigma dx$ :

$$dE = \frac{2\sigma dx}{R} = \frac{2\sigma \cos \theta dx}{a}.$$

$z$ -проекция элементарного поля равна

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{2\sigma \cos^2 \theta dx}{a}.$$

Поле от всей полосы получается интегрированием по ширине полосы:

$$E = E_z = \int dE_z = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{2\sigma \cos^2 \theta dx}{a}$$

Перейдем к интегрированию по углу:

$$x = a \operatorname{tg} \theta, dx = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

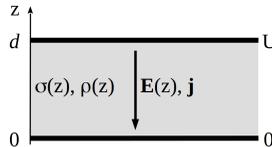
$$E = \int dE_z = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{2\sigma \cos^2 \theta}{a} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} 2\sigma d\theta = 4\sigma\theta_0 = 4\sigma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

## Контрольная работа 1.2

### Решение задачи 1

При любом  $z$  плотность тока постоянна и может быть записана как

$$j = \sigma(z)E(z) = \operatorname{const}.$$



Тогда поле равно

$$E(z) = \frac{j}{\sigma(z)} = \frac{1 + z^2/d^2}{\sigma_0} j.$$

Для разности потенциалов между пластинами имеем

$$\begin{aligned}
 U &= - \int_0^d E(z) dz = - \int_0^d \frac{j}{\sigma(z)} dz = -j \int_0^d \frac{1+z^2/d^2}{\sigma_0} dz = \\
 &= - \frac{j}{\sigma_0} \left( d + \frac{d^3}{3d^2} \right) dz = - \frac{4jd}{3\sigma_0}.
 \end{aligned}$$

Выражаем

$$j = - \frac{3\sigma_0 U}{4d}, \quad E(z) = 3 \frac{1+z^2/d^2}{4d} U.$$

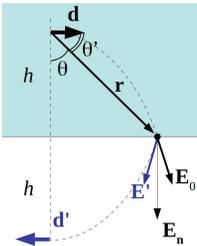
Уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  принимает вид

$$\frac{dE}{dz} = - \frac{6z}{4d^3} U = - \frac{3z}{2d^3} U = 4\pi\rho.$$

Искомая плотность заряда

$$\rho(z) = - \frac{3Uz}{8\pi d^3}.$$

## Решение задачи 2



Способ 1.

Представив диполь как пару разноименных зарядов, легко понять, что система зарядов представляет собой диполь, расположенный зеркально симметрично под диполем-оригиналом, и обладающий моментом  $\mathbf{d}' = -\mathbf{d}$ .

Поле в вакууме равно суперпозиции полей диполя-оригинала и диполя-изображения. Для того, чтобы определить поверхностную плотность заряда, нужно определить нормальную компоненту поля на границе раздела. Рассмотрим в

качестве примера поле, создаваемое диполем-оригиналом в точке на границе, находящейся на расстоянии  $r$  от диполя (без ограничения общности на рисунке изображен случай, когда  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{r}$  лежат в плоскости рисунка):

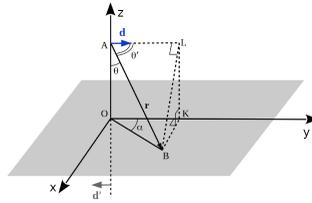
$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\mathbf{d}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

$$E_{0n} = 3\frac{d\cos\theta'}{r^3}\cos\theta = 3\frac{d\sin\theta\cos\alpha\cos^4\theta}{h^3}.$$

где учтено, что в общем случае  $\cos\theta' = \sin\theta\cos\alpha$ .

Докажем соотношение между углами. Рассмотрим скалярное произведение  $(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})$ . С одной стороны имеем

$$(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}) = d\cdot r\cdot\cos\theta',$$



с другой

$$(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}) = d\cdot r_y = d\cdot r\sin\theta\cos\alpha.$$

Соотношение доказано.

За счет добавления поля индуцированных зарядов нормальная компонента суммарного поля на границе удвоится:

$$E_n = 6\frac{d\sin\theta\cos\alpha\cos^4\theta}{h^3}.$$

Плотность заряда находим как

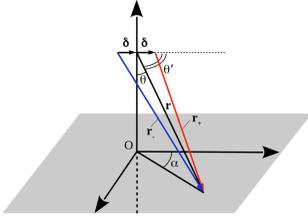
$$\sigma = \frac{E_{2n}-E_{1n}}{4\pi} = 0 - \frac{6d\sin\theta\cos\alpha\cos^4\theta}{4\pi h^3} = -\frac{3d\sin\theta\cos\alpha\cos^4\theta}{2\pi h^3}.$$

Как и следовало ожидать, распределение антисимметрично относительно оси  $Z$ : замена  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$  меняет знак

плотности заряда. Справа ( $\cos \alpha > 0$ ) индуцируются отрицательные заряды, так как там преобладает влияние положительного заряда на правом конце диполя-оригинала.

Способ 2.

Представим диполь как пару зарядов  $-q$  и  $+q$ , отстоящих один от другого на вектор  $2\delta$  (см. рисунок), так что  $\mathbf{d} = 2q\delta$ .



Для заряда  $q$ , находящегося на оси  $Z$ , плотность зарядов известна из семинаров:

$$\sigma_0 = -\frac{qh}{2\pi r^3}.$$

Тогда для заряда  $+q$ , смещенного на вектор  $\delta$ , плотность зарядов запишется как

$$\sigma_+ = -\frac{qh}{2\pi r_+^3}.$$

Выразим множитель  $\frac{1}{r_+^3}$  с учетом  $\delta \ll r$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_+^3} &= \frac{1}{(r_+^2)^{3/2}}, \\ r_+^2 &= (\mathbf{r} - \delta)^2 = r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \delta) + \delta^2 \approx r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \delta) = r^2 \left(1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \delta)}{r^2}\right), \\ \left(r^2 \left(1 - 2\frac{(\mathbf{r} \cdot \delta)}{r^2}\right)\right)^{-3/2} &\approx \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{(\mathbf{r} \cdot \delta)}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Тогда плотность зарядов, индуцированных зарядом  $+q$ , равна

$$\sigma_+ = -\frac{qh}{2\pi r^3} \left(1 + 3\frac{(\mathbf{r} \cdot \delta)}{r^2}\right).$$

Аналогично, плотность зарядов, индуцированных зарядом  $-q$ , равна

$$\sigma_- = \frac{qh}{2\pi r^3} \left( 1 - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\delta})}{r^2} \right),$$

а суммарная плотность:

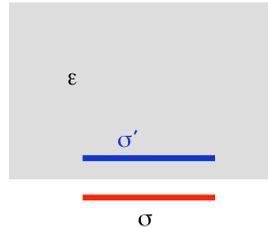
$$\sigma = \sigma_+ + \sigma_- = -6 \cdot \frac{qh(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\delta})}{2\pi r^5} = -3 \cdot \frac{h(\mathbf{r} \cdot 2q\boldsymbol{\delta})}{2\pi r^5} = -3 \cdot \frac{h(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2\pi r^5}.$$

Наконец, приведем к форме ответа, полученного 1-м способом:

$$\begin{aligned} \sigma &= -3 \cdot \frac{hrd \cos \theta'}{2\pi r^5} = -3 \cdot \frac{hd \sin \theta \cos \alpha}{2\pi r^4} = -3 \cdot \frac{hd \sin \theta \cos \alpha \cos^4 \theta}{2\pi h^4} = \\ &= -3 \frac{d \sin \theta \cos \alpha \cos^4 \theta}{2\pi h^3}. \end{aligned}$$

### Решение задачи 3

Заряженная пластина индуцирует на поверхности диэлектрика заряд, который и притягивает ее к диэлектрику. Индуцированный заряд находится методом изображений. Система зарядов-изображений представляет собой равномерно заряженную плоскую площадку, расположенную зеркально симметрично пластине относительно поверхности диэлектрика:



$$\sigma' = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sigma.$$

В данном случае работает приближение бесконечной заряженной плоскости, поэтому поле индуцированных зарядов не зависит от расстояния до пластины и равно

$$E' = 2\pi\sigma'.$$

На единицу площади пластины действует сила

$$\frac{F}{S} = E' \sigma = 2\pi \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sigma^2,$$

а на всю пластину

$$F = 2\pi \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} S \sigma^2 = 2\pi \frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon) S} q^2 < 0.$$

Сила притяжения по модулю равна

$$|F| = 2\pi \frac{\varepsilon - 1}{(1 + \varepsilon) S} q^2.$$

Критическое условие равновесия

$$2\pi \frac{\varepsilon - 1}{(1 + \varepsilon) S} q^2 = mg,$$

откуда искомый заряд

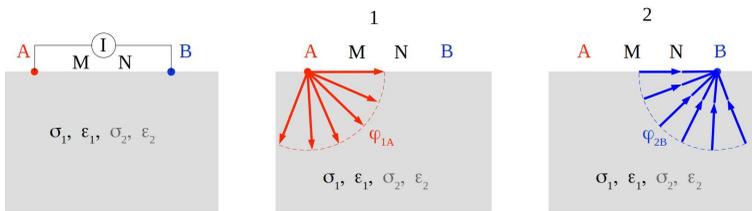
$$q = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon) mg S}{2\pi(\varepsilon - 1)}}.$$

#### Решение задачи 4

Используем принцип суперпозиции. Дополнительно к оригинальной картинке рассматриваем еще две.

На картинке 1 ток  $I$  втекает в точку А. Заряд (включая свободный и связанный) сосредоточен в этой точке. Поле во всем пространстве имеет вид

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{r_A^2} \mathbf{e}_{rA},$$



ток в проводнике:

$$\text{в среде 1 } \mathbf{j}_1 = \sigma_1 \mathbf{E}_1 = \sigma_1 \frac{q}{r_A^2} \mathbf{e}_{rA},$$

$$\text{в среде 2 } \mathbf{j}_2 = \sigma_2 \mathbf{E}_1 = \sigma_2 \frac{q}{r_A^2} \mathbf{e}_{rA}.$$

Из условия

$$\begin{aligned} I &= \pi r_A^2 j_1 + \pi r_A^2 j_2 = \pi r_A^2 \left( \sigma_1 \frac{q}{r_A^2 r_A} + \sigma_2 \frac{q}{r_A^2 r_A} \right) = \\ &= \pi q \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}$$

находим заряд

$$q = \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)},$$

поле

$$E_1 = \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_A^2}$$

и разность потенциалов между точками M и N:

$$\begin{aligned} U_{1MN} &= \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_{AM}} - \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_{AN}} = \\ &= \frac{I}{\pi q \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} \right) = \frac{I}{2\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) l}. \end{aligned}$$

Аналогично, получаем для картинке 2:

$$E_2 = -\frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_B^2},$$

$$U_{2MN} = -\frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_{BM}} + \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) r_{BN}} =$$

$$= -\frac{I}{\pi q \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)} \left( \frac{1}{2l} - \frac{1}{l} \right) = \frac{I}{2\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) l}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$U_{MN} = U_{1MN} + U_{2MN} = \frac{I}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) l},$$

$$R^* = \frac{U_{MN}}{I} = \frac{1}{\pi \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) l}.$$

В случае  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  и  $U_{MN} = \frac{1}{2\pi\sigma l}$ .

## Экзаменационная работа 1

### Решение задачи 1

Поток через короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид сохраняется.

В начальном состоянии напряженность магнитного тока однородна и равна

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi n I}{c} \mathbf{e}_z.$$

Индукция магнитного поля в сердечнике равна

$$\mathbf{B}_\mu = \mu \mathbf{H} = \frac{4\pi \mu n I}{c} \mathbf{e}_z,$$

в остальном объеме

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{4\pi n I}{c} \mathbf{e}_z.$$

Поток поля через витки соленоида:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= N \cdot (\pi a^2 \mu H + \pi(b^2 - a^2)H) = N\pi H(a^2 \mu + (b^2 - a^2)) = \\ &= \pi N H(a^2(\mu - 1) + b^2) = \pi N(a^2(\mu - 1) + b^2) \frac{4\pi n I}{c}.\end{aligned}$$

Выражение для потока в конечном состоянии получим заменой  $\mu \rightarrow 1$ ,  $I \rightarrow I'$ :

$$\Phi' = \pi N b^2 \frac{4\pi n I'}{c}.$$

Приравнявая два потока, получим

$$(a^2(\mu - 1) + b^2)I = b^2 I' \Rightarrow I' = \left( \frac{a^2}{b^2}(\mu - 1) + 1 \right) I.$$

### Решение задачи 2

Вклад одной стороны с током в поле находим по известной формуле для поля на расстоянии  $a$  от отрезка с током

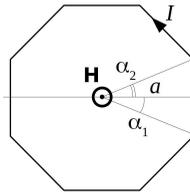
$$H_1 = \frac{I}{ca}(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = \frac{2I}{ca} \sin \frac{2\pi}{2n} = \frac{2I}{ca} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Каждая сторона индуцирует в центре многоугольника одинаковое по величине и направлению поле. Поэтому суммарное поле равно

$$H = n \cdot H_1 = \frac{2nI}{ca} \sin \frac{\pi}{n},$$

направлено на нас.

*Примечание.* В пределе  $n \rightarrow \infty$  получим поле в центре кольца  $H = \frac{2\pi I}{ca}$ .



### Решение задачи 3

Поле снаружи от полубесконечного соленоида имеет вид:

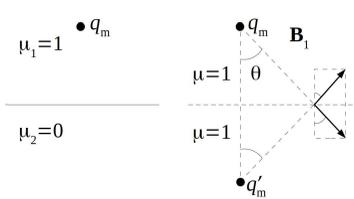
$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

где  $q_m = \frac{ISn}{c}$  (см. задачу 4.24 из [1]).

На поверхности сверхпроводника индуцируются токи, плотность  $J$  которых удовлетворяет граничному условию

$$\Delta B_\tau = B_\tau = \frac{4\pi}{c} J.$$

Поле над сверхпроводником формируется как соленоидом, так и поверхностными токами. Результирующее поле найдем методом изображений. Заряд-изображение  $q'_m$  поместим в зеркально симметричную точку (см. рисунок).



Нормальная компонента поля на поверхности сверхпроводника равна

$$B_n = \frac{q_m - q'_m}{r^2} \cos \theta.$$

С другой стороны она должна быть равна нормальной компоненте поля в сверхпроводнике, откуда

$$B_n = 0, \quad q'_m = q_m.$$

Тогда тангенциальная компонента поля на поверхности сверхпроводника

$$B_\tau = \frac{2q_m}{r^2} \sin \theta$$

и искомая плотность токов

$$J = \frac{c}{4\pi} B_\tau = \frac{2cq_m}{4\pi r^2} \sin \theta = \frac{ISn}{2\pi h^2} \sin \theta \cos^2 \theta.$$

### Решение задачи 4

Нескомпенсированные заряды могут содержаться только на поверхности электродов и на границе раздела. Пусть заряд на первом электроде равен  $q_1$ . Тогда ток, выходящий из первого электрода, определяется из теоремы Гаусса:

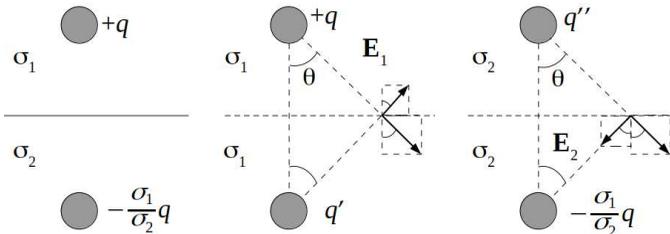
$$I = \iint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \sigma_1 \iint \mathbf{E} d\mathbf{S} \approx \sigma_1 \oiint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi\sigma_1 q_1,$$

где в первых двух интегралах из области интегрирования исключена точка контакта с токоподводящим проводом.

Для того, чтобы все силовые линии поля и плотности тока замыкались между двумя электродами, необходимо, чтобы такой же ток втекал во второй электрод. Отсюда следует, что заряд на втором электроде равен

$$q_2 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1.$$

Распределение поля (и потенциала) в пространстве между электродами определим методом изображений. Выпишем выражения для компонент полей в точке границы раздела, положение которой задано расстоянием  $r$  и углом  $\theta$ :



$$E_{1\tau} = \frac{q_1}{r^2} \sin \theta + \frac{q'}{r^2} \sin \theta = (q_1 + q') \frac{\sin \theta}{r^2},$$

$$j_{1n} = \sigma_1 \left( \frac{q_1}{r^2} \cos \theta - \frac{q'}{r^2} \cos \theta \right) = \sigma_1 (q_1 - q') \frac{\cos \theta}{r^2},$$

$$E_{2\tau} = \frac{q''}{r^2} \sin \theta - \frac{\sigma_1 q_1}{\sigma_2 r^2} \sin \theta = \frac{q'' - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1}{r^2} \sin \theta,$$

$$j_{2n} = \sigma_2 \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1 + q''}{r^2} \cos \theta.$$

Тогда граничные условия  $E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ ,  $j_{2n} - j_{1n} = 0$  принимают вид:

$$\begin{aligned} q_1 + q' &= q'' - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1, & q' - q'' &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2} q_1, \\ & & \Rightarrow & \\ \sigma_1 (q_1 - q') &= \sigma_2 \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1 + q'' \right). & \sigma_1 q' + \sigma_2 q'' &= 0. \end{aligned}$$

Находим неизвестные  $q'$  и  $q''$ :

$$q' = -q_1, \quad q'' = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q_1.$$

Потенциалы в центрах электродов определяются как

$$\varphi_+ = \frac{q_1}{a} - \frac{q_1}{2h},$$

$$\varphi_- = -\frac{\sigma_1 q_1}{\sigma_2 a} + \frac{\sigma_1 q_1}{2\sigma_2 h}.$$

Сопротивление между электродами равно:

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2 a} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_2 h}}{4\pi\sigma_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\pi\sigma_1\sigma_2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2h} \right).$$

### Решение задачи 5

#### Способ 1.

Пусть по соленоиду ток  $I$  и воспользуемся общим соотношением \*

$$\Delta L = \frac{c^2}{I^2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{B}$  – внешнее поле в точке, куда внесен упругий диполь,  $\mathbf{m}$  – дипольный момент, приобретенный упругим диполем.

Для соленоида имеем

$$B = \frac{4\pi n I}{c}.$$

---

\*Приведем вывод формулы. Пусть по замкнутому контуру произвольной формы течет ток  $I$ . Пусть вблизи этого контура находится упругий диполь с наведенным моментом  $\mathbf{m}$ . Тогда поток поля диполя через сечение контура можно записать как

$$\Delta\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\boldsymbol{\ell}.$$

Выполним циклическую перестановку в смешанном произведении под интегралом:

$$\Delta\Phi = \oint \frac{\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\ell}}{r^3} \cdot \mathbf{m} = \frac{c}{I} \cdot \frac{I}{c} \cdot \oint \frac{d\boldsymbol{\ell} \times (-\mathbf{r})}{r^3} \cdot \mathbf{m}.$$

Заметим, что согласно закону Био-Савара  $\frac{I}{c} \oint \frac{d\boldsymbol{\ell} \times (-\mathbf{r})}{r^3}$  суть поле  $\mathbf{B}$ , наводимое контуром с током  $I$  в точке, где находится диполь. Тогда изменение индуктивности контура равно

$$\Delta L = \frac{c\Delta\Phi}{I} = \frac{c^2}{I^2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}).$$

Момент шарика (см. задачу 5.7 из [1]) равен

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{B}. \quad (2)$$

Подставляя в (1), находим

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{c^2}{I^2} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B^2 = \frac{c^2 a^3 (\mu - 1)}{I^2 (\mu + 2)} \left( \frac{4\pi I n}{c} \right)^2 = \\ &= \frac{16\pi^2 a^3 N^2}{I^2} \frac{\mu - 1}{\mu + 2}. \end{aligned} \quad (3)$$

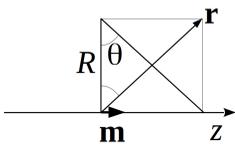
Длину соленоида находим из формулы для индуктивности длинного соленоида

$$L = \frac{4\pi S N^2}{l} \rightarrow l = \frac{4\pi S N^2}{L},$$

откуда

$$\Delta L = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \frac{16\pi^2 N^2 L^2}{16\pi^2 S^2 N^4} a^3 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \left( \frac{L}{SN} \right)^2 a^3.$$

Способ 2 (предложен студентом ФФ НГУ Артемом Кудрявцевым).



Определим поток магнитного поля, индуцируемого шариком, через все витки соленоида. Будем использовать формулу для потока в виде

$$\Delta \Phi = \oint (\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}).$$

Вектор-потенциал в точках витков выразим как

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{mR \cos^3 \theta}{R^3} \mathbf{e}_\alpha = \frac{m \cos^3 \theta}{R^2} \mathbf{e}_\alpha.$$

Перейдем к интегрированию по  $\theta$ :

$$d\ell = 2\pi Rndz = 2\pi Rnd(R \operatorname{tg} \theta) = \frac{2\pi nR^2 d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

В приближении длинного соленоида интегрирование производится от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Тогда поток равен

$$\Delta\Phi = \int Ad\ell = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\pi nR^2 m \cos \theta}{R^2} d\theta = 4\pi nm.$$

Подставим  $m$  из (2):

$$\Delta\Phi = 4\pi n \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B = 4\pi n \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \cdot \frac{4\pi n I}{c} = \frac{16\pi^2 n^2 I a^3}{c} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Искомое изменение индуктивности равно

$$\Delta L = \frac{c}{I} \Delta\Phi = 16\pi^2 n^2 a^3 \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2},$$

что совпадает с (3).

Способ 3.

Будем искать изменение индуктивности из соотношения

$$\Delta W = \frac{\Delta L \cdot I^2}{2c^2},$$

где  $\Delta W$  – изменение энергии всей системы вследствие внесения в соленоид магнитного шарика при условии поддержания неизменным тока в соленоиде.

Изменение энергии системы происходит за счет двух процессов: работы  $A$  внешних сил на перемещении диполя

из бесконечности в центр соленоида и работы  $A_{\text{ист}}$  источника на поддержании тока неизменным:

$$\Delta W = A + A_{\text{ист}}.$$

Работа  $A$  по определению равна потенциальной энергии упругого диполя в поле соленоида:

$$A = -\frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})}{2}.$$

Работу источника тока находим из условия

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\text{ист}}}{dt} &= W_{\text{ист}} = -\mathcal{E} \cdot I = \frac{Id\Phi}{cdt} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_{\text{ист}} &= \frac{I\Delta\Phi}{c}, \end{aligned}$$

где знак «-» при  $\mathcal{E} \cdot I$  учитывает, что работа источника направлена в противодействие э.д.с., стремящейся изменить ток в соленоиде.

Для  $B$  и  $\Delta\Phi$  возьмем готовые выражения, использованные в решении способами 1 и 2:

$$\begin{aligned} \Delta W &= -\frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{2} \left( \frac{4\pi n I}{c} \right)^2 + \frac{I}{c} \frac{16\pi^2 n^2 I a^3}{c} \cdot \frac{\mu-1}{\mu+2} = \\ &= \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{2} \left( \frac{4\pi n I}{c} \right)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta L = \frac{2c^2 \Delta W}{I^2} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 (4\pi n)^2,$$

что совпадает с (3).

Способ 4.

Условие  $a \ll \sqrt{S}$  позволяет обобщить задачу на случай  $N_m$  шариков, расположенных так, что один шарик не влияет на магнитный момент другого. Тогда величина  $\Delta L$  аддитивна по  $N_m$ . С другой стороны в случае достаточно большого числа  $N_m$  эффективная магнитная проницаемость внутри соленоида описывается выражением \*:

$$\mu_{eff}(N_m) = 1 + 4\pi n \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 = 1 + \frac{4\pi N_m a^3 (\mu - 1)}{Sl(\mu + 2)}.$$

Тогда изменение индуктивности от внесения  $N_m$  шариков равно

$$\Delta L = \frac{4\pi N_m a^3 (\mu - 1)}{Sl(\mu + 2)} L.$$

Подставляя  $N_m = 1$ , с учетом  $l = \frac{4\pi SN^2}{L}$  получим

$$\Delta L = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot \left( \frac{L}{SN} \right)^2 a^3.$$

**Решение задачи 6**

Под действием внешнего поля  $\mathbf{E}_1$  шар приобретает дипольный момент. Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_1 - \frac{\mathbf{d}_1}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5},$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_2 - \frac{\mathbf{d}_2}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5}.$$

---

\*Формула получается заменой  $\epsilon \rightarrow \mu$  в выражении из аналогичной электростатической задачи, включенной в месячные задания (см. также задачу на стр. 92).

Этому полю соответствует потенциал

$$\varphi_1 = -E_1 r \cos \theta + \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^3},$$

$$\varphi_2 = -E_2 r \cos \theta + \frac{(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3}.$$

Из условия  $\varphi(a) = 0$  находим  $d_1$  и  $d_2$ :

$$\varphi_1 = -E_1 a \cos \theta + \frac{d_1 \cos \theta}{a^2} = 0 \rightarrow d_1 = E_1 a^3,$$

$$\varphi_2 = -E_2 a \cos \theta + \frac{d_2 \cos \theta}{a^2} = 0 \rightarrow d_2 = E_2 a^3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 a^3.$$

Итак,

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_1 - \frac{a^3}{r^3} \mathbf{E}_1 + 3 \frac{E_1 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_1 - \frac{\varepsilon_1 a^3}{\varepsilon_2 r^3} \mathbf{E}_1 + 3 \frac{\varepsilon_1 E_1 a^3 \cos \theta}{\varepsilon_2 r^3} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \frac{a^3}{r^3} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + 3 \frac{\varepsilon_1 E_1 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \frac{a^3}{r^3} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + 3 \frac{\varepsilon_1 E_1 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r = \mathbf{D}^{(1)}.$$

Полученное решение удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, поэтому по теореме единственности оно единственно верно.

### Решение задачи 7

В задаче выполняется квазистационарное приближение. Исходя из аналогичной статической задачи (см. задачу 2.8 из [1]), распределение зарядов на сфере имеет вид

$$\Sigma = \Sigma_0 \cos \theta e^{i\omega t}.$$

Поле внутри шара однородное и равно

$$E_{in} = \left( E_0 - \frac{4\pi}{3}\Sigma_0 \right) e^{i\omega t},$$

поэтому в шаре течет однородный переменный ток

$$j = \sigma E_{in} = \sigma \left( E_0 - \frac{4\pi}{3}\Sigma_0 \right) e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Ток удовлетворяет граничному условию

$$\Delta j_n = j_n = \frac{d\Sigma}{dt} \Rightarrow j(t) = i\omega \Sigma_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2), выражаем

$$\Sigma_0 = \frac{E_0}{\frac{4\pi}{3} + \frac{i\omega}{\sigma}}.$$

Тогда плотность тока в шаре (комплексное выражение)

$$j = i\omega \frac{E_0}{\frac{4\pi}{3} + \frac{i\omega}{\sigma}} e^{i\omega t},$$

а ее мгновенное значение

$$j(t) = \frac{\omega E_0}{\sqrt{\frac{16\pi^2}{9} + \frac{\omega^2}{\sigma^2}}} \sin(\omega t + \phi).$$

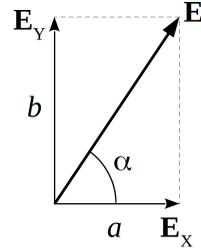
Средняя мощность тепловыделения равна

$$\langle W \rangle = \int \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} dV = \frac{\omega^2 E_0^2}{\sigma \left( \frac{16\pi^2}{9} + \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{6\pi\sigma\omega^2 a^3 E_0^2}{16\pi^2\sigma^2 + 9\omega^2}.$$

## Контрольная работа 2.1, вариант 1

### Решение задачи 1

Заметим, что заданная волна имеет линейную поляризацию. Поэтому условие минимума интенсивности прошедшей волны – перпендикулярность оси поляроида по отношению к направлению поля в падающей волне: при этом на выходе поляроида будет нулевая интенсивность.



Угол наклона поля в падающей волне равен  $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ . Тогда искомый угол равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \frac{\pi}{2}.$$

## Решение задачи 2

Коэффициенты отражения по амплитуде выражаются формулами Френеля:

$$\xi = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} \text{ для s-волны,}$$

$$\zeta = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} \text{ для p-волны.}$$

$$\theta_0 = \theta_{\text{Бр}} = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \text{ откуда}$$

$$\xi = -\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta_2)}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\cos(2\theta_2),$$

$$\zeta = 0.$$

Коэффициент отражения по интенсивности равен

$$R = \frac{I_{1s} + I_{1p}}{I_{0s} + I_{0p}} = \frac{I_{1s} + 0}{2I_{0s}} = \frac{\xi^2}{2} = \frac{\cos^2(2 \cdot 75^\circ)}{2} = \frac{\cos^2 150^\circ}{2} = \frac{3}{8}.$$

### Решение задачи 3

Искомое поле находится как обратное преобразование Фурье:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega} e^{i(kz - \omega t)} d\omega.$$

Подставим  $E_{\omega} = a e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$  и  $k(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$ :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega} e^{i(kz - \omega t)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} e^{i\left(k_0 z + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} z - \omega t\right)} d\omega. \end{aligned}$$

Для введения новой переменной  $\omega' = \omega - \omega_0$  прибавим и вычтем в подэкспоненциальном выражении  $\omega_0 t$ :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} e^{i\left(k_0 z + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} z - \omega t + \omega_0 t - \omega_0 t\right)} d\omega = \\ &= a e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega'}{\Delta\omega}\right)^2} e^{i\left(\frac{\omega'}{v_g} z - \omega' t\right)} d\omega' = \\ &= a e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega'}{\Delta\omega}\right)^2 + i\left(\frac{z}{v_g} - t\right)\omega'} d\omega'. \end{aligned}$$

Выделим полный квадрат в выражении под экспонен-

той:

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\omega'}{\Delta\omega} \right)^2 + i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \omega' = - \left( \frac{\omega'}{\Delta\omega} \right)^2 + 2i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \frac{\omega'}{\Delta\omega} + \\
 & + \left( i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 - \left( i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 = \\
 & = - \left( \frac{\omega'}{\Delta\omega} - i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 + \left( i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 .
 \end{aligned}$$

Введем новую переменную  $\xi = \frac{\omega'}{\Delta\omega} - i \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \frac{\Delta\omega}{2}$  и запишем  $E(z, t)$ :

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &= a \Delta\omega e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} e^{-\left( \frac{\Delta\omega}{2} \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \\
 &= a \Delta\omega \sqrt{\pi} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} e^{-\left( \frac{\Delta\omega}{2} \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \right)^2} .
 \end{aligned}$$

Проанализируем полученный результат.

1. Решение представляет собой плоскую монохроматическую волну  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$ , модулированную огибающей колоколообразной формы  $\sim e^{-\left( \frac{\Delta\omega}{2} \left( \frac{z}{v_g} z - t \right) \right)^2}$ .
2. Максимум огибающей ( $z - v_g t = 0$ ) движется в направлении оси  $z$  с групповой скоростью  $v_g$ .
3. Эффективная ширина “колокола” определяется дробью  $\frac{2}{\Delta\omega}$  и не меняется со временем, как и его форма. Предел  $\Delta\omega \rightarrow 0$  соответствует плоской монохроматической волне, то есть бесконечно широкому волновому пакету. Обратный случай  $\Delta\omega \rightarrow \infty$  относится к предельно узкому в пространстве волновому пакету.

### Решение задачи 4

Для любой компоненты электрического (или магнитного) поля движение волны вдоль оси  $z$  описывается выражением вида

$$E(\mathbf{r}, t) = E(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)},$$

где  $k_z$  определяется из закона дисперсии в прямоугольном волноводе

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + c^2 \left( \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 \right) = c^2 k_z^2 + \omega_{min}^2 \Rightarrow$$

$$k_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{min}^2}.$$

Если  $\omega < \omega_{min}$ ,  $k_z$  принимает мнимое значение:

$$k_z = i |k_z| = i \frac{1}{c} \sqrt{\omega_{min}^2 - \omega^2}.$$

Тогда поле затухает по амплитуде вдоль  $z$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = E(x, y) e^{-|k_z|z} e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Расстояние, на котором поле затухает в  $e$  раз, определяется условием

$$\begin{aligned} |k_z|l = 1 \rightarrow l &= \frac{1}{|k_z|} = \frac{c}{\sqrt{\omega_{min}^2 - \omega^2}} = \frac{c}{\sqrt{5^2 - 4.999^2}} \frac{a}{\pi c} \approx \\ &\approx \frac{a}{\pi \sqrt{0.001 \cdot 2 \cdot 5}} = \frac{a}{\pi \sqrt{0.01}} = \frac{10a}{\pi}. \end{aligned}$$

**Контрольная работа 2.1, вариант 2****Решение задачи 1**

Условие задачи идентично условию зад.1 вар.1 (см. на стр. 58). Максимум интенсивности прошедшей волны реализуется, когда ось поляроида параллельна полю  $\mathbf{E}$  в падающей волне: при этом поляроид полностью пропустит волну.

Искомый угол равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

**Решение задачи 2**

Запишем закон преломления для заданных условий:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{1}{n}.$$

Для  $\theta_0 = \theta_{\text{Бр}}$  выполняется соотношение  $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$ , откуда

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} = \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{1}{n} \rightarrow \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

**Решение задачи 3**

Искомое поле находится как обратное преобразование Фурье:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_{\omega} e^{i(kz - \omega t)} d\omega.$$

Подставим  $\hat{E}_{\omega}$  и  $k(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$ :

$$E(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} a e^{i(k_0 z + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} z - \omega t)} d\omega.$$

Для введения новой переменной  $\omega' = \omega - \omega_0$  прибавим и вычтем в подэкспоненциальном выражении  $\omega_0 t$ :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} a e^{i(k_0 z + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} z - \omega t + \omega_0 t - \omega_0 t)} d\omega = \\ &= a e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i(\frac{z}{v_g} - t)\omega'} d\omega' = \\ &= 2a\Delta\omega e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{z}{v_g} - t\right)\Delta\omega\right). \end{aligned}$$

Проанализируем полученный результат.

1. Решение представляет собой плоскую монохроматическую волну  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$ , модулированную огибающей колоколообразной формы  $\sim \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{z}{v_g} - t\right)\Delta\omega\right)$ .
2. Максимум огибающей ( $z - v_g t = 0$ ) движется в направлении оси  $z$  с групповой скоростью  $v_g$ .
3. Эффективная ширина “колокола” равна  $\frac{2\pi v_g}{\Delta\omega}$  и не меняется со временем, как и его форма. Предел  $\Delta\omega \rightarrow 0$  соответствует плоской монохроматической волне, то есть бесконечно широкому волновому пакету. Обратный случай  $\Delta\omega \rightarrow \infty$  относится к предельно узкому в пространстве волновому пакету.

#### Решение задачи 4

Задача аналогична задаче 4 вар.1 (см. стр. 61) Расстояние, на котором поле затухает в  $e$  раз, определяется условием

$$l = \frac{1}{|k_z|} = \frac{c}{\sqrt{\omega_{min}^2 - \omega^2}}.$$

Искомая частота равна

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\omega_{min}^2 - \frac{c^2}{l^2}} = \sqrt{c^2 \left( \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 \right) - \frac{c^2}{l^2}} = \\ &= \frac{\pi c}{a} \sqrt{1^2 + 2^2 - \frac{1}{10^2}} = \frac{\pi c \sqrt{4.99}}{a}.\end{aligned}$$

## Контрольная работа 2.2, вариант 1

### Решение задачи 1

Матрица толстой линзы, полученная на семинарах:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } m_{11} = 1 - \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_1}, \quad m_{12} = \frac{d}{n_L} \\ m_{21} = -\frac{n - n_L}{R_2} + \frac{n - n_L}{R_2} \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_1} - \frac{n_L - n}{R_1}, \quad m_{22} = \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_2} + 1$$

и использованы обозначения:

$n_L = 3/2$  – показатель преломления линзы,

$n = 1$  – показатель преломления среды вне линзы,

$R_1 = |R|$  (так как луч падает на выпуклую поверхность),

$R_2 = \infty$ ,

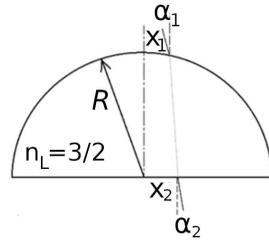
$d = R$  – толщина линзы.

Подставим числа и выразим преобразование луча:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2R}{3} \\ -\frac{1}{2R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{2R}{3}\alpha_1, \\ \alpha_2 &= -\frac{x_1}{2R} + \alpha_1.\end{aligned}$$



**Решение задачи 2**

Для радиуса  $\rho$  отверстия, в которое укладывается  $m$  зон Френеля, имеем:

$$\rho^2 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \lambda m,$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  – расстояния от экрана до источника и до точки наблюдения соответственно. Тогда искомое число зон Френеля выражается как

$$m = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda}.$$

Число зон Френеля после перемещения источника изменится на единицу и составляет

$$m_1 = \frac{\frac{a_1}{2} + a_2}{\frac{a_1}{2} a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m + \frac{a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m + 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{\rho^2}{a_1 \lambda} = 1. \quad (1)$$

Число зон Френеля после перемещения точки наблюдения изменяется на единицу и составляет

$$m_2 = \frac{\frac{a_1}{2} + 2a_2}{\frac{a_1}{2} 2a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m_1 - \frac{a_1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{a_1 a_2 \lambda} = m_1 - 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{\rho^2}{2a_2 \lambda} = 1. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) следует

$$a_1 = 2a_2.$$

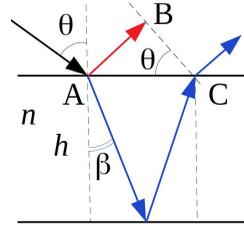
Подставляем это в выражение для  $m$  с учетом (2):

$$m = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{3\rho^2}{2a_2 \lambda} = 3 \cdot 1 = 3.$$

### Решение задачи 3

В задаче коэффициент  $\alpha$  предполагается достаточно малым, так что считаем обе поверхности клина горизонтальными.

Оптическая длина волны, отраженной от верхней поверхности, на участке АВ составляет:



$$\Delta_1 = AB = AC \sin \theta + \frac{\lambda}{2}$$

(учтен скачок фазы на  $\pi$  при отражении).

Оптическая длина хода волны, преломленной на верхней границе и отраженной от нижней, равна

$$\Delta_2 = \frac{nAC}{\sin \beta}.$$

Оптическая разность хода на общем фронте равна

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{nAC}{\sin \beta} - AC \sin \theta - \frac{\lambda}{2} = \frac{2hn \operatorname{tg} \beta}{\sin \beta} - 2h \operatorname{tg} \beta \sin \theta - \frac{\lambda}{2} = \\ &= 2h \left( \frac{n}{\cos \beta} - \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos \beta} \right) - \frac{\lambda}{2} = 2h \left( \frac{n}{\cos \beta} - \frac{n \sin^2 \beta}{\cos \beta} \right) - \frac{\lambda}{2} = \\ &= 2nh \cos \beta - \frac{\lambda}{2} = 2nh \sqrt{1 - \sin^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} = \\ &= 2h \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Для интерференции двух волн разность хода не должна превышать продольной длины когерентности:

$$2\alpha x^2 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} < \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

Тогда критический размер по  $x$ :

$$x_{cr} = \frac{\lambda}{\left(2\alpha\delta\lambda\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}\right)^{1/2}}.$$

#### Решение задачи 4

Компоненты волны, ориентированные по  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$ , интерферируют независимо, вследствие чего соответствующие им интенсивности складываются.

Поэтому первоначально на экране будет наблюдаться традиционная для схемы Юнга интерференционная картина:

$$\begin{aligned} I(x) &= I_0 \cdot \left(1 + \cos k \frac{d \cdot x}{L}\right) + I_0 \cdot \left(1 + \cos k \frac{d \cdot x}{L}\right) = \\ &= 2I_0 \cdot \left(1 + \cos k \frac{d \cdot x}{L}\right). \end{aligned}$$

Ее видность равна 1.

Помещение фазоинвертора вблизи одной из щелей изменяет поляризацию волны непосредственно после него, так что для  $x$ -компоненты волны мы по-прежнему имеем схему Юнга, тогда как для ее  $y$ -компоненты мы получаем схему Ллойда. Результирующая интенсивность теперь равна

$$I(x) = I_0 \cdot \left(1 + \cos k \frac{d \cdot x}{L}\right) + I_0 \cdot \left(1 - \cos k \frac{d \cdot x}{L}\right) = 2I_0.$$

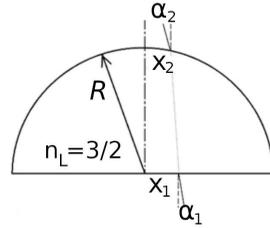
Видность этой интерференционной картины равна 0.

## Контрольная работа 2.2, вариант 2

### Решение задачи 1

Матрица толстой линзы, полученная на семинарах:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$



где

$$m_{11} = 1 - \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_1}$$

$$m_{12} = \frac{d}{n_L}$$

$$m_{21} = -\frac{n - n_L}{R_2} + \frac{n - n_L}{R_2} \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_1} - \frac{n_L - n}{R_1} = -\frac{n_L - n}{R_1 R_2} \left( R_2 - R_1 + \frac{n_L - n}{n_L} d \right)$$

$$m_{22} = \frac{n_L - n}{n_L} \cdot \frac{d}{R_2} + 1$$

и использованы обозначения:

$n_L = 3/2$  – показатель преломления линзы,

$n = 1$  – показатель преломления среды вне линзы,

$R_1 = \infty$ ,  $R_2 = -|R|$  (так как луч падает на вогнутую поверхность),

$d = R$  – толщина линзы.

Подставим числа и выразим преобразование луча:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{3} \\ -\frac{1}{2R} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_2 = x_1 + \frac{2R}{3} \alpha_1,$$

$$\alpha_2 = -\frac{x_1}{2R} + \alpha_1.$$

**Решение задачи 2**

Искомое число зон Френеля выражается как (см. задачу 2 вар. 1 на стр. 65)

$$m = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda}.$$

Число зон Френеля после перемещения источника изменяется на единицу и составляет

$$m_1 = \frac{3a_1 + a_2}{3a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{a_1 + \frac{a_2}{3}}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m - \frac{\frac{2a_2}{3}}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m - 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{2\rho^2}{3a_1\lambda} = 1. \quad (1)$$

Число зон Френеля после перемещения точки наблюдения изменяется на единицу и составляет

$$m_2 = \frac{3a_1 + \frac{5a_2}{7}}{3a_1 \frac{5a_2}{7}} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{\frac{7a_1}{5} + \frac{a_2}{3}}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m_1 + \frac{\frac{2a_1}{5}}{a_1 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = m_1 + 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{2\rho^2}{5a_2\lambda} = 1. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) следует

$$a_1 = \frac{5a_2}{3}.$$

Подставляем это в выражение для  $m$  с учетом (2):

$$m = \frac{\frac{5}{3}a_2 + a_2}{\frac{5}{3}a_2 a_2} \cdot \frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{8\rho^2}{5a_2\lambda} = 4 \cdot 1 = 4.$$

**Решение задачи 3**

Разность хода волн, отраженных от верхней и нижней поверхности, равна (см. задачу 3 вар. 1 на стр. 66):

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Для интерференции разность хода не должна превышать продольной длины когерентности:

$$2\alpha x \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} < \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}.$$

Тогда критический размер по  $x$ :

$$x_{cr} = \frac{\lambda^2}{2\alpha\delta\lambda\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}.$$

**Экзаменационная работа 2****Решение задачи 1**

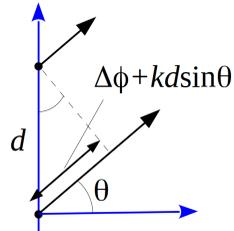
Условие максимума сигнала – синфазность волн, приходящих к приемнику от соседних антенн:

$$\Delta\phi + kd \sin \theta = 2\pi m.$$

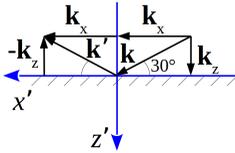
Для искомой разности фаз получим

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi m - kd \sin \theta = 2\pi m - \frac{\omega d \sin \theta}{c} = \\ &= 2\pi m - \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot \sin \theta}{3 \cdot 10^{10}} = 2\pi \cdot (m - \sin \theta). \end{aligned}$$

Условию минимального фазового сдвига для  $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$  соответствует  $m = 0$ ; для  $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ :  $m = 1$ .



**Решение задачи 2**



Используем систему координат с осью  $x'$ , ориентированной вдоль крыши, и осью  $z'$ , ориентированной по нормали к ее плоскости. На приемную антенну, расположенную на прямой  $(x', z')$ , приходят падающая и отраженная волны:

$$E(x', z') = E_0 e^{i(k_x x' + k_z z' - \omega t)} - E_0 e^{i(k_x x' - k_z z' - \omega t)} =$$

$$= E_0 e^{i(k_x x' - \omega t)} \left( e^{ik_z z'} - e^{-ik_z z'} \right) = 2i E_0 e^{i(k_x x' - \omega t)} \sin k_z z'.$$

Условие максимума

$$k_z D = \frac{\pi}{2} \rightarrow D = \frac{\pi}{2k_z} = \frac{\pi}{2k \sin 30^\circ} = \frac{\pi \lambda}{4\pi \sin 30^\circ} = \frac{\lambda}{2}.$$

Антенна должна быть ориентирована вдоль электрического поля, то есть вдоль оси  $y$ .

**Решение задачи 3**



Магнитное поле дипольного излучения в волновой зоне определяется формулой

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}.$$

В направлении  $z$  имеем

$$H_y = \frac{\ddot{d} \sin \alpha}{c^2 r}.$$

Суперпозиция полей двух излучающих диполей дает

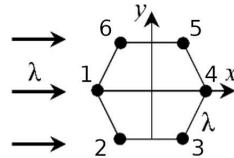
$$H = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \left( 1 + e^{\frac{2\pi i}{6}} \sin \alpha \right) = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \left( 1 + e^{\frac{i\pi}{3}} \sin \alpha \right).$$

Искомое отношение интенсивностей равно

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\left| 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \sin 60^\circ \right|^2}{\left| 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \sin 30^\circ \right|^2} = \frac{1 + \frac{3}{4} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{3}}{1 + \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{7}.$$

#### Решение задачи 4

Вектор  $\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{E}_{\text{пад}}$ , поэтому фаза волны, рассеянной любым зарядом в направлении  $x$ , совпадает с фазой падающей волны. Тогда задачу о рассеянии в направлении  $x$  можно свести к рассеянию от одной точки:



$$E_x = 6E_0 e^{i(kx - \omega t)},$$

где  $E_0$  – амплитуда волны, рассеянной одним зарядом.

С учетом геометрии задачи генерация рассеянной волны происходит синфазно в точках 2, 3, 5, 6 и в точках 1, 4 соответственно. Но, учитывая различное расстояние от этих точек до приемника, амплитуда волны, рассеянной в направлении  $y$ , запишется как

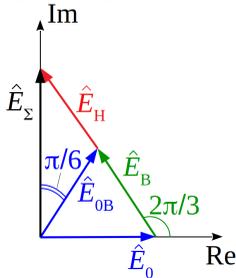
$$\begin{aligned} E_y &= 2E_0 e^{i(ky - \omega t)} + 2E_0 e^{i(ky + 2\pi \cos 60^\circ - \omega t - 2\pi \sin 60^\circ)} + \\ &+ 2E_0 e^{i(ky + 2\pi \cos 60^\circ - \omega t + 2\pi \sin 60^\circ)} = \\ &= 2E_0 e^{i(ky - \omega t)} \left( 1 + e^{i(\pi + \pi\sqrt{3})} + e^{i(\pi - \pi\sqrt{3})} \right) = \\ &= 2E_0 e^{i(ky - \omega t)} \left( 1 - 2 \cos(\pi\sqrt{3}) \right). \end{aligned}$$

Искомое отношение интенсивностей равно

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{6^2}{2^2 \cdot (1 - 2 \cos(\pi\sqrt{3}))^2} = \frac{9}{(1 - 2 \cos(\pi\sqrt{3}))^2}.$$

### Решение задачи 5

Будем изображать электрическое поле  $\mathbf{E}_p$  в каждом из трех вариантов вектором на комплексной плоскости.



Открыто центральное отверстие:

$$\hat{E}_{p1} = \hat{E}_0.$$

Открыто центральное и верхнее отверстия:

$$\hat{E}_{p2} = \hat{E}_0 + \hat{E}_B = \hat{E}_{OB}.$$

По условию модуль суммарного вектора равен  $E_0$ . Такое возможно, только если суммирующиеся векторы отличаются по фазе на  $+\frac{2\pi}{3}$  (см. рисунок) или на  $-\frac{2\pi}{3}$ .

Открыто центральное, верхнее и нижнее отверстия:

$$\hat{E}_{p3} = \hat{E}_{p2} + \hat{E}_H = \hat{E}_\Sigma.$$

Поле  $\mathbf{E}_H$ , добавляемое при открытии нижнего отверстия, имеет такую же фазу, как и при открытии верхнего отверстия, поскольку оптическая длина пути из обоих отверстий в точку  $P$  одинакова. Тогда амплитуда суммарного вектора составляет

$$E_\Sigma = E_0 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = E_0 \sqrt{3},$$

а интенсивность

$$I_\Sigma = 3I_0.$$

### Решение задачи 6

Заметим, что суммарный дипольный момент системы ориентирован вдоль прямой:

$$\mathbf{d} = d_1 \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_x + d_1 \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_y - d_2 \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_x +$$

$$+ d_2 \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z = qa \cos \omega t \cdot (\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) = qa\sqrt{2} \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_n,$$

где  $d_1 = d_2 = qa$  – модуль дипольного момента каждого из двух зарядов, а  $\mathbf{e}_n$  – единичный вектор, ориентированный в направлении  $(0, 1, 1)$ .

Тогда решение сводится к задаче о линейном диполе. Излучение отсутствует в направлении  $\mathbf{e}_n$ . Усредненная по времени интенсивность в единицу телесного угла равна

$$\langle dI/d\Omega \rangle = \frac{\langle \ddot{d}^2 \rangle \sin^2 \theta}{4\pi c^3} = \frac{(qa\omega^2 \sin \theta)^2}{4\pi c^3}.$$

### Решение задачи 7

Частоты, соответствующие синему и красному смещению (продольный Доплер-эффект), равны соответственно

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

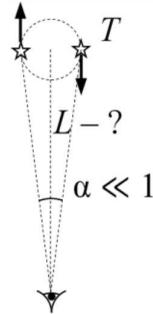
Из  $k = \frac{\omega_+}{\omega_-}$  находим  $\beta = \frac{k-1}{k+1}$ .

Радиус двойной звезды выражается через  $\beta$  как

$$R = \frac{\beta cT}{2\pi}.$$

Тогда искомое расстояние до двойной звезды равно

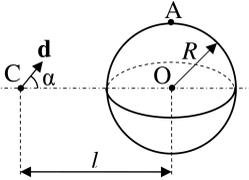
$$L = \frac{2R}{\alpha} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{cT}{\pi\alpha}.$$



2021/2022 учебный год

Контрольная работа 1.1, вариант 1

Решение задачи 1



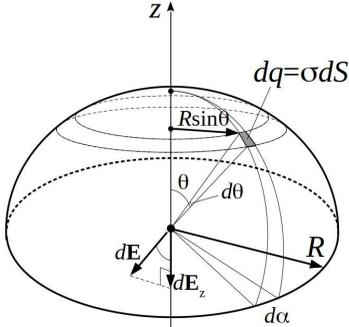
Решим вспомогательную задачу: найдем потенциал в центре сферы. По принципу суперпозиции он равен сумме потенциалов, создаваемых диполем и зарядами на сфере:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{(d \cdot l)}{l^3} + \iint \frac{\sigma dS}{R} = \frac{d \cos \alpha}{l^2} + \frac{1}{R} \iint \sigma dS = \frac{d \cos \alpha}{l^2} + \frac{Q}{R} = \\ &= \frac{d \cos \alpha}{l^2} + 0 = \frac{d \cos \alpha}{l^2}. \end{aligned}$$

Поле внутри полый замкнутой проводящей оболочки равно нулю. Поэтому все точки самой сферы и в объеме внутри нее находятся под одним и тем же потенциалом:

$$\varphi_A = \varphi_0 = \frac{d \cos \alpha}{l^2}.$$

Решение задачи 2



Выделим на сфере элемент площади  $dS$ . Он содержит заряд  $dq$ , который является точечным. Поле, создаваемое элементарным зарядом в центре полусферы, равно

$$\begin{aligned} dE &= \frac{dq}{R^2} = \frac{\sigma dS}{R^2} = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\alpha}{R^2} = \\ &= \sigma \sin \theta d\theta d\alpha, \end{aligned}$$

а его  $z$ -компонента равна

$$dE_z = dE \cos \theta = \sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\alpha.$$

Поле от всей полусферы получим интегрированием:

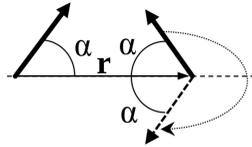
$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = \sigma \iint \sin \theta \cos \theta d\theta d\alpha = 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= 2\pi\sigma \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \pi\sigma. \end{aligned}$$

В силу аксиальной симметрии задачи  $E_z = E$ .

Сила на заряд  $q$  равна  $F = qE = \pi\sigma q$ .

### Решение задачи 3

Будем рассчитывать энергию взаимодействия как потенциальную энергию второго диполя в поле первого:



$$U = -(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_1)}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}$$

До поворота имеем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{d_1 d_2 \cos(\pi - 2\alpha)}{r^3} - 3 \frac{d_1 r \cos \alpha d_2 r (-\cos \alpha)}{r^5} = \\ &= -\frac{d_1 d_2 \cos(2\alpha)}{r^3} + 3 \frac{d_1 d_2 \cos^2 \alpha}{r^3} = \frac{d_1 d_2}{r^3} (3 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha), \end{aligned}$$

после поворота:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{d_1 d_2 \cos \pi}{r^3} - 3 \frac{d_1 r \cos \alpha d_2 r (-\cos \alpha)}{r^5} = -\frac{d_1 d_2}{r^3} + 3 \frac{d_1 d_2 \cos^2 \alpha}{r^3} = \\ &= \frac{d_1 d_2}{r^3} (3 \cos^2 \alpha - 1). \end{aligned}$$

Искомое отношение равно

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha} = \frac{3/2 - 1}{3/2} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}.$$

#### Решение задачи 4

Все точки проводящей сферы находятся под одним потенциалом, а заряды внутри нее распределены сферически симметрично. Поэтому внутри сферы поле изотропно, а потенциал распределен сферически симметрично:

$$r \leq R_2 : \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{3}\mathbf{r}, \quad \varphi(r) = -\frac{2\pi\rho}{3}r^2 + 2\pi\rho R_2^2;$$

$$R_2 \leq r < R_1 : \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r^3}\mathbf{r}, \quad \varphi(r) = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r},$$

где константа в выборе потенциала задана так, чтобы в отсутствие внешнего поля потенциал на бесконечности обращался в ноль.

Поскольку в проводящей сферической оболочке поле равно нулю, то граничное условие на внутренней границе сферы имеет вид

$$0 - E_n = -\frac{4\pi\rho R_2^3}{3R_1^2} = 4\pi\sigma_{in} \Rightarrow \sigma_{in} = -\frac{\rho R_2^3}{3R_1^2}.$$

Вид потенциала снаружи от сферы определяем, учитывая три обстоятельства:

1. Из теоремы Гаусса следует, что он должен содержать кулоновский член  $\frac{Q}{r} = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r}$ .
2. Под действием внешнего поля в сфере возникает поляризация заряда и сфера приобретает дипольный момент. Это наталкивает на мысль, что потенциал содержит дипольный

член  $\frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{r^2}$ .

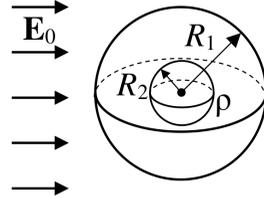
3. При  $r \rightarrow \infty$  поле должно стремиться к  $\mathbf{E}_0$ , а потенциал к  $-E_0 r \cos \theta$ .

Тогда ищем потенциал в виде

$$\varphi(r, \theta) = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r} + \frac{d \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta.$$

На сфере ( $r = R_1$ ) потенциал не должен зависеть от  $\theta$ :

$$\frac{d \cos \theta}{R_1^2} - E_0 R_1 \cos \theta = 0 \Rightarrow d = E_0 R_1^3.$$



Итак, снаружи от сферы

$$\varphi(r, \theta) = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r} + \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta,$$

$$\mathbf{E}(r, \theta) = -\nabla\varphi = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r^3} \mathbf{r} - \frac{R_1^3}{r^3} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^4} \mathbf{r} + \mathbf{E}_0.$$

Найденное поле всюду удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям. Поэтому полученное решение верно и единственно.

Радиальная компонента на сфере равна

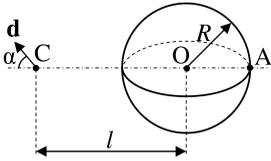
$$E_n = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3R_1^2} + 3E_0 \cos \theta.$$

Поскольку в проводящей сферической оболочке поле равно нулю, то граничное условие на внешней границе сферы имеет вид

$$E_n = 4\pi\sigma_{ext} \Rightarrow \sigma_{ext} = \frac{\rho R_2^3}{3R_1^2} + \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi}.$$

## Контрольная работа 1.1, вариант 2

### Решение задачи 1



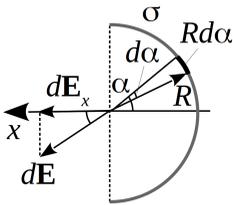
Задача решается аналогично задаче 1 вар. 1 (см. на стр. 75) с тем отличием, что теперь  $\frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{l})}{l^3} = -\frac{d \cos \alpha}{l^2}$ .

Тогда

$$\varphi_A = -\frac{d \cos \alpha}{l^2}.$$

### Решение задачи 2

Найдем поле цилиндра на оси. Выделим на полуцилиндре элементарную полоску углового размера  $d\alpha$ , положение которой задается углом  $\alpha$ . На оси элементарная полоска создает поле бесконечной заряженной нити с удельной плотностью заряда  $\sigma R d\alpha$ :



$$d\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\frac{2\sigma R d\alpha}{R} \mathbf{e}_R,$$

$x$ -компонента которого равна

$$dE_x = \frac{2\sigma R d\alpha}{R} \cos \alpha = 2\sigma \cos \alpha d\alpha.$$

Поле всего полуцилиндра находим интегрированием:

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sigma \cos \alpha d\alpha = 2\sigma \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\sigma.$$

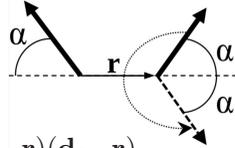
Из симметрии задачи следует, что полное поле на оси полуцилиндра направлено по  $x$ . В этом поле на единицу

длины нити действует сила

$$\frac{dF}{dz} = \varkappa E = 4\varkappa\sigma.$$

### Решение задачи 3

Будем рассчитывать энергию взаимодействия как потенциальную энергию второго диполя в поле первого:



$$U = -(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_1)}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5}$$

До поворота имеем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{d_1 d_2 \cos(\pi - 2\alpha)}{r^3} - 3 \frac{d_1 r \cos \alpha d_2 r (-\cos \alpha)}{r^5} = \\ &= -\frac{d_1 d_2 \cos(2\alpha)}{r^3} + 3 \frac{d_1 d_2 \cos^2 \alpha}{r^3} = \frac{d_1 d_2}{r^3} (3 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha), \end{aligned}$$

после поворота:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{d_1 d_2 \cos \pi}{r^3} - 3 \frac{d_1 r \cos \alpha d_2 r (-\cos \alpha)}{r^5} = -\frac{d_1 d_2}{r^3} + 3 \frac{d_1 d_2 \cos^2 \alpha}{r^3} = \\ &= -\frac{d_1 d_2}{r^3} + \frac{3d_1 d_2}{2r^3} = \frac{d_1 d_2}{r^3} (3 \cos^2 \alpha - 1). \end{aligned}$$

Искомое отношение равно

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{3 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha} = \frac{3/4 - 1}{3/4 + 1} = -\frac{1/4}{5/4} = -\frac{1}{5}.$$

### Решение задачи 4

Различие с вар. 1 зад. 4 (см. стр. 78) состоит только в том, что заряд проводящего шара будет равномерно распределен по его поверхности. Поэтому изменятся только поле

и потенциал в пределах шара:

$$r \leq R_2 : \mathbf{E} = 0, \quad \varphi(r) = 2\pi\rho R_2^2 - \frac{2\pi\rho}{3} R_2^2 = \frac{4\pi\rho}{3} R_2^2 = \frac{Q}{R_2};$$

$$R_2 \leq r < R_1 : \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r^3} \mathbf{r} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad \varphi(r) = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r} = \frac{Q}{r};$$

$$\begin{aligned} r > R_2 : \mathbf{E}(r, \theta) &= \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r^3} \mathbf{r} - \frac{R_1^3}{r^3} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^4} \mathbf{r} + \mathbf{E}_0 = \\ &= \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} - \frac{R_1^3}{r^3} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^4} \mathbf{r} + \mathbf{E}_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{4\pi\rho R_2^3}{3r} + \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta = \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{E_0 R_1^3 \cos \theta}{r^2} - E_0 r \cos \theta. \end{aligned}$$

Радиальная компонента на сфере равна

$$E_n = \frac{4\pi\rho R_2^3}{3R_1^2} + 3E_0 \cos \theta.$$

Поскольку в проводящей сферической оболочке поле равно нулю, то граничное условие на внешней границе сферы имеет вид

$$E_n = 4\pi\sigma_{ext} \Rightarrow \sigma_{ext} = \frac{\rho R_2^3}{3R_1^2} + \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi} = \frac{Q}{4\pi R_1^2} + \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi}.$$

## Контрольная работа 1.2, вариант 1

### Решение задачи 1

Нанесем на пластины заряды  $Q$  и  $-Q$  соответственно. Из геометрии задачи следует, что силовые линии  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$

параллельны оси  $z$ . А из условия  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$  следует, что  $D = \text{const}$ . Снаружи от конденсатора  $D = 0$ . С учетом гран. условия  $\Delta D_n = 4\pi\sigma$  получим  $D = 4\pi\sigma$ .

Тогда  $E(z) = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi\sigma \cos \frac{\pi z}{2d}}{\varepsilon_0}$  и для разности потенциалов между пластинами имеем

$$U = \int_{-d/2}^{d/2} E(z) dz = 2 \cdot \frac{2d}{\pi} \cdot \frac{4\pi\sigma \sin \frac{\pi d}{4d}}{\varepsilon_0} = \frac{8\sqrt{2}d\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Искомая емкость конденсатора равна

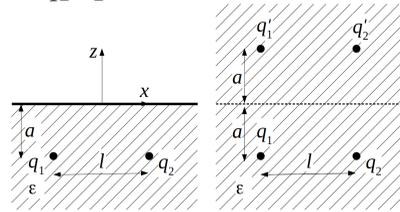
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 Q}{8\sqrt{2}d\sigma} = \frac{\varepsilon_0 S \sqrt{2}}{16d}.$$

### Решение задачи 2

Искомая сила определяется напряженностью поля в точке, где находится заряд  $q_2$ :  $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$ .

Поле в диэлектрике найдем по методу изображений. Система зарядов-изображений для расчета поля в диэлектрике состоит из точечных зарядов

$q'_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}q_1$  и  $q'_2 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}q_2$ , расположенных зеркально-симметрично к соответствующим зарядам-оригиналам относительно поверхности диэлектрика (см. рисунок).



Тогда компоненты искомой силы составляют

$$F_x = q_2 \cdot \left( \frac{q_1}{\varepsilon l^2} + \frac{(\varepsilon-1)q_1}{\varepsilon(\varepsilon+1)(l^2+4a^2)} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+4a^2}} \right),$$

$$F_z = -q_2 \cdot \left( \frac{(\varepsilon-1)q_2}{4\varepsilon(\varepsilon+1)a^2} - \frac{(\varepsilon-1)q_1}{\varepsilon(\varepsilon+1)(l^2+4a^2)} \cdot \frac{2a}{\sqrt{l^2+4a^2}} \right).$$

**Решение задачи 3**

Решение можно свести к решению родственной задачи (см. на стр. 56) с заменой  $\varepsilon_{1,2} \rightarrow \sigma_{1,2}$ ,  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{j}$ . Это следует из однотипности уравнений в объеме для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$ :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) = \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

и гран. условий

$$\Delta D_n = 0, \Delta j_n = 0, \Delta E_\tau = 0.$$

При этом для шара в диэлектрике  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , в проводнике  $\sigma \rightarrow \infty$ . Граница раздела в обеих задачах имеет одинаковую конфигурацию. Поэтому математическая постановка задачи остается той же. Тогда искомая плотность тока равна

$$\mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{j}^{(2)} = \mathbf{j}_1 - \frac{a^3}{r^3} \mathbf{j}_1 + 3 \frac{j_1 a^3 \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

Внутри шара плотность тока однородна. Ее можно найти как  $\mathbf{j}^{(1)}$  в точке  $r = a$ ,  $\cos \theta = 0$ :

$$\mathbf{j}^{(3)} = \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_1 + 3j_1 \mathbf{e}_r = 3\mathbf{j}_1.$$

**Решение задачи 4**

Пусть из электрода в среду течет полный ток  $I$ . Окружим электрод замкнутой поверхностью без сечения тонкого токоподводящего провода. Согласно теореме Гаусса

$$4\pi Q = \iint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) \approx \iint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\sigma} \iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{I}{\sigma},$$

откуда следует, что  $Q = \frac{I}{4\pi\sigma}$ .

Для определения потенциала на шаре решим задачу о поле в проводящей среде. Применим метод изображений. Заряд-изображение располагается в бесконечном пространстве с проводимостью  $\sigma$  симметрично заряду-оригиналу и несет на себе заряд  $Q$  (см. правый рисунок). Этим обеспечивается условие  $j_n = 0$  в точках границы раздела.

Потенциал на шаре по принципу суперпозиции равен

$$\varphi = \frac{Q}{2h} + \frac{Q}{a}.$$

Второй электрод находится под нулевым потенциалом на бесконечности. Тогда напряжение между электродами

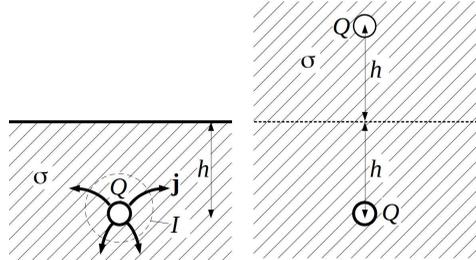
$$U = \frac{Q}{2h} + \frac{Q}{a},$$

а сопротивление заземления

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{2h} + \frac{1}{a} \right).$$

При увеличении  $h$  вдвое сопротивление уменьшится на

$$\Delta R = \frac{1}{16\pi\sigma h}.$$



## Контрольная работа 1.2, вариант 2

### Решение задачи 1

Пусть между пластинами ток  $I$ . Из геометрии задачи следует, что силовые линии  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  параллельны оси  $z$ . А из условия  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  следует, что  $j = \text{const}$ .

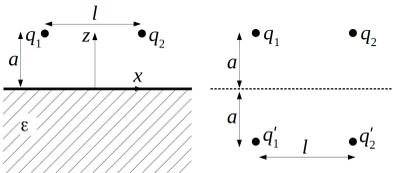
Тогда  $E(z) = \frac{j}{\sigma} = \frac{j \cos \frac{\pi z}{2d}}{\sigma_0}$  и для разности потенциалов между пластинами имеем

$$U = \int_{-d/2}^{d/2} E(z) dz = 2 \cdot \frac{2d}{\pi} \cdot \frac{j \sin \frac{\pi d}{4d}}{\sigma_0} = \frac{2\sqrt{2}dj}{\pi\sigma_0}.$$

Искомое сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2\sqrt{2}dj}{I\pi\sigma_0} = \frac{2\sqrt{2}d}{\pi\sigma_0 S}.$$

### Решение задачи 2



Решение проводится аналогично задаче 2 вар. 1 (см. на стр. 82) с той разницей, что сила рассчитывается в вакууме и величины

фиктивных зарядов теперь составляют  $q'_1 = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}q_1$  и  $q'_2 = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}q_2$  (см. рисунок).

Тогда компоненты искомой силы составляют

$$F_x = q_2 \cdot \left( \frac{q_1}{l^2} - \frac{(\varepsilon-1)q_1}{(\varepsilon+1)(l^2+4a^2)} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+4a^2}} \right),$$

$$F_z = q_2 \cdot \left( -\frac{(\varepsilon-1)q_2}{4(\varepsilon+1)a^2} - \frac{(\varepsilon-1)q_1}{(\varepsilon+1)(l^2+4a^2)} \cdot \frac{2a}{\sqrt{l^2+4a^2}} \right).$$

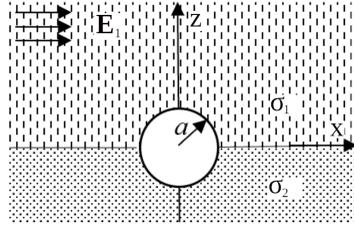
### Решение задачи 3

Под действием внешнего поля  $\mathbf{E}_1$  непроводящий шар приобретает дипольный момент, образованный свободными зарядами на границе с шаром.

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_1 - \frac{\mathbf{d}_1}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_2 - \frac{\mathbf{d}_2}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$



Из гран. условия  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$  получим  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1$ .  
Из условия  $j_r(a) = 0$ ,  $E_1 \cos \theta + 2\frac{d_1 \cos \theta}{a^3} = 0$  находим:

$$d_1 = -\frac{E_1 a^3}{2}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{E}_1 a^3}{2r^3} - 3\frac{(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r})a^3 \mathbf{r}}{2r^5},$$

$$\mathbf{j}^{(2)} = \sigma_2 \mathbf{E}^{(2)} = \sigma_2 \mathbf{E}^{(1)} = \sigma_2 \mathbf{j}_1 + \frac{\sigma_2 a^3}{2r^3} \mathbf{E}_1 - 3\frac{\sigma_2 E_1 \cos \theta}{2r^3} a^3 \mathbf{e}_r.$$

Внутри шара поле однородно. Его находим как, например, поле  $\mathbf{E}^{(1)}$  в точке  $r = a$ ,  $\theta = \pi/2$ :

$$\mathbf{E}^{(3)} = \mathbf{E}_1 - \frac{\mathbf{d}_1}{a^3} = \mathbf{E}_1 - \frac{\mathbf{d}_1}{a^3} = \mathbf{E}_1 + \frac{a^3 \mathbf{E}_1}{2a^3} = \frac{3\mathbf{E}_1}{2}.$$

Полученное решение удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, поэтому по теореме единственности оно единственно верно.

## Экзаменационная работа 1

### Решение задачи 1

Силловые линии магнитного поля параллельны оси соленоида. Тогда из теоремы Стокса для  $\mathbf{H}$  и контура в виде прямоугольника с двумя сторонами, проходящими вдоль прямых  $R = 0$  и  $R = \text{const} < a$ , следует, что  $H(R) = \text{const}$ .

Молекулярные токи в сердечнике имеют азимутальное направление. Поэтому поле снаружи от соленоида равно нулю. Тогда

$$H = \frac{4\pi n I}{c}, \quad B(R) = \mu(R)H = \frac{4\pi n I}{c} \cdot \left(1 + \frac{R}{a}\right).$$

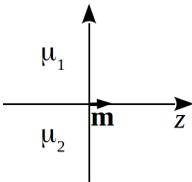
Поток поля через все витки соленоида равен

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \mathbf{B} d\mathbf{S}_\Sigma = \int_0^a \frac{4\pi N n I}{c} \cdot \left(1 + \frac{R}{a}\right) \cdot 2\pi R dR = \\ &= \frac{8\pi^2 n I N}{c} \cdot \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3a}\right) \Big|_0^a = \frac{20\pi^2 n^2 I a^2}{3c}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\Phi = \frac{L I}{c}, \quad \text{откуда } L = \frac{20\pi^2 n^2 a^2}{3}.$$

### Решение задачи 2



Ищем поле в виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3\frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5},$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \mu_1 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mu_2 \mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Поле удовлетворяет уравнениям  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  в объеме и граничным условиям  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ ,  $B_{1n} = B_{2n} = 0$  на границе раздела двух сред. По теореме единственности наше предположение о виде решения подтверждается \*.

### Решение задачи 3

Уравнение Максвелла с учетом токов смещения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{c \partial t}$$

в условиях нашей задачи принимает вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{c \partial t}.$$

Интегрируя по площади круга радиуса  $R$ , соосного с конденсатором, получим с учетом симметрии задачи

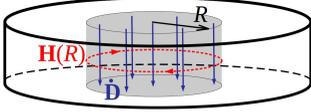
$$\iint \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = 2\pi R H(R) = \pi \varepsilon R^2 \frac{\partial U}{c \partial t},$$

---

\*В действительности записанным уравнениям Максвелла и граничным условиям удовлетворяет также любое решение вида  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = A \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ . Для единственности решения необходимо установить величину  $A$ . В случае  $\mu_{1,2} = 1$  очевидно, что  $A = 1$ . Но, поскольку в нашей геометрии изменение значений  $\mu_{1,2}$  сохраняет конфигурацию силовых линий, то поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  остается неизменным при любых их значениях. Действительно, применив теорему Стокса для замкнутого контура, совпадающего с некоторой силовой линией поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , получим

$$A \oint \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c} I,$$

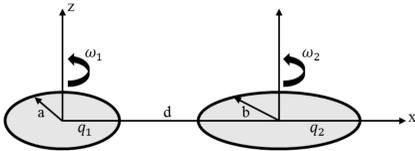
где правая (а следовательно, и левая) часть от свойств среды не зависит ( $I$  – немолькулярный ток, образующий магнитный диполь и текущий в сечении заданного контура).



откуда

$$\mathbf{H}(R) = -\frac{\varepsilon\omega R}{2cd}U_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_\alpha.$$

### Решение задачи 4



Вращающиеся заряженные диски можно рассматривать как неподвижные с циркулирующими токами. Благодаря токам

диски приобретают магнитные моменты. Вычислим магнитный момент вращающегося диска. Выделим на диске кольцо радиуса  $R$  толщиной  $dR$ . Эффективный ток по кольцу равен

$$dI = \frac{\sigma \cdot 2\pi R dR}{T} = \frac{2\pi\sigma R dR \cdot \omega}{2\pi} = \sigma\omega R dR,$$

а его магнитный момент

$$dm = \frac{S dI}{c} = \frac{\pi R^2 \sigma \omega R dR}{c} = \frac{\pi \sigma \omega R^3 dR}{c}.$$

Магнитный момент всего диска равен:

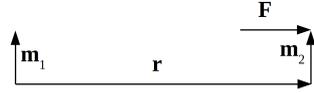
$$m = \int dm = \int_0^{R_d} \frac{\pi \sigma \omega R^3 dR}{c} = \frac{\pi R_d^2 \sigma \omega R_d^2}{4c} = \frac{q\omega R_d^2}{4c}.$$

Для каждого из двух дисков

$$m_1 = \frac{q_1 \omega_1 a^2}{4c}, \quad m_2 = \frac{q_2 \omega_2 b^2}{4c},$$

оба ориентированы по вектору угловой скорости.

Сила со стороны первого диполя на второй равна (см. аналогичную электростатическую задачу 2.50 из [1])



$$\mathbf{F} = 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)}{r^5} \mathbf{r} + 3 \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{m}_1 + 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{m}_2 - 15 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{r} =$$

$$= 3 \frac{m_1 m_2}{d^5} \mathbf{r} + 0 + 0 + 0 = \frac{3q_1 q_2 \omega_1 \omega_2 a^2 b^2}{16d^4 c^2} \mathbf{e}_r.$$

В случае одноименных  $q_1, q_2$  возникает отталкивание.

### Решение задачи 5

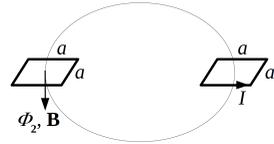
Пусть по первому витку ток  $I$ . Магнитный момент витка будет  $m = \frac{Ia^2}{c}$ , а поле в центре второго витка:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\mathbf{m}}{l^3} + 0 = -\frac{\mathbf{m}}{l^3},$$

направлено по нормали к плоскости второго витка.

С учетом  $a \ll l$  поток поля через сечение второго витка равен

$$\Phi_2 = \frac{m}{l^3} \cdot a^2 = \frac{Ia^4}{cl^3}.$$

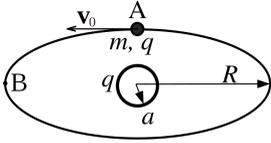


Из условия  $\Phi_2 = \frac{L_{12}I}{c}$  находим  $L_{12} = \frac{a^4}{l^3}$ .

### Решение задачи 6

Потенциальная энергия бусинки определяется потенциалом, создаваемым в пространстве заряженным кольцом. Это кольцо обладает зарядом, нулевым дипольным моментом и ненулевыми квадрупольными моментами. Вклад заряда в потенциальную энергию одинаковый во всех точках окружности. Квадрупольная добавка в потенциал равна

$$\varphi^{(2)}(\theta) = \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{4R^3} qa^2.$$



В точке А

$$\varphi_A^{(2)} = \varphi^{(2)}(0) = -\frac{2qa^2}{4R^3} = \varphi_{min}.$$

$$\text{В точке В } \varphi_B^{(2)} = \varphi^{(2)}(\pi/2) = \frac{qa^2}{4R^3} = \varphi_{max}.$$

Бусинка дойдет до точки В, если ее кинетическая энергия в точке А будет для этого достаточной:

$$\frac{mv_A^2}{2} \geq U_B - U_A = \frac{3q^2a^2}{4R^3},$$

откуда критическая скорость \*

$$v_0 = qa\sqrt{\frac{3}{2mR^3}}.$$

С учетом уточнения (см. сноску) этой скорости хватит бусинке, чтобы дальше двигаться без остановок.

\*Истинная скорость немного отличается от найденной с учетом следующих членов мультипольного разложения потенциала. Определим знак поправки. Применим метод полиномов Лежандра. На оси кольца потенциал равен

$$\varphi(z) = \frac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{q}{z} - \frac{qa^2}{2z^3} + \frac{3qa^4}{8z^5} - \dots$$

Слагаемое  $\sim \frac{1}{z^5}$  соответствует члену с полиномом 4-й степени в разложении по полиномам Лежандра:

$$\varphi^{(4)}(r, \cos \theta) = \frac{B_4}{r^5} P_4(\cos \theta) = \frac{3qa^4}{8r^5} \cdot \frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3}{8}.$$

$$\varphi_B^{(4)} - \varphi_A^{(4)} = \varphi^{(4)}(R, \cos \pi/2) - \varphi^{(4)}(R, \cos 0) = \frac{3qa^4}{64R^5} (3 - 8) < 0.$$

Поэтому истинная разность потенциалов между точками А и В немного меньше полученной в квадрупольном приближении.

**Решение задачи 7**Способ 1.

Пусть до внесения шарика в конденсатор на пластинах содержатся заряды  $+Q$  и  $-Q$  и конденсатор отсоединен от источника напряжения. При внесении шарика в однородное поле  $E = 4\pi\sigma = \frac{4\pi Q}{S}$  конденсатора шарик приобретет дипольный момент  $\mathbf{p} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}a^3\mathbf{E}$  (см. формулу (2.18) в [3]). Потенциальная энергия упругого диполя составит

$$U = -\frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p})}{2} = -\left(\frac{4\pi Q}{S}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cdot \frac{a^3}{2}. \quad (1)$$

Работа на создании индуцированных зарядов на пластинах конденсатора пренебрежимо мала, так как по условию  $a \ll d$ . Тогда выражение (1) описывает работу на изменении состояния системы, то есть изменение ее энергии. С другой стороны это изменение равно

$$\delta W = \delta \left( \frac{Q^2}{2C} \right) = -\frac{Q^2}{2C^2} \delta C = -\frac{Q^2}{2} \left( \frac{4\pi d}{S} \right)^2 \delta C. \quad (2)$$

Приравняв правые части (1) и (2), находим

$$\delta C = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \cdot \frac{a^3}{d^2}.$$

Способ 2.

Условие  $a \ll d$  позволяет обобщить задачу на случай  $N$  шариков, расположенных так, что один шарик не влияет на дипольный момент другого. Тогда величина  $\delta C$  аддитивна по  $N$ .

С другой стороны в случае достаточно большого числа  $N$  из месячных заданий известно выражение для эффективной диэлектрической проницаемости прослойки конденсатора:

$$\varepsilon_{eff}(N) = 1 + 4\pi n \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 = 1 + \frac{4\pi N a^3 (\varepsilon - 1)}{Sd(\varepsilon + 2)}.$$

Тогда изменение емкости от внесения  $N$  шариков равно

$$\delta C(N) = \frac{4\pi N a^3 (\varepsilon - 1)}{Sd(\varepsilon + 2)} C_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{N a^3}{d^2}.$$

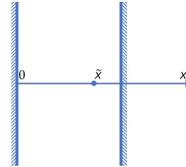
Для случая  $N = 1$  получим

$$\delta C = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{a^3}{d^2}.$$

## Контрольная работа 2.1, вариант 1

### Решение задачи 1

Заданное поле не зависит от  $z$ . Отсюда следует, что распределение э-м поля представляет собой суперпозицию стоячих волн



$$E_y(x, y, t) = (A_y \sin k_x x + B_y \cos k_x x) \cdot \sin \omega t,$$

$$E_z(x, y, t) = (A_z \sin k_x x + B_z \cos k_x x) \cdot \cos \omega t.$$

Граничное условие  $E_y = E_z = 0$  при  $x = 0$  дает

$$E_y(x, y, t) = A_y \sin \omega t \sin k_x x,$$

$$E_z(x, y, t) = A_z \cos \omega t \sin k_x x.$$

Константы найдем из условия на величину  $\mathbf{E}$  при  $x = \tilde{x}$ :

$$E_y(\tilde{x}, y, t) = A_y \sin \omega t \sin k_x \tilde{x} = b \sin \omega t \Rightarrow A_y = \frac{b}{\sin k_x \tilde{x}},$$

$$E_z(\tilde{x}, y, t) = A_z \cos \omega t \sin k_x \tilde{x} = a \cos \omega t \Rightarrow A_z = \frac{a}{\sin k_x \tilde{x}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(x, y, t) = \frac{b \sin k_x x}{\sin k_x \tilde{x}} \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_y + \frac{a \sin k_x x}{\sin k_x \tilde{x}} \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z,$$

где  $k_x = \frac{\omega}{c}$ .

## Решение задачи 2

Линейно поляризованную волну можно представить в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн. Эти волны не интерферируют как взаимно ортогональные, поэтому их интенсивности складываются. Тогда для отраженной волны имеем

$$I_1 = I_1^{TE} + I_1^{TM} = (E_1^{TE})^2 + (E_1^{TM})^2 = (\xi E_0 \cos \alpha)^2 + (\zeta E_0 \sin \alpha)^2,$$

где  $\xi = -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2)}$ ,  $\zeta = \frac{\text{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_0 + \theta_2)}$ ,  $\alpha$  – угол между вектором

$\mathbf{E}$  и нормалью к плоскости падения волны.

Коэффициент отражения равен

$$R = \frac{I_1}{I_0} = \frac{(\xi E_0 \cos \alpha)^2 + (\zeta E_0 \sin \alpha)^2}{E_0^2} = (\xi \cos \alpha)^2 + (\zeta \sin \alpha)^2.$$

Условие экстремума:

$$R'_\alpha = -2\xi^2 \cos \alpha \sin \alpha + 2\zeta^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку  $\zeta^2 < \xi^2$ , то  $R_{max} = \xi^2$  и  $R_{min} = \zeta^2$ .

Тогда искомое отношение записывается как

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} = \left( \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} \cdot \frac{\sin(\theta_0 + \theta_2)}{\sin(\theta_0 - \theta_2)} \right)^2 = \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)}. \quad (1)$$

Осталось найти  $\theta_2$ . Из закона преломления

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

находим

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_0 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Подставляем в записанные выше выражения:

$$\frac{\cos \theta_0 \cos \theta_2 - \sin \theta_0 \sin \theta_2}{\cos \theta_0 \cos \theta_2 + \sin \theta_0 \sin \theta_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$$

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3+2\sqrt{3}+1} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

### Решение задачи 3

Введем обозначения  $\delta = k_0 d$  и  $A = \frac{4\pi}{c} \sigma^*$ . С учетом  $\mathbf{H}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i$  и  $\Delta H = \frac{4\pi}{c} \sigma^* E$  граничные условия для тангенциальных компонент  $E$  и  $H$  на пластинах принимают вид:

$$\begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2 + E_3 \\ E_0 - E_1 &= E_2 - E_3 + A \cdot (E_0 + E_1) \\ E_2 e^{i\delta} + E_3 e^{-i\delta} &= E_4 \\ E_2 e^{i\delta} - E_3 e^{-i\delta} &= E_4 + A \cdot E_4. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом  $e^{i\delta} = e^{-i\delta} = -1$  различие со случаем  $d = 0$  сводится к замене  $E_4 \rightarrow -E_4$ . После введения для этого

поля специального обозначения  $\tilde{E}_4 = -E_4$  матрица системы примет такой же вид, как и в случае  $d = 0$ . Но тогда решение для полей с точностью до знака будет совпадать со случаем  $d = 0$ , а для интенсивностей совпадение будет абсолютным.

Тогда задача сводится к случаю одной проводящей плоскости с эффективной проводимостью  $\sigma_{eff} = 2\sigma^*$  и можно воспользоваться ответом к задаче 1.28 из [2]:

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{4\pi}{c}\sigma^*\right)^2}.$$

#### Решение задачи 4

Закон дисперсии в прямоугольном волноводе:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2},$$

где  $\frac{\omega_0^2}{c^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ .

Для фазовой и групповой скоростей имеем:

$$\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} = \frac{\omega^2}{c^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = 3, \quad u_{\text{гр}} = \frac{c}{v_{\Phi}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2 = \frac{3c^2}{2} \cdot 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{3c^2}{4} \cdot \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2.$$

Искомая частота равна

$$f = \frac{\sqrt{3}c}{2a} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 3} = 8.66 \cdot 10^9 \text{ Герц.}$$

## Контрольная работа 2.1, вариант 2

### Решение задачи 1

Поскольку заданное поле не зависит от  $z$ , то распределение э-м поля представляет собой суперпозицию стоячих волн

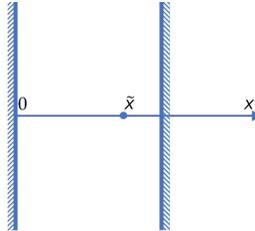
$$H_y(x, y, t) = (A_y \sin k_x x + B_y \cos k_x x) \cdot \sin \omega t,$$

$$H_z(x, y, t) = (A_z \sin k_x x + B_z \cos k_x x) \cdot \cos \omega t.$$

Граничное условие  $E_y = E_z = 0$  при  $x = 0$  дает

$$H_y(x, y, t) = B_y \sin \omega t \cos k_x x,$$

$$H_z(x, y, t) = B_z \cos \omega t \cos k_x x.$$



Константы найдем из условия на величину  $\mathbf{H}$  при  $x = \tilde{x}$ :

$$H_y(\tilde{x}, y, t) = B_y \sin \omega t \cos k_x \tilde{x} = b \sin \omega t \Rightarrow B_y = \frac{b}{\cos k_x \tilde{x}},$$

$$H_z(\tilde{x}, y, t) = B_z \cos \omega t \cos k_x \tilde{x} = a \cos \omega t \Rightarrow B_z = \frac{a}{\cos k_x \tilde{x}}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{H}(x, y, t) = \frac{b \cos k_x x}{\cos k_x \tilde{x}} \sin \omega t \cdot \mathbf{e}_y + \frac{a \cos k_x x}{\cos k_x \tilde{x}} \cos \omega t \cdot \mathbf{e}_z,$$

где  $k_x = \frac{\omega}{c}$ .

### Решение задачи 2

Из решения задачи 2 вар. 1 (см. 95)

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} = \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)}.$$

Из закона преломления

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

находим

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sin \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Подставляем в записанные выше выражения:

$$\frac{\cos \theta_0 \cos \theta_2 - \sin \theta_0 \sin \theta_2}{\cos \theta_0 \cos \theta_2 + \sin \theta_0 \sin \theta_2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{R_{min}}{R_{max}} &= \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{8-4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7 - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

### Решение задачи 3

(Способ предложен студентом 2-го курса ФФ Виталием Коржем)

Рассчитаем амплитуду отраженной волны с учетом многлучевого отражения. Волна, падающая на переднюю пластину, разделяется на прошедшую  $\tau E_0$  и отраженную  $\rho E_0$ . Первая прошедшая волна после отражения от нижней пластины частично проходит через переднюю пластину и набирает фазу  $k\lambda = 2\pi$ . Каждая следующая волна, проходящая через верхнюю пластину, испытывает по сравнению с

предыдущей двукратное отражение. Таким образом, суммарная отраженная волна выражается суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \rho^2$ :

$$E_1 = \rho E_0 + \frac{\rho \tau^2 E_0}{1 - \rho^2} = \rho E_0 \left( 1 + \frac{\tau^2}{1 - \rho^2} \right).$$

Подставив  $\rho = -\frac{1}{\frac{c}{2\pi\sigma^*} + 1}$ ,  $\tau = \frac{1}{1 + \frac{c}{2\pi\sigma^*}}$ , получим

$$E_1 = -\frac{E_0}{1 + \frac{c}{4\pi\sigma^*}}$$

#### Решение задачи 4

Закон дисперсии в прямоугольном волноводе:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_z^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

где  $\frac{\omega_0^2}{c^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ .

Для фазовой и групповой скоростей имеем:

$$\frac{v_{\Phi}^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2 k_z^2} = \frac{\omega^2}{c^2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = 2, \quad u_{\text{гр}} = \frac{c}{v_{\Phi}} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 = 2c^2 \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$$

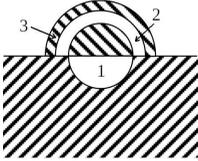
Искомая частота

$$f = \frac{c}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 3} = 7.07 \cdot 10^9 \text{ Герц.}$$

## Контрольная работа 2.2, вариант 1

### Решение задачи 1

Суммарный вклад в  $E_P$  первой и второй зон Френеля (уменьшенных вдвое по углу) равен нулю. Вклад остающихся зон Френеля с номерами от 4 до  $\infty$  (также уменьшенных вдвое по углу), по принципу Бабинне, равен



$$\hat{E}_P = \frac{1}{2} \cdot (\hat{E}_0 - \hat{E}'_P) = \frac{1}{2} \cdot (\hat{E}_0 - 2\hat{E}_0) = -\frac{\hat{E}_0}{2}.$$

Тогда искомая интенсивность составляет

$$I_P = \frac{I_0}{4}.$$

### Решение задачи 2

При отражении от верхней границы пленки бензина возникает скачок по фазе на  $\pi$ , а от нижней – нет. Поэтому условие на максимум отражения

$$2n_\delta \delta = \frac{\lambda_0}{2}(2m - 1), \quad \delta = \frac{\lambda_0}{4n_\delta}(2m - 1).$$

Для  $m' \neq m$  максимум наблюдается на другой длине волны  $\lambda'$ :

$$\delta = \frac{\lambda'}{4n_\delta}(2m' - 1).$$

Тогда имеем

$$\lambda' = \frac{2m - 1}{2m' - 1} \lambda_0.$$

Если  $m = 1$ , то  $\lambda' = \frac{780}{2m' - 1} = \left\{ \frac{780}{3}, \frac{780}{4}, \dots \right\}$ . Видно, что в видимый диапазон попадает только  $\lambda = \lambda_0 = 780$  нм.

Если  $m = 2$ , то  $\lambda' = \frac{3 \cdot 780}{2m' - 1} = \left\{ \frac{3 \cdot 780}{1}, \frac{3 \cdot 780}{5}, \frac{3 \cdot 780}{7}, \dots \right\}$ . Видно, что в этом случае в видимый диапазон попадает также  $\lambda = \frac{3 \cdot 780}{5} = 468$  нм - это противоречит заданному условию. При  $m > 2$  число длин волн, на которых наблюдается максимум отражения, еще увеличится. Поэтому толщина пленки бензина задается однозначно значением  $m = 1$ :

$$\delta = \frac{\lambda_0}{4n_6}.$$

Для проходящей волны, отраженной от нижней, а затем от верхней границы пленки, скачка по фазе при отражении не возникает ( $1.3 < 1.4$ ,  $1 < 1.4$ ). Поэтому условие на максимум пропускания:

$$\lambda = \frac{2n_6\delta}{m''} = \frac{\lambda_0}{2m''}.$$

В спектре пропускания в видимом диапазоне наблюдается единственный максимум ( $m'' = 1$ ):

$$\lambda = \frac{780}{2} = 390 \text{ нм.}$$

### Решение задачи 3

Интерференция возникает между прямой волной и волной, отраженной от сферического зеркала. Последнюю удобно рассматривать как исходящую из изображения, но с дополнительным сдвигом по фазе на  $\pi$  вследствие отражения от металлической поверхности.

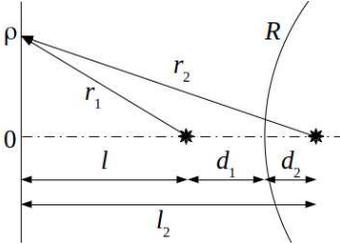
Матрица отражения:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}.$$

Положение изображения находим по формуле

$$d_2 = -\frac{d_1 m_{11} + m_{12}}{d_1 m_{21} + m_{22}} = -\frac{d_1}{-\frac{2d_1}{R} - 1} = \frac{d_1 R}{2d_1 + R}.$$

В параксиальном приближении длина хода прямого луча равна



$$r_1 \approx l + \frac{\rho^2}{2l},$$

отраженного

$$r_2 \approx l_2 + \frac{\rho^2}{2l_2} + \frac{\lambda}{2} + \delta r,$$

где  $l_2 = l + d_1 + d_2$ , а  $\delta r = d_1 - d_2$  \*.

Условие максимума:

$$r_2 - r_1 = 2d_1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{l_2 - l}{2l \cdot l_2} \rho^2 = 2d_1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{d_1 + d_2}{2l \cdot l_2} \rho^2 = m\lambda.$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{2l \cdot l_2}{d_1 + d_2} \left( 2d_1 - \left( m - \frac{1}{2} \right) \lambda \right)}.$$

\* На участке от изображения источника до сферы фаза не описывается выражением  $kr - \omega t = \frac{2\pi r}{\lambda} - \omega t$ , поскольку длина волны “по ту сторону сферического зеркала” отлична от  $\lambda$ . В то же время отраженная волна эквивалентна исходящей от точечного монохроматического источника. Это означает, что фаза, с которой излучает этот источник, не зависит от точки наблюдения. Она отличается от фазы, с которой излучает оригинальный источник, и разность фаз удобнее всего найти для лучей, приходящих в точку  $\rho = 0$ :

$$\delta\phi = k\delta r = k(d_1 - d_2).$$

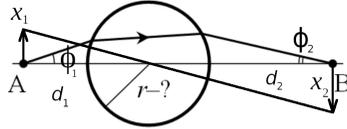
### Решение задачи 4

Матрица преобразования луча от предмета до изображения удовлетворяет равенству

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ a_{21} & 1/K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{pmatrix},$$

откуда получим коэффициент увеличения

$$K = -\frac{\phi_1}{\phi_2}.$$



Если придать предмету ненулевой размер по  $x$ , то положение изображения по  $z$  и коэффициент увеличения не изменятся. Рассмотрим луч, проходящий через центр линзы:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\phi_1}{\phi_2} & 0 \\ a_{21} & -\frac{\phi_2}{\phi_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Для этого луча коэффициент увеличения удовлетворяет пропорции

$$K = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{d_2 + r}{d_1 + r} = -\frac{\phi_1}{\phi_2},$$

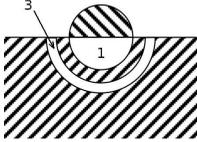
откуда искомый радиус равен

$$r = \frac{d_1 \phi_1 - d_2 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}.$$

## Контрольная работа 2.2, вариант 2

### Решение задачи 1

Суммарный вклад в  $E_P$  1-й и 3-й зон Френеля (уменьшенных вдвое по углу) равен  $\frac{2\hat{E}_0}{2} + \frac{2\hat{E}_0}{2} = 2\hat{E}_0$ . Вклад остающихся зон Френеля с номерами от 2 до  $\infty$  (также уменьшенных вдвое по углу), по принципу Бабинне, равен



$$\hat{E}_P = \frac{1}{2} \cdot (\hat{E}_0 - \hat{E}'_P) = \frac{1}{2} \cdot (\hat{E}_0 - 2\hat{E}_0) = -\frac{\hat{E}_0}{2}.$$

Суммарная амплитуда поля в точке  $P$  равна

$$\hat{E}_P = 2\hat{E}_0 - \frac{\hat{E}_0}{2} = \frac{3}{2}\hat{E}_0.$$

Тогда искомая интенсивность составляет

$$I_P = \frac{9I_0}{4}.$$

### Решение задачи 2

При отражении как от верхней, так и от нижней границы пленки спирта возникает скачок по фазе на  $\pi$ . Поэтому условие на максимум отражения

$$2n_{\text{сп}}\delta = m\lambda_0, \quad \delta = \frac{\lambda_0}{2n_{\text{сп}}}m.$$

Для  $m' \neq m$  максимум наблюдается на другой длине волны  $\lambda'$ :

$$\delta = \frac{\lambda'}{2n_{\text{сп}}}m'.$$

Тогда имеем

$$\lambda' = \frac{m}{m'} \lambda_0.$$

Если  $m = 1$ , то  $\lambda' = \frac{385}{m'} = \{\frac{385}{2}, \frac{385}{3}, \dots\}$ . Видно, что в видимый диапазон попадает только  $\lambda = \lambda_0 = 385$  нм.

Если  $m = 2$ , то  $\lambda' = \frac{2 \cdot 385}{m'} = \{\frac{2 \cdot 385}{1}, \frac{2 \cdot 385}{3}, \frac{2 \cdot 385}{4}, \dots\}$ . Видно, что в этом случае в видимый диапазон попадает также  $\lambda = 2 \cdot 385 = 770$  нм – это противоречит заданному условию. При  $m > 2$  число длин волн, на которых наблюдается максимум отражения, еще увеличится. Поэтому толщина пленки спирта задается однозначно значением  $m = 1$ :

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2n_{\text{сп}}}.$$

Для проходящей волны, отраженной от нижней, а затем от верхней границы пленки, скачок по фазе возникает только при отражении от нижней границы ( $1.36 < 1.5$ ,  $1 < 1.36$ ). Поэтому условие на максимум пропускания:

$$\lambda = \frac{4n_{\text{сп}}\delta}{2m'' - 1} = \frac{2\lambda_0}{2m'' - 1}.$$

В спектре пропускания в видимом диапазоне наблюдается единственный максимум ( $m'' = 1$ ):

$$\lambda = \frac{2 \cdot 385}{1} = 770 \text{ нм.}$$

### Решение задачи 3

Единственное отличие от задачи 3 вар. 1 (см. стр. 102) – в знаке при радиусе кривизны  $R$ :

$$d_2 = -\frac{d_1 m_{11} + m_{12}}{d_1 m_{21} + m_{22}} = -\frac{d_1}{\frac{2d_1}{R} - 1} = \frac{d_1 R}{R - 2d_1}.$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{2l \cdot l_2}{d_1 + d_2} \left( 2d_1 - \left( m - \frac{1}{2} \right) \lambda \right)}.$$

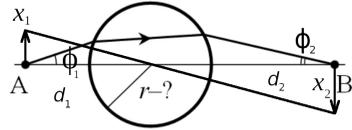
### Решение задачи 4

Оптическая схема идентична заданной в задаче 4 вар. 1 (см. на стр. 103). Используем соотношение

$$\frac{d_2 + r}{d_1 + r} = \frac{\phi_1}{\phi_2},$$

откуда

$$d_2 = \frac{(d_1 + r)\phi_1}{\phi_2} - r.$$



## Экзаменационная работа 2

### Решение задачи 1

Мощность потерь на излучение \*:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2|\ddot{d}|^2}{3c^3}.$$

---

\*Вопрос о возможности излучения зарядом в гравитационном поле является дискуссионным. Это заведомо невозможно в однородном поле, поскольку противоречит принципу эквивалентности общей теории относительности. Движение в лифте, движущемся ускоренно, принципиально неотличимо от падения в гравитационном поле. Другими словами, два шарика, заряженный и нейтральный, должны падать с одинаковым ускорением в однородном гравитационном поле. Это, вероятно, не так в неоднородном поле (В. Л. Гинзбург, УФН, т. 98, в. 3, 1969; Р. Пайерлс «Сюрпризы в теоретической физике, М: Наука, 1988, с. 1968»)(см. прилагаемую статью В. Л. Гинзбурга в УФН).

Далее учтем, что с одной стороны

$$\ddot{d} = Qa = \frac{Qv^2}{r},$$

с другой

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = -\frac{mv^2}{2}, \quad v^2 = \gamma \frac{M}{r}.$$

Тогда

$$-d\mathcal{E} = \gamma \frac{Mm}{2} d\frac{1}{r} = 2\frac{Q^2v^4}{3r^2c^3} dt,$$

$$-\gamma \frac{Mm}{2} \frac{dr}{r^2} = 2\gamma 2 \frac{Q^2M^2}{3r^4c^3} dt,$$

$$dt = -\frac{3mc^3}{4\gamma Q^2M} r^2 dr.$$

Время падения найдем интегрированием:

$$t = -\gamma \frac{3mc^3}{4\gamma Q^2M} \int_R^0 r^2 dr = \frac{mR^3c^3}{4\gamma Q^2M}.$$

С учетом  $\gamma \frac{M}{R^3} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 = (2 \cdot 10^{-7})^2 \text{ c}^{-1}$

$$t = \frac{mc^3}{4\omega^2Q^2} = \frac{6 \cdot 10^{27} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2}{4 \cdot (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot (10^{12})^2} = 10^{48} \text{ c}.$$

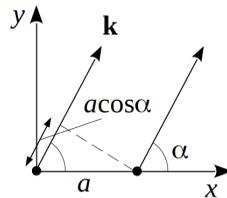
### Решение задачи 2

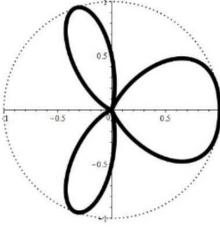
Поместим начало системы координат в положение левого вибратора. Тогда две волны, приходящие в приемник, записываются как

$$\hat{E}_1 = E_0 e^{i(kr - \omega t)},$$

$$\hat{E}_2 = E_0 e^{i(kr - \omega t - a \cos \alpha + \psi)},$$

$$\hat{E}_\Sigma = E_0 e^{i(kr - \omega t)} (1 + e^{i(\psi - ka \cos \alpha)}).$$





Интенсивность составит

$$I = |\hat{E}_\Sigma|^2 = 2E_0^2(1 + \cos(\psi - ka \cos \alpha)) = \\ = 4 \cos^2 \frac{\psi - ka \cos \alpha}{2}.$$

Из условия первого максимума  $\alpha = 0$  получим

$$\psi - ka \cos \alpha = 0, \quad \psi = ka, \quad \frac{\psi - ka \cos \alpha}{2} = ka \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Нулям и другим максимумам интенсивности соответствуют значения параметра  $ka \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , равные

$$ka \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (1-й нуль),} \\ ka \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \pi \text{ (2-й максимум),} \quad (1) \\ ka \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ (2-й нуль).}$$

Для второго нуля интенсивности имеем

$$ka \sin^2 \frac{\alpha}{2} = ka \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{3\pi}{2k} = \frac{3\lambda}{4}, \quad \psi = ka = \frac{3\pi}{2}.$$

Подставим найденное  $ka$  в (1) и установим направления промежуточных нуля и максимума:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ — первый нуль,} \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ — второй максимум.}$$

**Решение задачи 3**

Первая зона, обрезанная напополам по углу, дает вклад

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_0.$$

Вторая зона в отсутствие пластинки давала бы вклад

$$\hat{E}_2 = -2\hat{E}_0.$$

Пластинка придает вектору  $\hat{E}_2$  фазу  $\phi = k(n - 1)\delta$ .

Суммарное поле в точке наблюдения представлено на диаграмме Френеля в виде вектора

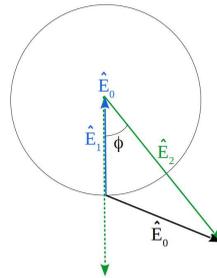
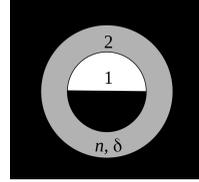
$$\hat{E} = \hat{E}_0 - 2\hat{E}_0 e^{i\phi},$$

квадрат модуля которого равен

$$\begin{aligned} |\hat{E}|^2 &= E_0^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \phi) = \\ &= E_0^2 \cdot (5 + 4 \cos \phi). \end{aligned}$$

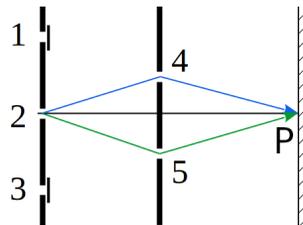
Искомая интенсивность равна

$$I = (5 + 4 \cos(k(n - 1)\delta))I_0 = \left(5 + 4 \cos \frac{2\pi(n - 1)\delta}{\lambda}\right) I_0.$$



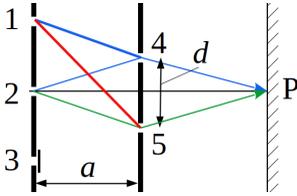
**Решение задачи 4**

Пусть  $E_0$  – поле в точке Р при открытых 2-й и 4-й щелях. Тогда при первом измерении поле в точке Р составит  $2E_0$ , поскольку оптические пути лучей 2-4-Р и 2-5-Р одинаковые.



При втором измерении поле в точке Р составит

$$\hat{E}_{II} = 2E_0 + (E_0 + E_0 e^{i\phi}) = (3 + e^{i\phi})E_0,$$



где  $\phi = k(r_{1-5} - r_{1-4})$  – фаза, набегающая у луча 1-5-Р за счет разности длин отрезков 1-4 и 1-5.

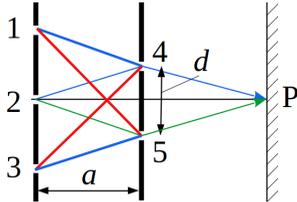
Квадрат модуля  $\hat{E}_{II}$  равен

$$|\hat{E}_{II}|^2 =$$

$$= (3^2 + 1^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \phi) E_0^2 = (10 + 6 \cos \phi) E_0^2.$$

Находим  $\cos \phi$  из условия

$$\frac{I_{II}}{I_I} = \frac{|\hat{E}_{II}|^2}{|\hat{E}_I|^2} = \frac{10 + 6 \cos \phi}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow \cos \phi = 0.5$$



При третьем измерении поле в точке Р составляет (вклад в поле щели 3 такой же, как от щели 1)

$$\hat{E}_{III} =$$

$$= 3E_0 + e^{i\phi} E_0 + (E_0 + E_0 e^{i\phi}) = (4 + 2e^{i\phi}) E_0$$

а квадрат модуля

$$|\hat{E}_{III}|^2 = (4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos \phi) E_0^2 = (20 + 16 \cdot 0.5) E_0^2 =$$

$$= 28 E_0^2 = 7 \cdot E_I^2.$$

Соответственно интенсивность  $I_{III} = 7I_I$ .

### Решение задачи 5

Магнитное поле, излучаемое электроном, выражается как

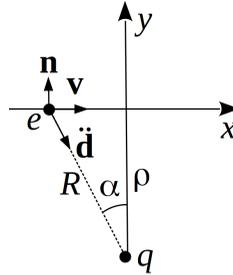
$$\mathbf{H}(r) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}.$$

Для излучения в направлении оси  $y$  амплитуда поля пропорциональна  $x$ -проекции ускорения и силы, действу-

ющей на электрон:

$$F = \frac{qe}{R^2} = ma, \quad F_x = \frac{qex}{R^3},$$

$$H_y(r) = \frac{\ddot{d}_x}{c^2 r} \propto \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$



Из условия экстремума находим искомую величину  $x$ :

$$\frac{dH_y}{dx} = \frac{(x^2 + \rho^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2 + \rho^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot x}{(x^2 + \rho^2)^3} = 0,$$

$$x^2 + \rho^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{\rho^2}{2}, \quad x = \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

### Решение задачи 6

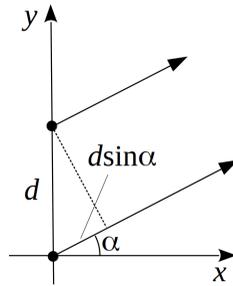
Амплитуда волны, исходящей от дипольного излучателя и принимаемой приемником в момент времени  $t$ , записывается как

$$E(t) = E_0 e^{i(-\omega(t-R/c)+\phi_0)},$$

где  $R$  – расстояние от источника до приемника,  $\phi_0$  – фаза волны на источнике в момент излучения.

Поэтому разность фаз сигналов, принимаемых приемником от двух источников, равна

$$\Delta\phi = \phi_{01} - \phi_{02} + \frac{\omega}{c}(R_1 - R_2).$$



В первом случае рассеяние происходит на фронте волны, поэтому  $\phi_{01} - \phi_{02} = 0$ . Разность расстояний до источников, равна

$$R_1 - R_2 = -d \sin \alpha = -2\lambda \sin \alpha.$$

Амплитуда волны на приемнике равна

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} (1 + e^{2ik\lambda \sin \alpha}) = E_0 e^{i\omega t} (1 + e^{4i\pi \sin \alpha}).$$

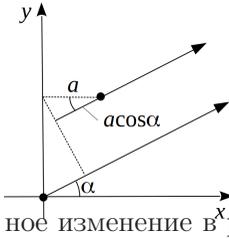
Амплитуда максимальна, когда

$$4\pi \sin \alpha = 2\pi m, \quad \sin \alpha = \frac{m}{2}.$$

Условию задачи соответствует  $m = \pm 1$  и  $\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{6}$ .

Если первый источник смещается на расстояние  $a$  вдоль оси  $x$ , то рассеяние становится несинфазным:

$$\phi_{01} - \phi_{02} = ka.$$



Кроме того возникает дополнительное изменение в  $x$  расстоянии до приемника:

$$\Delta R_1 = -a \cos \alpha.$$

Результирующая добавка к разности фаз сигналов на приемнике составит

$$ka - ka \cos \alpha_0 = ka(1 - \cos \alpha_0).$$

Для того, чтобы вместо максимума стал минимум, эта добавка должна составлять  $\pm\pi$ :

$$ka(1 - \cos \alpha_0) = \frac{2\pi a}{\lambda} (1 - \cos \alpha_0) = \pm\pi,$$

$$a = \pm \frac{\lambda}{2(1 - \cos \alpha_0)} = \pm \frac{\lambda}{2 - \sqrt{3}} = \pm(2 + \sqrt{3})\lambda.$$

### Решение задачи 7

Потери энергии на излучение равны

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \gamma^2 \int ((\mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}])^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})^2) dt.$$

Рассмотрим подробнее подынтегральное выражение:

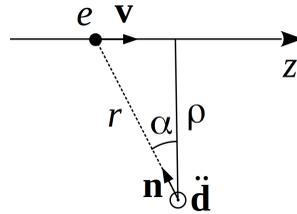
$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) = 0,$$

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H} = \frac{\boldsymbol{\beta} \times \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 r} = \frac{\beta \sin \alpha}{c^2 r} \ddot{\mathbf{d}},$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} = -\frac{\ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 r} = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{d}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}] &= \frac{\beta \sin \alpha - 1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{d}} = \frac{(\beta \sin \alpha - 1) \cos \alpha}{c^2 \rho} \ddot{\mathbf{d}} = \\ &= \frac{(1 - \beta \sin \alpha) \cos \alpha}{c^2 \rho} d_0 \omega^2 \cos(\omega(t - r/c)). \end{aligned}$$

Поскольку частота осцилляций диполя высока, то в течение периода осцилляций множитель  $(1 - \beta \sin \alpha)^2 \cos^2 \alpha$  в подынтегральном выражении можно считать постоянным. Тогда можно вынести из-под интеграла среднее значение  $\langle \cos^2(\omega(t - r/c)) \rangle = \frac{1}{2}$ :



$$\Delta \mathcal{E} = \frac{e^4 d_0^2 \omega^4}{3m^2 c^3} \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \beta \sin \alpha)^2}{c^4 \rho^2} \cos^2 \alpha dt.$$

Перейдем к интегрированию по углу:

$$z = -\rho \operatorname{tg} \alpha, \quad t = \frac{z}{v} = \frac{z}{c\beta}, \quad dt = \frac{dz}{c\beta} = -\frac{\rho}{c\beta \cos^2 \alpha} d\alpha,$$

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{e^4 d_0^2 \omega^4}{3m^2 c^7 \rho} \gamma^2 \int_{\pi/2}^{-\pi/2} (1 - \beta \sin \alpha)^2 \cos^2 \alpha \frac{d\alpha}{c\beta \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{e^4 d_0^2 \omega^4}{3m^2 \rho \beta c^8} \gamma^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\beta \sin \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{e^4 d_0^2 \omega^4}{3m^2 c^8 \beta \rho} \gamma^2 \cdot \pi(1 + \beta^2/2).$$

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 1. Электродинамика частиц и полей. 48, 52, 56, 90
2. Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2. Электродинамика частиц и волн. 96
3. Яковлев В. И. Классическая электродинамика. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. Электричество и магнетизм. 92